MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI ȘI CULTURII
INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREȘTI

CATEDRA DE MECANICĂ

Culegere DE PROBLEME DE MECANICĂ

VOLUMUL I

EDITURA DE STAT DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
București 1960

MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI ȘI CULTURII
INSTITUTUL POLITEHNIC — BUCUREȘTI

CATEDRA DE MECANICĂ

Culegere DE PROBLEME DE MECANICĂ

VOLUMUL I

EDITURA DE STAT DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI — 1960

Scanned with OKEN Scanner

Lucrarea a fost întocmită de un colectiv al catedrei de Mecanică din Institutul Politehnic Bucureşti, responsabil fiind lector **D. D. Boiangiu,** *sub îndrumarea prof.* **M. Sarian,** *şeful catedrei.*

Scanned with OKEN Scanner

STATICA

Capitolul I

FORȚE CONCURENTE

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Se numesc forțe concurente forțele care au același punct de aplicație. Un sistem de forțe concurente $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_i, \ldots, \overline{F}_n$ se poate înlocui cu o singură forță care produce același efect ca și sistemul de forțe $\overline{F}_i$, rezultanta $\overline{R}$, egală cu suma vectorială a forțelor sistemului:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i. \tag{1.1}$$

Notînd cu X_i, Y_i, Z_i proiecțiile forței $\overline{F}_i$ și cu X, Y, Z proiecțiile rezultantei $\overline{R}$, pe axele Ox, Oy, Oz ale unui triedru ortogonal $Oxyz$ avem:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{n} X_i \\ Y &= \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ Z &= \sum_{i=1}^{n} Z_i. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Pentru modulul rezultantei putem folosi una dintre formulele următoare:

$$|\overline{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \tag{1.3}$$

sau:

$$R^2 = \sum_{i=1}^{n} F_i^2 + 2 \Sigma F_i F_j \cos \sphericalangle (\overline{F}_i, \overline{F}_j) \qquad (i \neq j,\ i < j) \tag{1.4}$$

relație care va fi stabilită în problema (1.4).

Notînd cu α, β, γ unghiurile formate de rezultanta $\overline{R}$ cu axele de coordonate avem:

$$\cos \alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{R}. \tag{1.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

Grafic rezultanta a două forțe concurente $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ se poate determina cu ajutorul *paralelogramului forțelor*, rezultanta fiind diagonala paralelogramului avînd ca laturi forțele date (fig. 1. *a*). În cazul unui sistem de forțe $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{F}_n$ putem construi *poligonul forțelor*, așezînd forțele cap la cap

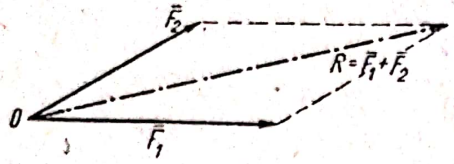


Fig. 1. *a*

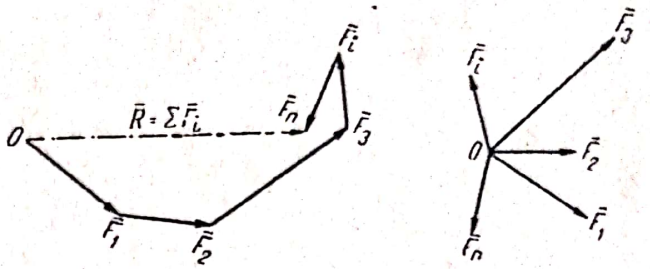


Fig. 1. *b*

astfel încît fiecare forță să aibă originea sa în extremitatea forței precedente. Rezultanta $\overline{R}$ are ca origine originea primei forțe $\overline{F}_1$ și ca extremitate extremitatea ultimei forțe $\overline{F}_n$ (fig. 1. *b*). Această metodă se folosește mai ales în cazul cînd forțele sînt coplanare. Descompunerea unei forțe $\overline{F}$ după două direcții coplanare cu forța Δ_1 și Δ_2 se face construind un paralelogram care să aibă laturile paralele cu cele două direcții și ca diagonală forța dată. Laturile paralelogramului dau modulul, direcția și sensul celor două componente $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$, unde $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 = \overline{F}$ (fig. 1. *c*).

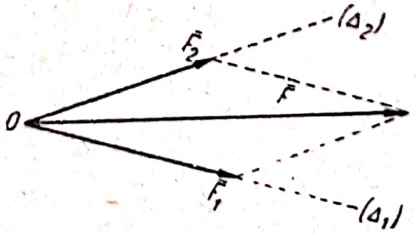


Fig. 1. *c*

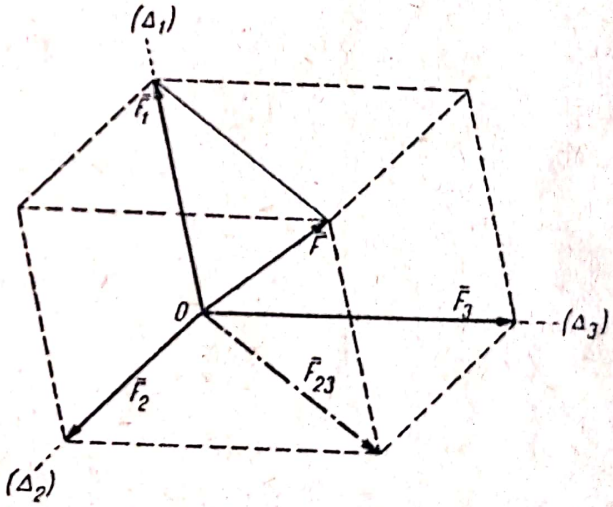


Fig. 1. *d*

Descompunerea unei forțe $\overline{F}$ după trei direcții necoplanare Δ_1, Δ_2, Δ_3 se face construind un paralelipiped care să aibă muchiile paralele cu cele trei direcții și ca diagonală forța dată. Muchiile paralelipipedului dau modulul, direcția și sensul componentelor căutate $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ unde $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 = \overline{F}$ (fig. 1. *d*). Construcția paralelipipedului de cele mai multe ori se efectuează descompunînd forța $\overline{F}$ mai întîi după una dintre direcțiile date (de ex. Δ_1) și intersecția dintre planul determinat de $\overline{F}$ și Δ_1 cu planul determinat de Δ_2 și Δ_3 și apoi componenta $\overline{F}_{23}$ din planul Δ_2 și Δ_3 se descompune după direcțiile Δ_1 și Δ_2.

Scanned with OKEN Scanner

B. PROBLEME REZOLVATE

1.1. Să se determine rezultanta celor două forțe concurente $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ din figura 1.1 unde $F_2 = 2F_1$ și unghiul dintre cele două forțe este $\frac{\pi}{4}$.

Rezolvare. Alegînd axele ca în figura 1.1 se determină cu ajutorul formulei (1.2) proiecțiile X, Y ale rezultantei:

$$X = X_1 + X_2 = F_1 \cos\frac{\pi}{4} + F_2 \cos 0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\right) F_1$$

$$Y = Y_1 + Y_2 = F_1 \sin\frac{\pi}{4} + F_2 \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} F_1$$

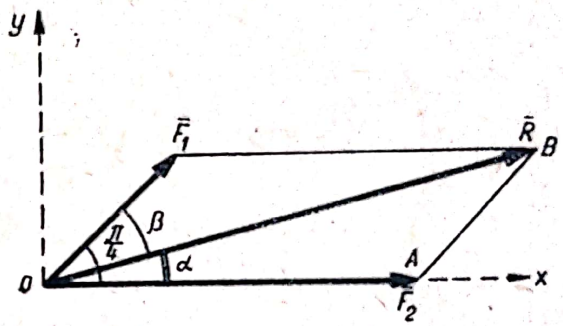


Fig. 1.1

$$\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\right) F_1 \bar{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} F_1 \bar{j}.$$

Modulul rezultantei va fi conform formulei (1.3):

$$\bar{R} = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}\, F_1 \approx 2{,}8\, F_1 .$$

Unghiul α format de rezultantă cu axa Ox va fi:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Y}{X} = 0{,}261 \qquad \alpha \approx 14^\circ\, 40'$$

deci rezultanta formează unghiul α cu forța $\bar{F}_2$ și unghiul $\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha$ cu forța $\bar{F}_1$ ($\beta \approx 30^\circ\ 20'$).

Modulul rezultantei se putea determina și cu formula (1.4):

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos\frac{\pi}{4} = \left(5 + 2\sqrt{2}\right) F_1^2$$

și apoi aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul OAB (fig. 1.1):

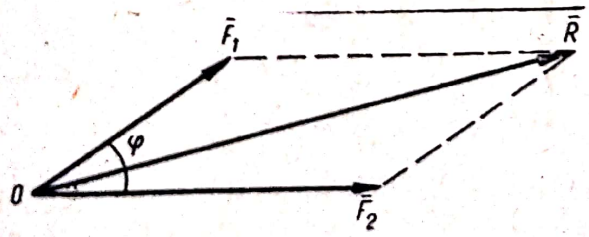


Fig. 1.2

$$\frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\frac{3\pi}{4}}$$

puteam determina unghiurile α și β.

1.2. Să se determine unghiul format de două forțe $F_1 = 30$ kgf și $F_2 = 40$ kgf dacă modulul rezultantei lor este de 50 kgf.

Rezolvare. Problema se rezolvă pornind de la relația (1.4) care există între modulele rezultantei și componentelor sale:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos\varphi,$$

din care:

$$\cos\varphi = \frac{R^2 - F_1^2 - F_2^2}{2F_1F_2} = \frac{50^2 - 30^2 - 40^2}{2 \cdot 30 \cdot 40} = 0$$

$$\varphi = 90°.$$

1.3. Se dau 5 forțe: $F_1 = 1$ tf, $F_2 = 2\sqrt{2}$ tf, $F_3 = 3\sqrt{5}$ tf, $F_4 = \sqrt{17}$ tf, $F_5 = 5$ tf aplicate în vîrful O al unui dreptunghi de laturi $OA = 4$ m, $OC = 2$ m și dirijate ca în figura 1.3 *a* (M și N sînt mijloacele laturilor AB, respectiv BC). Se cere rezultanta acestui sistem de forțe concurente.

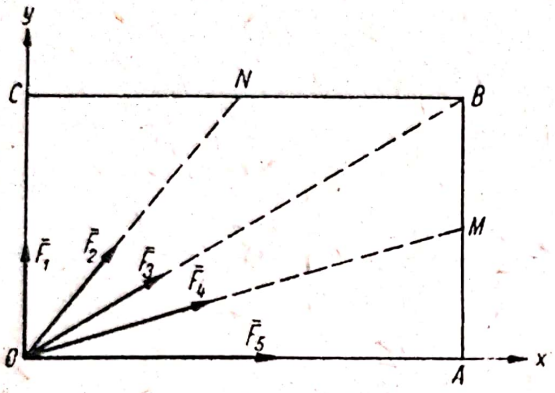


Fig. 1.3 *a*

Rezolvare. Se aleg axele de coordonate ca în figură. Pentru aflarea expresiilor analitice ale forțelor se determină în prealabil versorii direcțiilor ON, OB, OM:

$$\bar{F}_1 = 1\,\bar{j};\quad \bar{F}_2 = F_2\frac{\overline{ON}}{ON} = 2\sqrt{2}\,\frac{2\bar{i} + 2\bar{j}}{\sqrt{4+4}} = 2\,\bar{i} + 2\,\bar{j};$$

$$\bar{F}_3 = F_3\frac{\overline{OB}}{OB} = 3\sqrt{5}\cdot\frac{4\bar{i} + 2\bar{j}}{\sqrt{16+4}} = 6\,\bar{i} + 3\,\bar{j};\quad \bar{F}_4 = F_4\frac{\overline{OM}}{OM} =$$

$$= \sqrt{17}\cdot\frac{4\bar{i} + \bar{j}}{\sqrt{16+1}} = 4\,\bar{i} + \bar{j};\quad \bar{F}_5 = 5\,\bar{i}.$$

Din formula (1.1) se găsește:

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i = (2 + 6 + 4 + 5)\,\bar{i} + (1 + 2 + 3 + 1)\,\bar{j} = 17\,\bar{i} + 7\,\bar{j}.$$

Modulul rezultantei va fi:

$$R = \sqrt{17^2 + 7^2} \approx 18{,}4 \text{ tf}$$

și cosinusul unghiului format de rezultantă cu axa Ox va fi:

$$\cos\alpha = \frac{X}{R} = \frac{17}{18{,}4} = 0{,}925 \quad \alpha \approx 22°25'.$$

Scanned with OKEN Scanner

În figura 1.3 *b* s-a determinat pe cale grafică rezultanta $\bar{R}$ cu ajutorul poligonului forțelor. Scara aleasă este 1 cm = 2 tf.

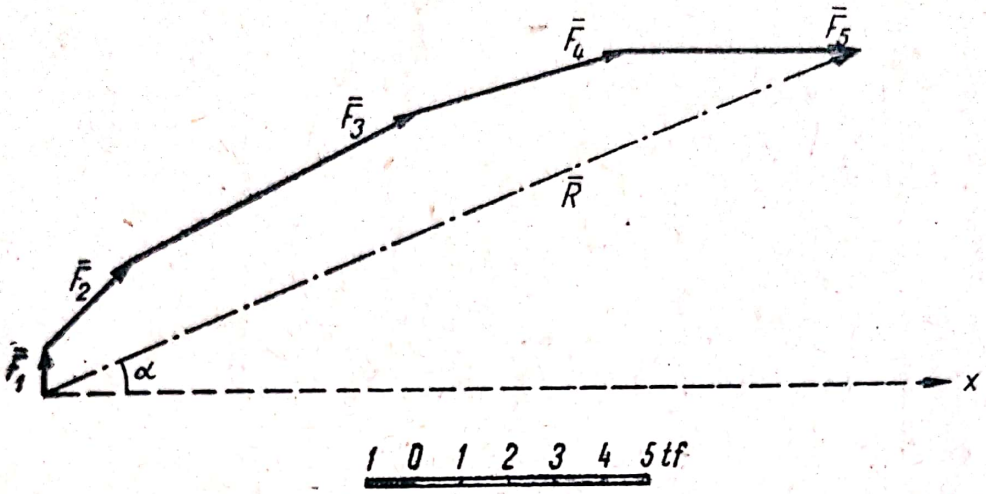


Fig. 1.3 *b*

1.4. Într-un punct acționează trei forțe ale căror proiecții pe axele de coordonate rectangulare *Oxyz* sînt date în tabela

$\bar{F}_i$	X_i	Y_i	Z_i
$\bar{F}_1$	2	10	6
$\bar{F}_2$	1	4	−4
$\bar{F}_3$	2	−2	−2

Să se afle modulul rezultantei și cosinusurile ei directoare.

Rezolvare. Proiecțiile forțelor fiind date, însumîndu-le, se află proiecțiile rezultantei:

$$X = \Sigma X_i = 2 + 1 + 2 = 5$$

$$Y = \Sigma Y_i = 10 + 4 - 2 = 12$$

$$Z = \Sigma Z_i = 6 - 4 - 2 = 0;$$

prin urmare $\bar{R} = 5\,\bar{i} + 12\,\bar{j}$.

Modulul este:

$$\bar{R} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

iar cosinusurile directoare sînt:

$$\cos\alpha = \frac{5}{13}\ ; \quad \cos\beta = \frac{12}{13}\ ; \quad \cos\gamma = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

1.5. Să se arate că pătratul modulului rezultantei $\bar{R}$ a unui sistem de n forțe concurente se poate afla cu formula (1.4):

$$R^2 = \sum_{i=1}^{n} F_i^2 + 2 \sum_{ij}' F_i F_j \cos \sphericalangle (\bar{F}_i, \bar{F}_j) \qquad (1)$$

(în ultimul termen $i \neq j$, $i < j$).

Să se arate de asemenea că unghiul dintre rezultanta $\bar{R}$ și una dintre forțe $\bar{F}_p$ este dat de relația:

$$\cos \measuredangle (\bar{R}, \bar{F}_p) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{n} F_i \cos \measuredangle (\bar{F}_i, \bar{F}_p). \qquad (2)$$

Rezolvare. Înmulțind scalar pe $\bar{R}$ cu el însuși avem:

$$R^2 = \bar{R} \cdot \bar{R} = \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{F}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_i \bar{F}_j . \qquad (3)$$

Suma dublă conține termenii pentru care $i = j$ în care caz $\bar{F}_i \bar{F}_i = F_i^2$. Ceilalți termeni ($i \neq j$) se pot grupa doi cîte doi după cum urmează:

$$\bar{F}_i \bar{F}_j + \bar{F}_j \bar{F}_i = 2\, \bar{F}_i \bar{F}_j \cos \measuredangle (\bar{F}_i, \bar{F}_j).$$

Înlocuind în relația (3) rezultă formula (1).

Formula (2) este o consecință a teoremei proiecțiilor (proiecția rezultantei este egală cu suma proiecțiilor componentelor). Aplicînd-o pe direcția forței $\bar{F}_p$ se obține:

$$R \cos \measuredangle (\bar{R}, \bar{F}_p) = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos \measuredangle (\bar{F}_i, \bar{F}_p). \qquad (4)$$

Împărțind cu modulul R al rezultantei se obține formula (2).

1.6. Pe muchiile unei piramide drepte cu baza un pătrat de latură $2a$ și înălțimea $a\sqrt{2}$ acționează forțele $F_1 = 2F$, $F_2 = 4F$, $F_3 = 6F$, $F_4 = 8F$ (fig. 1.6). Să se determine rezultanta acestui sistem de forțe concurente.

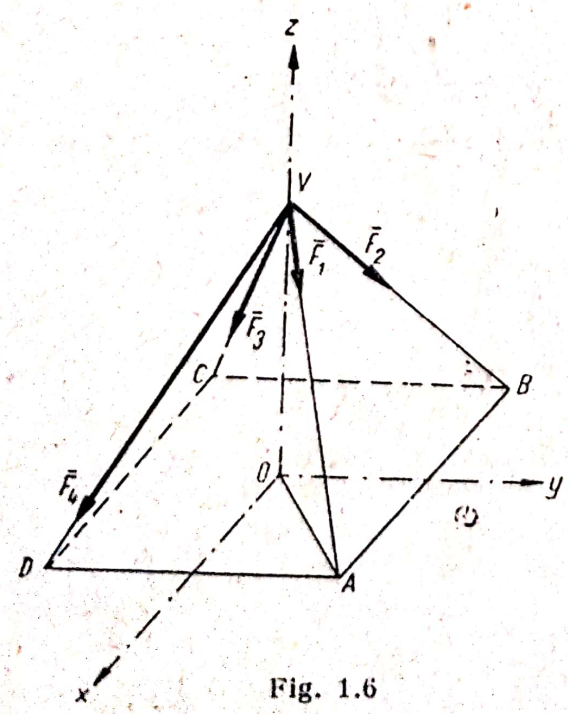


Fig. 1.6

Rezolvare. Se alege un sistem de axe de coordonate de ex. cel din figura 1.6 și se determină expresiile analitice ale forțelor după ce în prealabil s-au determinat versorii $\overline{VA}^0$, $\overline{VB}^0$, $\overline{VC}^0$, $\overline{VD}^0$ ai suporturilor forțelor:

$$\overline{VA}^0 = \frac{\overline{VA}}{|\overline{VA}|} = \frac{a\,\bar{i} + a\,\bar{j} - a\sqrt{2}\,\bar{k}}{\sqrt{a^2 + a^2 + 2a^2}} = \qquad (1)$$

$$= \frac{1}{2}\,\bar{i} + \frac{1}{2}\,\bar{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{k}.$$

Analog:

$$\overline{VB}^0 = -\frac{1}{2}\,\bar{i} + \frac{1}{2}\,\bar{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\bar{k};$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\overline{VC^0} = -\frac{1}{2}\bar{i} - \frac{1}{2}\bar{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{k}; \qquad \overline{VD^0} = \frac{1}{2}\bar{i} - \frac{1}{2}\bar{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{k}.$$

Rezultă:

$$\bar{F}_1 = F_1\overline{VA^0} = F\,\bar{i} + F\,\bar{j} - \sqrt{2}\,F\,\bar{k}$$
$$\bar{F}_2 = F_2\overline{VB^0} = -2\,F\,\bar{i} + 2\,F\,\bar{j} - 2\sqrt{2}\,F\,\bar{k}$$
$$\bar{F}_3 = F_3\overline{VC^0} = -3\,F\,\bar{i} - 3\,F\,\bar{j} - 3\sqrt{2}\,F\,\bar{k}$$
$$\bar{F}_4 = F_4\overline{VD^0} = 4\,F\,\bar{i} - 4\,F\,\bar{j} - 4\sqrt{2}\,F\,\bar{k}.$$

Rezultanta va fi:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{4}\bar{F}_i = -4F\bar{j} - 10\sqrt{2}\,F\,\bar{k} \qquad R = \sqrt{16\,F^2 + 200\,F^2} \approx 14{,}7\,F.$$

Modulul rezultantei se poate determina și cu ajutorul formulei (1.4) dacă cunoaștem unghiurile dintre forțe adică dintre muchiile piramidei.

Cum $|\overline{VA}| = 2a$ [v. relația (1)] avem $VA = VB = AB = 2a$ deci fețele laterale ale piramidei sînt triunghiuri echilaterale și unghiurile dintre două forțe alăturate sînt de $\pi/3$ radiani.

Cum $OV = OA = a\sqrt{2}$ triunghiul OAV este isoscel dreptunghic $\widehat{OVA} = \pi/4$ și deci unghiul dintre două forțe situate pe muchiile opuse este drept:

$$R^2 = \Sigma F_i^2 + 2\,\Sigma F_iF_j \cos \sphericalangle(\bar{F}_i\bar{F}_j) = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 +$$

$$+ 2\,F_1F_2\cos\frac{\pi}{3} + 2\,F_1F_3\cos\frac{\pi}{2} + 2\,F_1F_4\cos\frac{\pi}{3} + 2\,F_2F_3\cos\frac{\pi}{3} +$$

$$+ 2\,F_2F_4\cos\frac{\pi}{2} + 2F_3F_4\cos\frac{\pi}{3} = 216\,F^2$$

$R = 14{,}7\,F.$

Putem determina unghiurile dintre rezultantă și forțele date folosind relația (2) stabilită în problema (1.5):

$$\cos \sphericalangle(\bar{R}, \bar{F}_p) = \frac{1}{R}\,\Sigma\,F_i \cos \sphericalangle(\bar{F}_i, \bar{F}_p).$$

Astfel:

$$\cos \sphericalangle(\bar{R}, \bar{F}_1) = \frac{F_1\cos 0^\circ + F_2\cos\frac{\pi}{3} + F_3\cos\frac{\pi}{2} + F_4\cos\frac{\pi}{3}}{R} = 0{,}544.$$

Analog:

$\cos \sphericalangle(\bar{R}, \bar{F}_2) = 0{,}544$ $\cos \sphericalangle(\bar{R}, \bar{F}_3) = 0{,}816$ $\cos \sphericalangle(\bar{R}, \bar{F}_4) = 0{,}816.$

1.7. Un punct O este atras de n puncte din spațiu A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ cu forțe elastice $\bar{F}_i$, adică forțe proporționale cu distanța la punct, factorii

Scanned with OKEN Scanner

de proporționalitate fiind constantele elastice k_i. Să se determine rezultanta acestor forțe.

Rezolvare. Se alege un triedru de referință cu originea în O. Punctul A_i definit prin vectorul său de poziție $\bar{r}_i$ atrage punctul O cu forța $\bar{F}_i = k_i \bar{r}_i$.

Rezultanta căutată a forțelor este:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} k_i \bar{r}_i . \qquad (1)$$

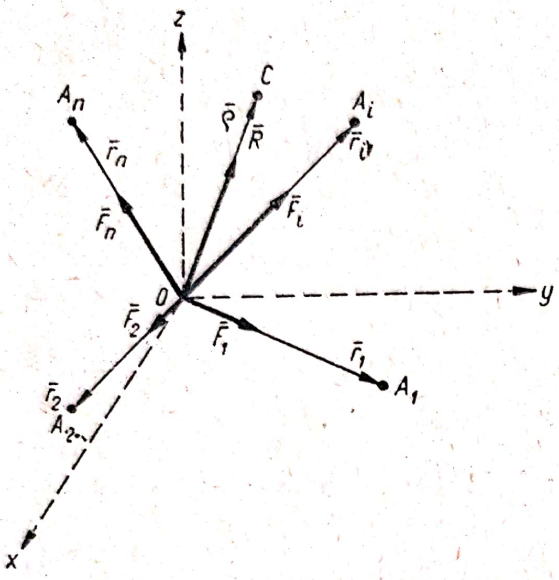


Fig. 1.7

Notînd $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$ relația (1) devine:

$$\bar{R} = k \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i \bar{r}_i}{\sum k_i} = k\bar{\rho} \qquad (2)$$

unde vectorul:

$$\bar{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i \bar{r}_i}{\sum k_i} \qquad (3)$$

definește poziția punctului C denumit *centrul maselor elastice* (prin analogie cu centrul maselor; v. cap. V). Se poate arăta că poziția punctului C este independentă de poziția lui O și de sistemul de referință ales.

Deci rezultanta unui sistem de forțe elastice $\bar{F}_i$ este o forță elastică avînd polul în centrul forțelor elastice și constanta elastică k egală cu suma constantelor elastice k_i.

1.8. O forță $\bar{P}$ se descompune în două componente $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$. Componenta $\bar{F}_1$ are modulul egal cu cel al forței $\bar{P}$ și formează cu ea un unghi α. Să se afle modulul componentei $\bar{F}_2$ și unghiul β pe care îl formează cu forța $\bar{P}$.

Rezolvare. Din figura 1.8 se constată că ΔOAB este isoscel, deoarece: $OA = OB = P$.

Prin urmare

$$\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA = \beta = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} .$$

Apoi: $\bar{F}_2 = \overline{BA}$ deci:

$$|\bar{F}_2| = |\overline{BA}| = 2P \sin \frac{\alpha}{2} .$$

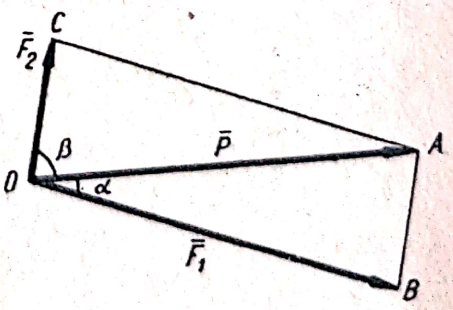


Fig. 1.8

1.9. O lampă de greutate P este suspendată de două fire între doi pereți verticali. Firul din stînga formează unghiul α cu peretele, iar cel din dreapta

unghiul β. Să se afle componentele T_1 și T_2 ale greutății P pe direcția celor două fire.

Rezolvare. Componentele forței P se pot determina rezolvîndu-se trigonometric triunghiul forțelor OAB în care se cunoaște o latură (forța P) și două unghiuri.

Din teorema sinusurilor obținem:

$$\frac{T_1}{\sin\beta} = \frac{T_2}{\sin\alpha} = \frac{P}{\sin(\alpha+\beta)}$$

de unde:

$$T_1 = P\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad T_2 = P\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

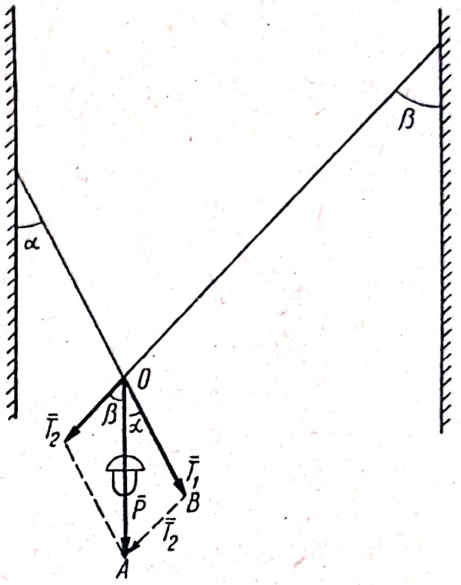


Fig. 1.9

1.10. O greutate Q este suspendată în punctul D așa cum se vede în figura 1.10 *a*. Să se descompună forța Q pe direcția barelor DA, DB, DC.

Rezolvare. Descompunem în primul rînd forța $\overline{Q}$ în componentele $\overline{F_1}$ și $\overline{F_{23}}$ după direcția AD și OD (OD fiind intersecția dintre planul determinat de forța $\overline{Q}$ și direcția AD și planul celorlalte două direcții BD și CD).

$$\sphericalangle ADO = \alpha - \gamma$$

deoarece $\sphericalangle DOE = \alpha$ și este un unghi exterior triunghiului AOD. Triunghiul ODE este dreptunghic deci $\sphericalangle ODE = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

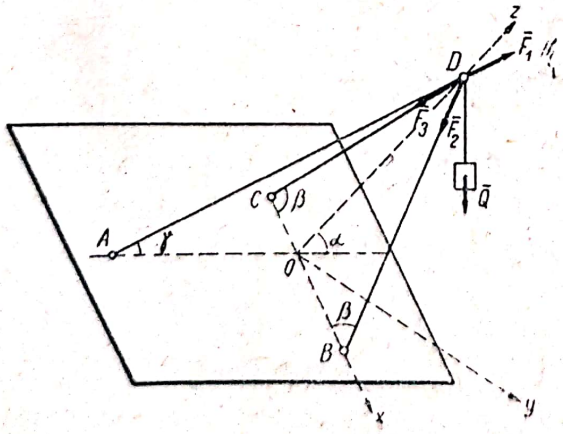


Fig. 1.10 *a*

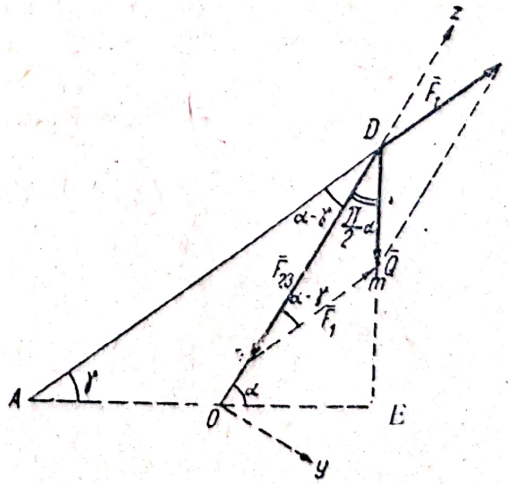


Fig. 1.10 *b*

Din triunghiul Dmn (fig. 1.10 *b*) avem:

$$\frac{Q}{\sin(\alpha-\gamma)} = \frac{F_1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{F_{23}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde:

$$F_1 = Q \frac{\cos \alpha}{\sin (\alpha - \gamma)}$$

$$F_{23} = Q \frac{\cos \gamma}{\sin (\alpha - \gamma)}$$

În al doilea rînd descompunem forța F_{23} în componentele $\overline{F}_2$ și $\overline{F}_3$ după direcțiile BD și CD.

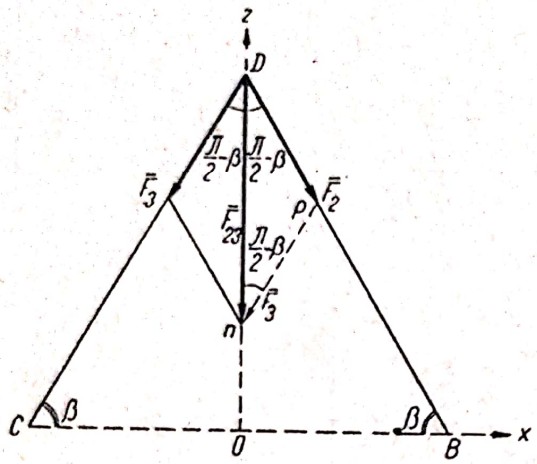


Fig. 1.10 c

Din triunghiul isoscel Dnp (fig. 1.10 *c*) rezultă $F_2 = F_3$ și cum:

$$F_{23} = 2 F_2 \sin \beta$$

rezultă:

$$F_2 = F_3 = Q \frac{\cos \gamma}{2 \sin (\alpha - \gamma) \sin \beta}.$$

Problema se putea rezolva și analitic.

Cum $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 = \overline{Q}$, proiectînd această relație vectorială pe un sistem de axe de coordonate, de exemplu cel ales în sistemul $Oxyz$ din figura 1.10 *a*, se obțin trei ecuații:

$$F_2 \cos \beta - F_3 \cos \beta = 0$$

$$F_1 \sin (\alpha - \gamma) = Q \cos \alpha$$

$$F_1 \cos (\alpha - \gamma) - F_2 \sin \beta - F_3 \sin \beta = -Q \sin \alpha$$

care, rezolvate în raport cu F_1, F_2 și F_3, determină componentele căutate.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

1.11. Cinci forțe concurente aflate în același plan au următoarele module și direcții:

$P_1 = 10$ kgf, $P_2 = 15$ kgf, $P_3 = 26$ kgf, $P_4 = 8$ kgf, $P_5 = 12$ kgf

$\sphericalangle(\overline{P}_2, \overline{P}_1) = 50°, \sphericalangle(\overline{P}_3, \overline{P}_1) = 160°, \sphericalangle(\overline{P}_4, \overline{P}_1) = -100°, \sphericalangle(\overline{P}_5, \overline{P}_1) = -40°.$

Să se afle rezultanta acestor forțe și unghiul pe care îl face cu forța P_1.

Răspuns. $R = 5{,}66$ kgf $\quad \sphericalangle(\overline{R}, \overline{P}_1) = 57°50'2''$.

1.12. Patru forțe $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{P}_4$ egale în modul cu P se găsesc pe patru muchii ale unei piramide pentagonale regulate (fig. 1.12). Să se afle rezultanta lor și punctul unde suportul rezultantei înțeapă baza piramidei. Se dă: $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$; raza cercului exînscris r; înălțimea piramidei h.

Răspuns. $R = P\sqrt{\frac{16\,h^2 + r^2}{h^2 + r^2}}$; punctul K de intersecție cu baza se află pe EO la distanța $EK = \frac{5}{4}\,r$; (O centrul cercului exînscris).

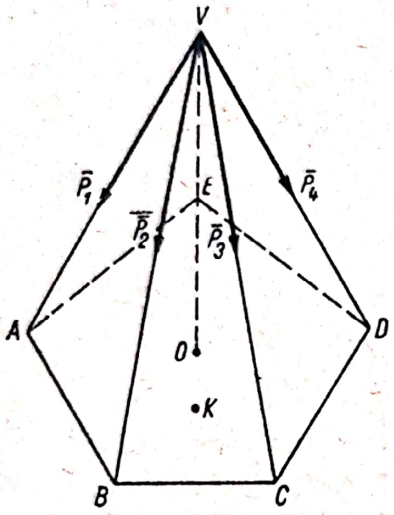


Fig. 1.12

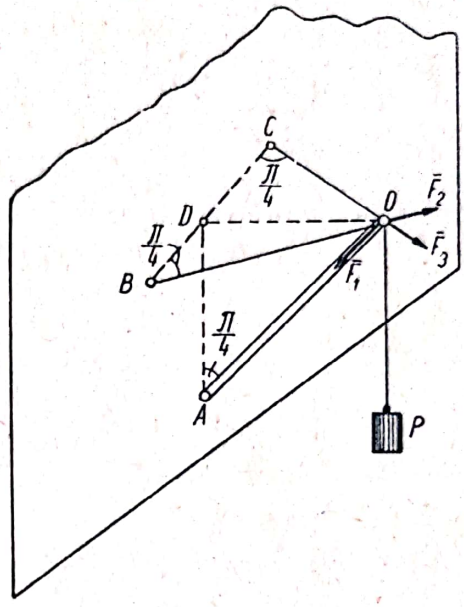


Fig. 1.13

1.13. O greutate P este susținută de bara AO și de firele orizontale BO și CO de lungimi egale (fig. 1.13).

Să se descompună forța pe direcțiile OA, OB, OC.

Răspuns. $F_1 = P\sqrt{2}$ $\qquad F_2 = F_3 = \frac{P\sqrt{2}}{2}$.

Capitolul II

STATICA PUNCTULUI MATERIAL

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Un punct material liber este un corp material de dimensiuni neglijabile care poate ocupa orice poziție în spațiu, poziția lui fiind determinată numai de forțele efectiv aplicate și de condițiile inițiale.

Condiția necesară și suficientă ca un punct material liber să rămînă în repaus, dacă se afla în această stare este ca rezultanta $\overline{R}$ a forțelor $\overline{F}_i$ efectiv aplicate punctului să fie nulă:

$$\overline{R} = \Sigma\,\overline{F}_i = 0 \tag{2.1}$$

sau:

$$X = \Sigma\,X_i = 0 \qquad Y = \Sigma\,Y_i = 0 \qquad Z = \Sigma\,Z_i = 0 \tag{2.2}$$

unde:

$$\overline{R} = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k} \text{ și } \overline{F}_i = X_i\,\overline{i} + Y_i\,\overline{j} + Z_i\,\overline{k}.$$

Dacă forțele sînt coplanare în planul xOy a treia ecuație (2.2) este identic satisfăcută.

Grafic condiția de echilibru (2.1) este ca poligonul forțelor să se închidă.

Problemele de statica punctului material sînt de două categorii, fie cunoscînd forțele $\overline{F}_i$ se cere poziția de echilibru, problemă în general determinată, fie cunoscînd poziția de echilibru se cer forțele care acționează asupra punctului, problemă în general nedeterminată afară de cazul cînd numărul de necunoscute scalare nu depășește numărul de ecuații (2.2) de care se dispune.

În cazul unui punct material supus la legături, adică obligat să rămînă pe o curbă sau pe o suprafață se poate înlătura legătura geometrică și înlocui cu o *forță de legătură* sau *reacțiune* (axioma legăturilor). Sub acțiunea forțelor efectiv aplicate și a reacțiunii punctul material se poate considera liber și i se pot aplica condițiile de echilibru (2.1) și (2.2), $\overline{R}$ fiind rezultanta tuturor forțelor inclusiv forțele de legătură.

O legătură pe care punctul nu o poate părăsi în nici un sens este o legătură bilaterală. O legătură pe care punctul o poate părăsi în anumite sensuri este o legătură unilaterală.

În cazul *legăturilor ideale*, curbe sau suprafețe lucii reacțiunea $\overline{N}$ se găsește în planul normal la curbă (fig. 2. *a*), respectiv pe direcția normalei la suprafață (fig. 2. *b*). În cazul curbelor plane dacă forța efectiv aplicată $\overline{F}$

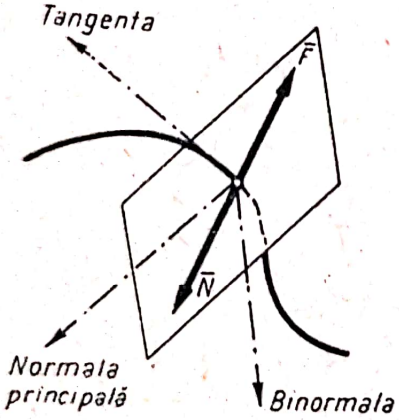


Fig. 2. *a*

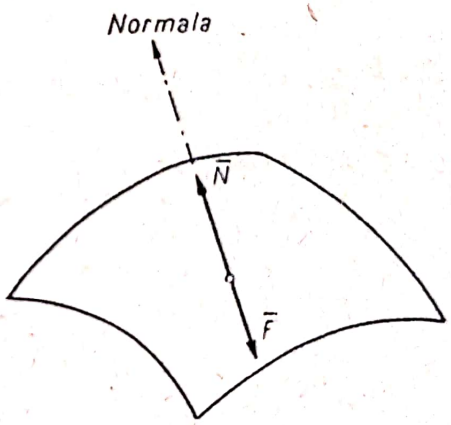


Fig. 2. *b*

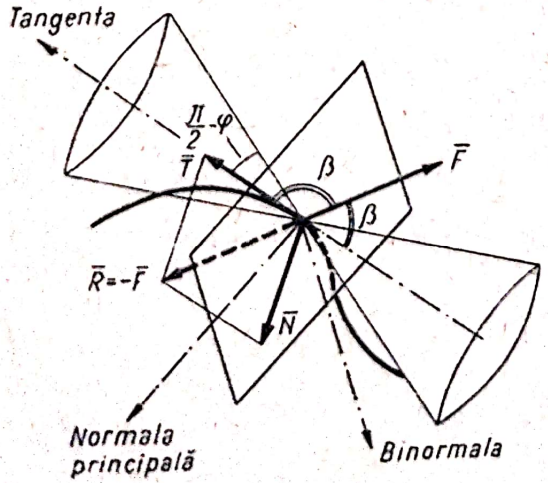


Fig. 2. *c*

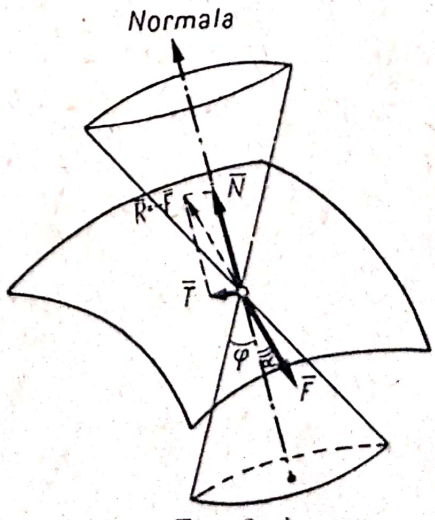


Fig. 2. *d*

Scanned with OKEN Scanner

acționează în planul curbei, $\overline{N}$ va avea direcția normalei principale (normala din planul curbei).

Dacă apare frecarea între punct și legătură atunci reacțiunea are și o componentă tangențială, *forța de frecare* $\overline{T}$ având direcția tangentă la curbă (fig. 2. *c*) respectiv fiind situată în planul tangent la suprafață (fig. 2. *d*). Forța de frecare $\overline{T}$ se opune tendinței de lunecare a punctului.

Pentru echilibru trebuie îndeplinite condițiile (2.1) sau (2.2) precum și condiția:

$$T \leqslant fN \tag{2.3}$$

unde T și N sînt modulele forțelor $\overline{T}$ și $\overline{N}$, iar

$$f = \operatorname{tg} \varphi \tag{2.4}$$

este coeficientul de frecare. Unghiul φ poartă denumirea de unghi de frecare.

Din condiția ca să nu apară lunecarea (2.3) se pot obține următoarele condiții geometrice.

În cazul unui punct obligat să rămînă pe o suprafață (fig. 2. *b*), unghiul α dintre rezultanta forțelor efectiv aplicate $\overline{F}$ și normala la suprafață trebuie să îndeplinească condiția:

$$\alpha \leqslant \varphi \tag{2.5}$$

adică suportul forței $\overline{F}$ se găsește în interiorul unui con, *conul de frecare*, avînd ca axă, normala la suprafață și unghiul la vîrf 2φ.

În cazul unui punct obligat să rămînă pe o curbă (fig. 2. *c*) unghiul β dintre rezultanta forțelor efectiv aplicate $\overline{F}$ și tangenta la curbă trebuie să îndeplinească condiția:

$$\beta \geqslant \frac{\pi}{2} - \varphi \tag{2.6}$$

adică suportul forței $\overline{F}$ se găsește în exteriorul unui con, denumit tot con de frecare avînd ca axă, tangenta la suprafață și unghiul la vîrf $\pi - 2\varphi$.

În cazul curbelor plane conul de frecare împarte planul în două domenii, dacă suportul forței $\overline{F}$ se găsește în domeniul haşurat (triunghiul de frecare) din figura 2. *e*, condiția de echilibru (2.3) este îndeplinită.

Dacă forțele efectiv aplicate sînt date în cazul legăturilor ideale se poate determina poziția de echilibru și reacțiunea normală N. În cazul legăturilor cu frecare putem determina cu formula (2.3) domeniile în care este posibil echilibrul. Pozițiile limită de echilibru se pot determina prin condiția

$$T = fN \tag{2.7}$$

sau prin condițiile echivalente $\alpha = \varphi$ sau $\beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ce se deduc din formulele (2.5) și (2.6).

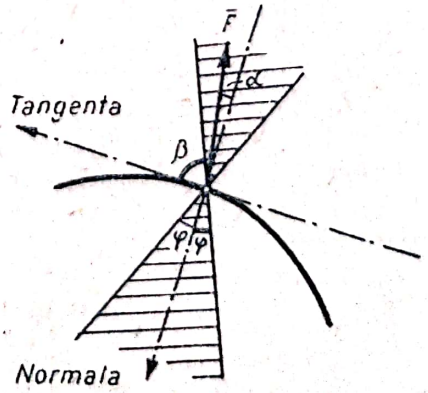


Fig. 2. *e*

Pentru o anumită poziție de echilibru se pot determina componentele $\bar{N}$ și $\bar{T}$ ale reacțiunii.

În cazul legăturilor unilaterale pentru ca punctul să părăsească legătura trebuie îndeplinită și condiția:

$$N > 0 \tag{2.8}$$

N fiind scalarul reacțiunii normale presupusă orientată în sensul în care punctul poate părăsi legătura.

B. PROBLEME REZOLVATE

2.1. Să se găsească poziția de echilibru a unui punct material M atras de două puncte fixe cu forțe proporționale cu distanța, factorii de proporționalitate fiind k_1 și k_2. Să se rezolve aceeași problemă presupunînd că punctul este greu avînd greutatea P.

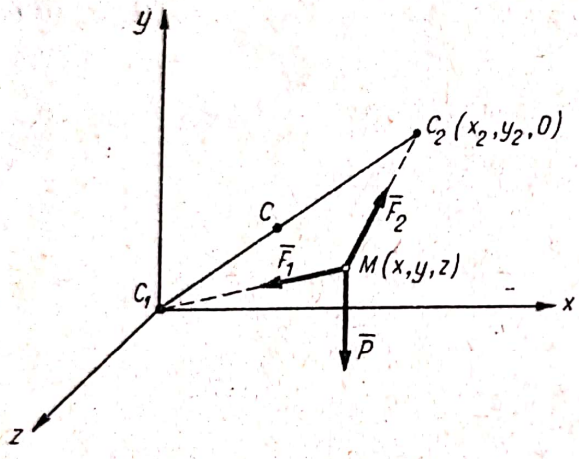


Fig. 2.1

Rezolvare. Asupra punctului acționează forțele atractive $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ și greutatea $\bar{P}$ a punctului.

Condiția de echilibru (2.1):

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{P} = 0 \tag{1}$$

ne permite să obținem trei ecuații cu ajutorul cărora să determinăm coordonatele x, y și z ale punctului M în poziția de echilibru.

Alegem sistemul de axe din figura 2.1 cu originea în C_1, axa C_1y verticală și axa C_1x aleasă astfel încît punctul C_2 să se găsească în planul xC_1y. Vom nota x_2, y_2 abscisa și ordonata punctului C_2. Din enunț avem:

$$\bar{F}_1 = k_1 \overline{MC_1} \quad \text{și} \quad \bar{F}_2 = k_2 \overline{MC_2}. \tag{2}$$

Proiectînd ecuația (1) pe sistemul de axe considerat și ținînd seama de expresiile (2) ale forțelor $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ rezultă:

$$X = -k_1x + k_2(x_2 - x) = 0$$
$$Y = -k_1y + k_2(y_2 - y) - P = 0$$
$$Z = -k_1z - k_2z = 0$$

de unde:

$$x = \frac{k_2x_2}{k_1 + k_2} \qquad y = \frac{k_2y_2 - P}{k_1 + k_2} \qquad z = 0$$

poziția de echilibru găsindu-se în planul xC_1y, planul vertical ce conține punctele C_1 și C_2.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă punctul este lipsit de greutate, $P = 0$ și deci:

$$x = \frac{k_2 x_2}{k_1 + k_2} \qquad y = \frac{k_2 y_2}{k_1 + k_2}.$$

Poziția de echilibru se găsește pe dreapta C_1C_2 într-un punct C care este tocmai centrul maselor elastice (v. problema 1.7). Rezultatul era de așteptat deoarece în acest caz rezultanta forțelor $\bar{F}_1 + \bar{F}_2$ era o forță elastică cu polul în centrul C al forțelor elastice, iar în punctul C, $\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0$.

2.2. Să se găsească poziția de echilibru a unui punct material atras de două centre fixe cu forțe invers proporționale cu pătratul distanței, factorii de proporționalitate fiind k_1 și k_2.

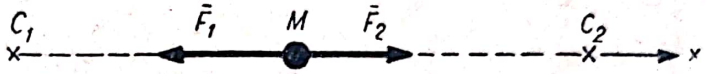


Fig. 2.2

Rezolvare. Condiția de echilibru (2.1) este:

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0.$$

Asupra punctului M acționînd numai două forțe pentru echilibru $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ trebuie să fie egale și direct opuse, deci punctele C_1, M și C_2 trebuie să fie coliniare.

Notînd cu a distanța dintre centre și cu x distanța MC_1

$$F_1 = \frac{k_1}{x^2} \qquad F_2 = \frac{k_2}{(a - x)^2}$$

și proiectînd ecuația (1) pe axa C_1x rezultă:

$$\frac{k_1}{x^2} - \frac{k_2}{(a - x)^2} = 0$$

sau:

$$\frac{x}{a - x} = \pm \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}.$$

Soluția cu semnul + corespunde cazului cînd ambele forțe sînt atractive (sau repulsive); în acest caz:

$$x = \frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}}\, a.$$

Soluția cu semnul — corespunde cazului cînd una dintre forțe este atractivă și cealaltă repulsivă, în care caz:

$$x = \frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{k_1} - \sqrt{k_2}}\, a.$$

2.3. Un punct material M de greutate P este suspendat cu un fir de lungime l de un punct fix O. Punctul M este supus și la o forță orizontală $\bar{F}$

Scanned with OKEN Scanner

de repulsie, proporțională cu distanța lui la verticala punctului O, factorul de proporționalitate fiind k. Să se găsească poziția de echilibru a punctului și tensiunea din fir.

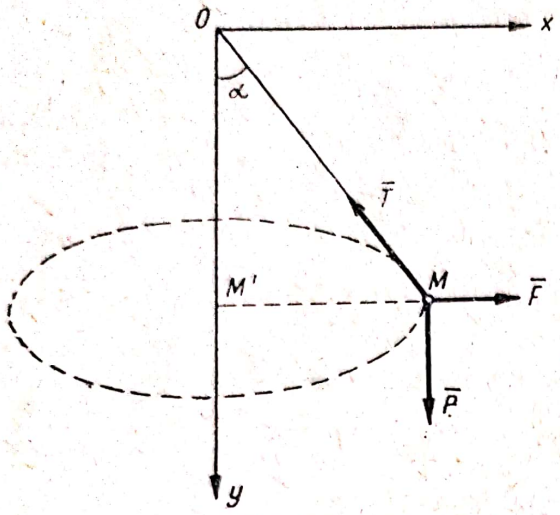


Fig. 2.3

Rezolvare. Poziția punctului M este determinată dacă se cunoaște unghiul α al firului cu verticala.

Asupra punctului vor acționa forțele $\overline{P}$, $\overline{T}$ (tensiunea din fir având direcția firului) și $\overline{F}$ unde:

$$|\overline{F}| = k\,|\overline{M'M}| = k\,l \sin\alpha.$$

Ecuațiile de proiecții (2.2) sînt:

$$X = k\,l \sin\alpha - T \sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$Y = P - T\cos\alpha = 0. \qquad (2)$$

Din (2) rezultă:

$$T = \frac{P}{\cos\alpha}.$$

Introducînd în (1):

$$\sin\alpha\left(kl - \frac{P}{\cos\alpha}\right) = 0.$$

Această ecuație are două soluții: $\sin\alpha = 0$ și $\cos\alpha = \frac{P}{kl}$. Prima soluție este evidentă: punctul se găsește pe verticala lui O, forța $\overline{F}$ fiind nulă, iar $T = P$. A doua soluție are sens numai pentru $\cos\alpha = \frac{P}{kl} \leqslant 1$, adică $P \leqslant k\,l$. Această valoare a unghiului α definește pozițiile de echilibru ale punctului, situate pe un cerc de rază

$$l\sin\alpha = \sqrt{l^2 - \frac{P^2}{k^2}}$$

avînd centrul pe axa Oy abscisa centrului fiind $l\cos\alpha = \frac{P}{k}$. Tensiunea din fir este $T = k\,l$.

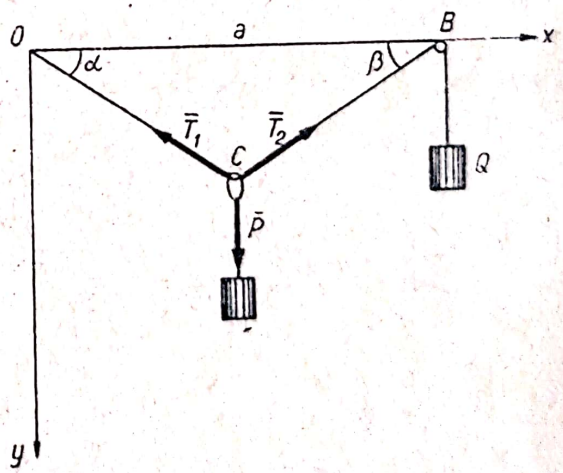


Fig. 2.4

2.4. Un fir flexibil este legat într-un punct fix O, după aceea trecut peste un scripete foarte mic B iar la extremitatea lui atîrnă o greutate Q. Pe porțiunea firului dintre O și B alunecă un inel C de care este suspendată o greutate P. Să se găsească poziția de echilibru a inelului.

Rezolvare. Poziția inelului este determinată dacă se cunosc coordonatele lui față de sistemul de axe xOy.

Izolăm inelul C înlocuind firul cu tensiunile din fir. Tensiunea de-a lungul unui fir fiind aceeași (v. cap. IX) tensiunea T_1 în porțiunea OC a firului

este egală cu tensiunea T_2 în porțiunea CB care este egală cu Q deoarece scripetele are rolul de a schimba direcția de acțiune a forței $\overline{Q}$ (v. cap. XI):

$$T_1 = T_2 = Q.$$

Condițiile de echilibru (2.2) sînt:

$$X = Q\cos\beta - Q\cos\alpha = 0.$$
$$Y = -Q\sin\alpha - Q\sin\beta + P = 0.$$

Rezolvînd sistemul rezultă:

$$\alpha = \beta = \arcsin\frac{P}{2Q}.$$

Pentru ca problema să fie posibilă trebuie ca $\sin\alpha \leqslant 1$:

$$P \leqslant 2Q.$$

Triunghiul OCB fiind isoscel, coordonatele punctului C vor fi: $x = \frac{a}{2}$ și $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$ sau $y = a\frac{P}{2\sqrt{4Q^2 - P^2}}$.

2.5. Un inel O este supus acțiunii a 3 forțe $\overline{P}$, $\overline{Q}$ și $\overline{R}$ realizate cu greutățile respective prin intermediul a 3 fire.

Să se afle poziția de echilibru a inelului dată de unghiurile α și β.

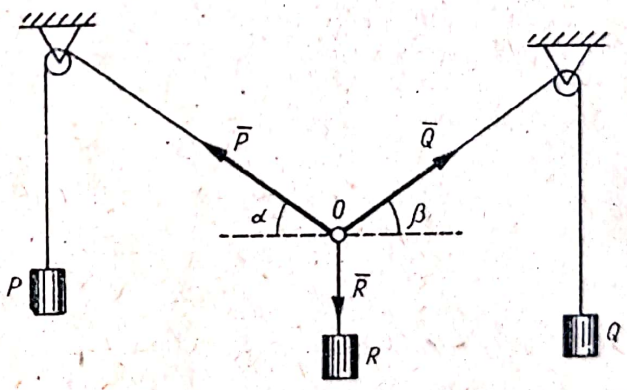


Fig. 2.5 *a*

Rezolvare. Condițiile de echilibru:

$$Q\cos\beta - P\cos\alpha = 0$$
$$Q\sin\beta + P\sin\alpha - R = 0.$$

Rezolvînd sistemul se află unghiurile α și β:

$$Q\cos\beta = P\cos\alpha$$
$$Q\sin\beta = R - P\sin\alpha$$
$$Q^2 = P^2\cos^2\alpha + (R - P\sin\alpha)^2 = P^2 + R^2 - 2PR\sin\alpha$$

de unde:

$$\sin\alpha = \frac{P^2 + R^2 - Q^2}{2PR} \qquad (1)$$

$$\sin\beta = \frac{Q^2 + R^2 - P^2}{2QR}. \qquad (2)$$

Discuție

Condiția $\sin\alpha \leqslant 1$ implică $P^2 + R^2 - Q^2 - 2PR \leqslant 0$ (3)

Condiția $\sin\beta \leqslant 1$ implică $-P^2 + R^2 + Q^2 - 2QR \leqslant 0$. (4)

Adunînd inegalităţile (3) şi (4) se obţine condiţia:

$$R < P + Q. \tag{5}$$

Analog se pot obţine condiţiile:

$$P < Q + R \qquad\qquad Q < R + P \tag{5}$$

deci pentru a putea realiza echilibrul, o forţă trebuie să fie mai mică în modul decît suma modulelor celorlalte două forţe.

Problema se poate rezolva grafic, poligonul forţelor trebuind să se închidă. Forţa $\overline{R}$ fiind cunoscută în modul şi direcţie, iar forţele $\overline{P}$ şi $\overline{Q}$ fiind cunoscute numai în modul problema se reduce la construirea unui triunghi cu o latură $AB = R$ dată, avînd determinate lungimile $P = AC$ şi $Q = BC$ ale celorlalte două laturi (fig. 2.5 *b*). Rezolvînd trigonometric triunghiul regăsim expresiile (1) şi (2) ce definesc poziţia de echilibru.

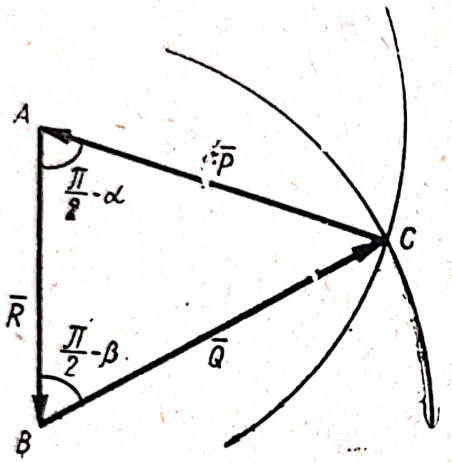


Fig. 2.5 *b*

Condiţiile (5) rezultă imediat, o latură a triunghiului fiind mai mică decît suma celorlalte două laturi.

2.6. O lampă de greutate P este suspendată de un inel O cu ajutorul a trei fire ca în figura 2.6. Firul OA este înclinat sub unghiul α faţă de orizontală, planul firelor OC şi OD este înclinat sub unghiul β faţă de orizontală, iar firele formează unghiurile γ cu OB linia de cea mai mare pantă a planului OCD. În plus OA şi OB sînt situate în acelaşi plan vertical.

Să se determine tensiunile din cele trei fire.

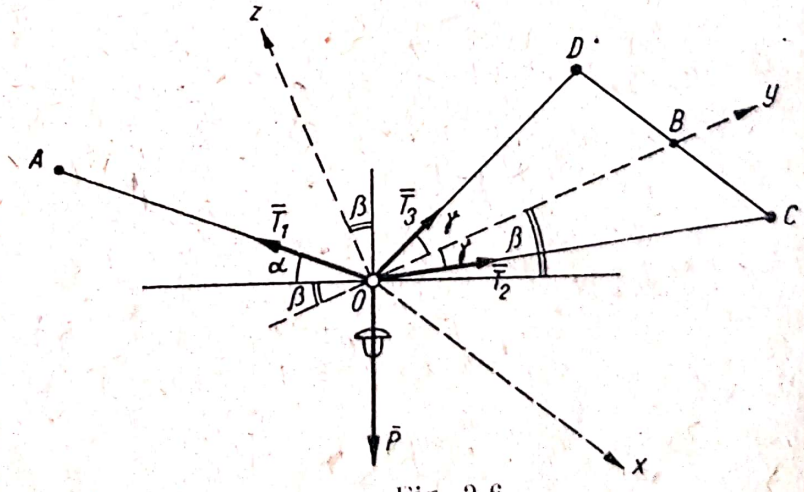


Fig. 2.6

Rezolvare. Asupra inelului O acţionează greutatea $\overline{P}$ şi tensiunile necunoscute $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$, $\overline{T}_3$ din fire. Conform (2.1):

$$\overline{R} = \overline{P} + \overline{T}_1 + \overline{T}_2 + \overline{T}_3 = 0$$

şi cu sistemul de axe ales în figura 2.6, Ox orizontala planului OCD, Oy pe direcţia liniei de cea mai mare pantă a planului OB (planul yOz fiind vertical), ecuaţiile de proiecţii (2.2) devin:

$$X = T_2 \sin\gamma - T_3 \sin\gamma = 0$$
$$Y = -P \sin\beta - T_1 \cos(\alpha + \beta) + T_2 \cos\gamma + T_3 \cos\gamma = 0$$
$$Z = -P \cos\beta + T_1 \sin(\alpha + \beta) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd acest sistem de ecuații se obține:

$$T_1 = \frac{P \cos \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \qquad T_2 = T_3 = \frac{P \cos \alpha}{2 \sin (\alpha + \beta) \cos \gamma}.$$

2.7. Un punct material M de greutate P se reazemă pe un plan înclinat luciu. În afară de greutatea lui punctul mai este supus la două forțe $F_1 = F_2 = \frac{P}{3}$ din care una este orizontală, iar alta paralelă cu linia de cea mai mare pantă a planului înclinat (fig. 2.7 *a*). Să se determine unghiul α al planului înclinat cu orizontala, astfel ca punctul să fie în echilibru și reacțiunea planului.

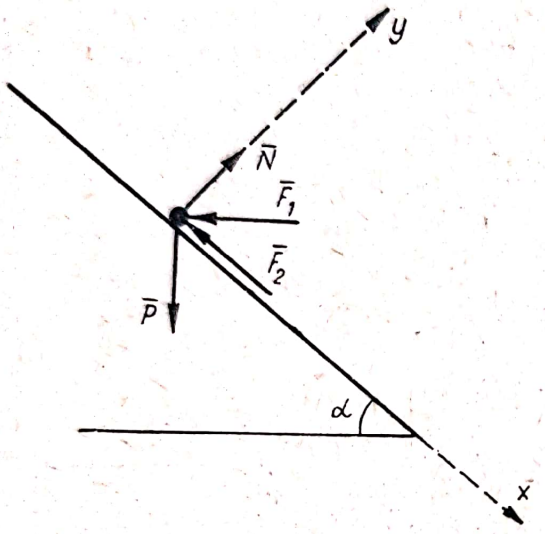


Fig. 2.7 *a*

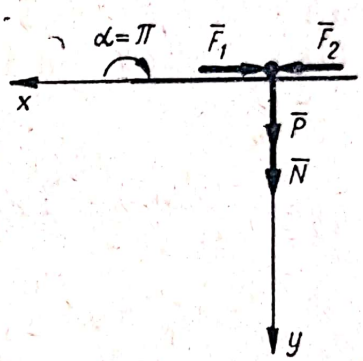


Fig. 2.7 *b*

Rezolvare. Eliberăm punctul de legături înlocuind legătura cu reacțiunea normală N a planului.

Sistemul de forțe $\overline{P}$, $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$ și $\overline{N}$ se echilibrează. Cu sistemul de axe din figură ecuațiile (2.2) se pot scrie:

$$X = P \sin \alpha - \frac{P}{3} \cos \alpha - \frac{P}{3} = 0$$

$$Y = -P \cos \alpha - \frac{P}{3} \sin \alpha + N = 0.$$

Din prima ecuație rezultă $8 \operatorname{tg}^2 \alpha - 6 \operatorname{tg} \alpha = 0$, dacă se înlocuiește $\sin \alpha$ și $\cos \alpha$ în funcție de $\operatorname{tg} \alpha$.

Ecuația are 2 soluții:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \text{ și } \operatorname{tg} \alpha = 0, \text{ deci } \alpha = 0 \text{ sau } \alpha = \pi.$$

Soluția $\alpha = 0$ nu verifică prima ecuație.

Deci problema are ca soluții:

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{4} \qquad N = P$$

$$\alpha = \pi \qquad N = -P$$

(Din figura 2.7 *b* reiese că pentru $\alpha = \pi$ forțele $\overline{F_1}$ și $\overline{F_2}$ sînt opuse, iar scalarul N al reacțiunii normale este negativ deoarece reacțiunea este dirijată pe verticală în sus.)

Scanned with OKEN Scanner

2.8. Un punct M de greutate P se reazemă pe linia de cea mai mare pantă a unui plan înclinat, luciu; el este legat cu un fir flexibil care trece peste un scripete foarte mic C, situat în același plan vertical cu linia de cea mai mare pantă, și care poartă la celălalt capăt o greutate Q.

Să se determine pentru poziția de echilibru unghiul firului MC cu planul înclinat precum și reacțiunea planului.

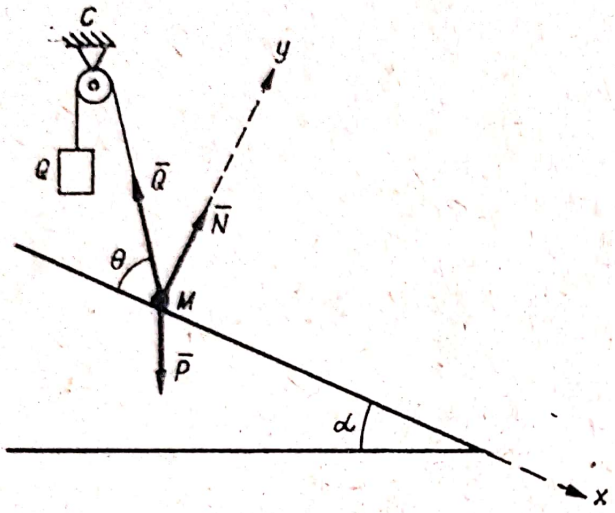


Fig. 2.8

Rezolvare. Eliberăm punctul de legături înlocuind planul cu reacțiunea normală N a planului, deci asupra punctului acționează forțele $\bar{P}$, $\bar{Q}$ și $\bar{N}$.

Ecuațiile de echilibru (2.2) sînt:

$$X = P \sin \alpha - Q \cos \theta = 0$$
$$Y = N + Q \sin \theta - P \cos \alpha = 0$$

de unde:

$$\cos \theta = \frac{P \sin \alpha}{Q}.$$

$$N = P \cos \alpha - \sqrt{Q^2 - P^2 \sin^2 \alpha}.$$

Pentru ca problema să fie posibilă trebuie ca:

$$\cos \theta \leqslant 1, \text{ adică } Q \geqslant P \sin \alpha$$

și cum legătura este unilaterală pentru ca punctul să nu se desprindă de plan trebuie, conform (2.8):

$$N > 0, \text{ adică } P \cos \alpha > \sqrt{Q^2 - P^2 \sin^2 \alpha}.$$

Rezultă condițiile de posibilitate a problemei date:

$$P \geqslant Q \geqslant P \sin \alpha \text{ sau } \sin \alpha \leqslant \frac{Q}{P} \leqslant 1.$$

2.9. Un punct greu B de greutate P este suspendat de punctul fix A cu ajutorul firului AB și se reazemă pe suprafața unei sfere lucii de rază r. Distanța punctului A la suprafața sferei este $AC = d$, lungimea firului $AB = l$. Dreapta AO este verticală. Să se determine tensiunea T a firului și reacțiunea N a sferei.

Rezolvare. Se izolează punctul B înlocuind legăturile prin forțele de legătură. Reacțiunea $\bar{N}$ a sferei este, după raza OB, normală pe sferă.

Sistemul de axe ales pe figură dă rezultate mai simple.

Condițiile de echilibru (2.2) sînt:

$$X = -T \sin \alpha + N \sin \beta = 0$$
$$Y = T \cos \alpha + N \cos \beta - P = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde:

$$N = \frac{P \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} \qquad T = \frac{P \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} .$$

Teorema sinusurilor în triunghiul OAB se scrie:

$$\frac{l}{\sin \beta} = \frac{r}{\sin \alpha} = \frac{d + r}{\sin (\alpha + \beta)} \qquad \text{deci:}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{r}{d + r} \qquad \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{l}{d + r} ;$$

ținînd seama de aceste relații valorile lui T și N devin:

$$N = \frac{P r}{d + r} \qquad T = \frac{P l}{d + r} . \qquad (1)$$

Aceste rezultate se pot obține foarte ușor folosind metoda grafică.

Poligonul forțelor (fig. 2.9 *b*) este asemenea cu triunghiul OAB, deci laturile omoloage sînt proporționale:

$$\frac{P}{d + r} = \frac{N}{r} = \frac{T}{l}$$

de unde se regăsesc valorile (1) ale lui T și N.

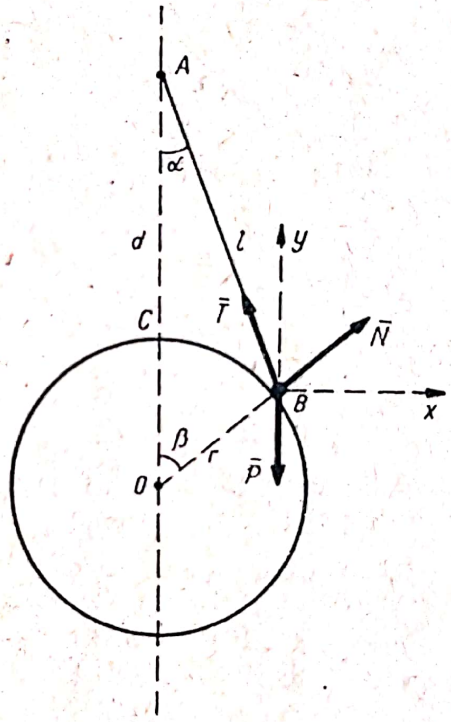


Fig. 2.9 *a*

Fig. 2.9 *b*

2.10. Pe un semicerc, luciu, de rază r se găsește un inel P a cărui greutate se neglijează. Inelul este atras de punctele A și B cu forțe elastice avînd aceeași constantă elastică k, ca în figura 2.10.

Se cere poziția de echilibru a inelului dată de unghiul θ.

Rezolvare. Eliberîndu-se inelul de legătura cu semicercul se introduce reacțiunea $\bar{N}$, avînd direcția normalei din planul cercului. Forțele elastice sînt:

$$F_1 = k \cdot PA = k \cdot 2 r \cos \frac{\theta}{2}$$

$$F_2 = k \cdot PB = k \cdot 2 r \sin \frac{\theta}{2} .$$

Ecuațiile de echilibru (2.2) sînt:

$$X = F_2 \cos\frac{\theta}{2} - F_1 \sin\frac{\theta}{2} = 0 \qquad (1)$$

$$Y = N - F_2 \sin\frac{\theta}{2} - F_1 \cos\frac{\theta}{2} = 0. \qquad (2)$$

Rezolvînd sistemul se observă că ecuația (2) dă: $N = 2kr$, iar ecuația (1 este identic satisfăcută. Acest rezultat arată că reacțiunea nu depinde de poziția inelului pe semicerc, iar echilibrul are loc în oricare punct de pe semicerc. Problema este o problemă de echilibru indiferent.

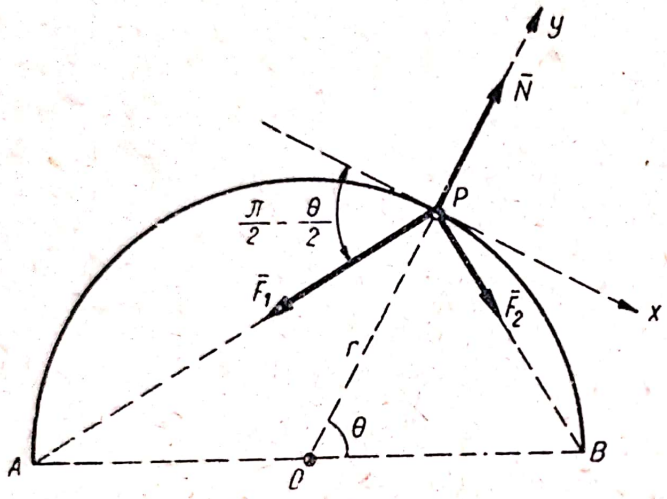


Fig. 2.10

Rezultatul acesta era de așteptat. În baza rezultatelor stabilite în problema 1.7 forțele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ puteau fi înlocuite prin rezultanta lor $\bar{F}$ orientată spre centrul maselor elastice. Cum constantele elastice sînt egale, centrul maselor elastice se găsește în mijlocul segmentului AB, adică în centrul O al cercului și deci forța $F = 2k \cdot PO = 2kr$ este orientată spre O, fiind normală pe cerc, indiferent de poziția inelului P pe cerc.

2.11. Pe un semicerc luciu situat într-un plan vertical se găsește un inel M de greutate neglijabilă. Inelul este legat cu două fire flexibile petrecute peste scripeții A și B de dimensiuni neglijabile, de capătul firelor fiind legate greutățile P și Q ca în figura 2.11.

Să se determine poziția de echilibru a inelului și reacțiunea cercului.

Rezolvare. Eliberînd inelul de legături, asupra lui acționează tensiunile $\bar{P}$ și $\bar{Q}$ din fire și reacțiunea normală $\bar{N}$, avînd direcția razei OM. Cu sistemul de axe din figură ecuațiile de echilibru (2.2) devin:

$$X = -P \sin\frac{\theta}{2} + Q \cos\frac{\theta}{2} = 0$$

$$Y = -P \cos\frac{\theta}{2} - Q \sin\frac{\theta}{2} + N = 0$$

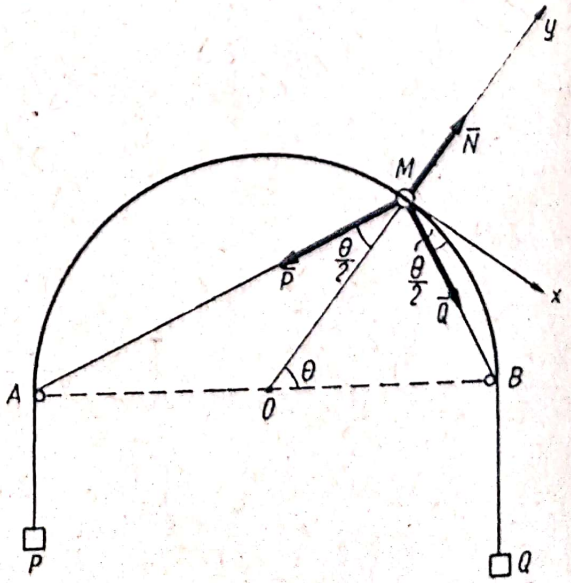


Fig. 2.11

de unde:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{Q}{P}$$

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2}\,.$$

2.12. Pe un cerc de sîrmă, luciu, de rază r aşezat într-un plan înclinat sub unghiul α faţă de orizontală se poate mişca un inel B de greutate P. Inelul este legat printr-un resort de punctul A, punctul cel mai de sus al cercului. Să se determine poziţia de echilibru a punctului şi reacţiunea cercului ştiind că tensiunea în resort este proporţională cu alungirea, constanta elastică fiind k şi lungimea lui în stare neîntinsă $l_0 = r$.

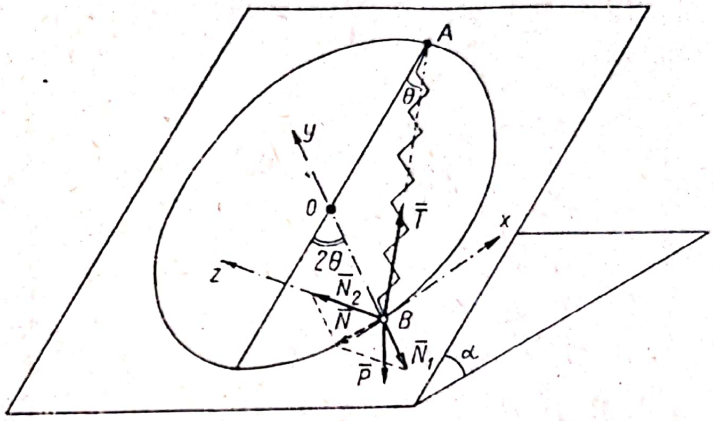


Fig. 2.12

Rezolvare. Forţele efectiv aplicate inelului sînt greutatea $\overline{P}$ şi tensiunea $\overline{T}$ a resortului:

$$T = k\Delta l = k\,(l - l_0)$$

unde l este lungimea resortului întins

$$l = 2\,r\,\cos\,\theta\,,$$

deci:

$$T = k\,r\,(2\,\cos\,\theta - 1).$$

Eliberăm inelul de legături înlocuindu-le prin reacţiunea normală $\overline{N}$ situată în planul normal la cerc. Cu sistemul de axe din figură axa Bx pe tangentă, axa By pe rază (normala principală) şi axa Bz normală pe planul înclinat (binormala), planul normal este planul yBz. În figura 2.12 forţa $\overline{N}$ este figurată prin componentele $\overline{N}_1$ şi $\overline{N}_2$ pe direcţiile normalei principale şi binormalei. Sistemul de forţe $\overline{P}$, $\overline{T}$, $\overline{N} = \overline{N}_1 + \overline{N}_2$ se echilibrează. Ecuaţiile de proiecţii (2.2) sînt:

$$X = -P\sin\alpha\sin 2\theta + T\sin\theta = 0 \qquad (1)$$

$$Y = -P\sin\alpha\cos 2\theta + T\cos\theta - N_1 = 0 \qquad (2)$$

$$Z = -P\cos\alpha + N_2 = 0. \qquad (3)$$

Din ecuaţia (1) se obţine înlocuind valoarea lui T:

$$\sin\theta\,(-2P\sin\alpha\cos\theta + 2kr\cos\theta - kr) = 0$$

deci poziţiile de echilibru sînt:

$$\sin\theta = 0 \text{ adică } \theta = 0 \text{ şi } \cos\theta = \frac{kr}{2\,(kr - P\sin\alpha)}\,.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind în ecuațiile (2) și (3) rezultă:

$\theta = 0 \quad N_1 = kr - P\sin\alpha \qquad N_2 = P\cos\alpha$

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \sqrt{P^2 + k^2r^2 - 2krP\sin\alpha}$$

$$\theta = \arccos\frac{kr}{2(kr - P\sin\alpha)} \qquad N_1 = P\sin\alpha \qquad N_2 = P\cos\alpha \qquad N = P.$$

2.13. Un punct M silit să rămînă pe parabola $y^2 = 2px$ este supus unei forțe $\bar{F}$ a cărei proiecție pe axa Ox este constantă și egală cu P.

Să se determine scalarul forței F în funcție de abscisa x astfel ca punctul M să fie în echilibru în orice poziție a sa pe curbă.

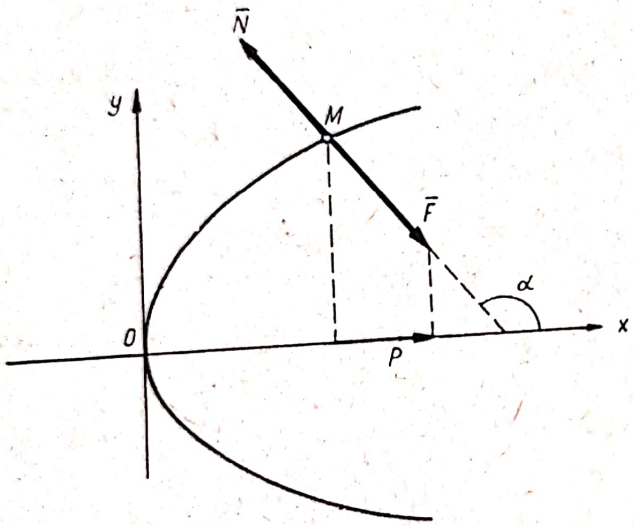


Fig. 2.13

Rezolvare. Forțele care acționează asupra punctului M sînt $\bar{F}$ și reacțiunea $\bar{N}$. Condiția de echilibru este:

$$\bar{F} + \bar{N} = 0;$$

proiectînd pe axele de coordonate:

$$X = P + N\cos\alpha = 0$$

$$Y = -F\sin\alpha + N\sin\alpha = 0.$$

Rezolvînd sistemul și ținînd seama că: $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{y'} = -\frac{dx}{dy}$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}, \text{ cum } y^2 = 2px, \ \frac{dx}{dy} = \frac{y}{p} = \sqrt{\frac{2x}{p}}$$

rezultă:

$$F = P\sqrt{1 + \frac{2x}{p}}.$$

2.14. Pe un plan înclinat sub unghiul α se află un punct O de greutate P asupra căruia acționează forța $\bar{Q}$ al cărui suport formează cu linia de cea mai mare pantă a planului unghiul $\beta\left(\beta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. Cunoscînd unghiul de frecare φ dintre punct și plan, pentru ce valori ale forței Q este posibil echilibrul punctului O?

Rezolvare. *a*) Presupunem că sub acțiunea forțelor efectiv aplicate $\bar{P}$ și $\bar{Q}$ punctul O are tendința de a luneca în sus. Eliberăm punctul de legă-

turi introducînd forțele de legătură, reacțiunea normală $\bar{N}$ și forța de frecare $\bar{T}$ orientată în jos (v. fig. 2.14 *a*).

Condițiile de echilibru (2.2) și (2.3) sînt:

$$X = Q\cos\beta - P\sin\alpha - T = 0 \quad (1)$$

$$Y = Q\sin\beta - P\cos\alpha + N = 0 \quad (2)$$

$$T \leqslant N\,\mathrm{tg}\,\varphi. \quad (3)$$

Din ecuațiile (1) și (2) rezultă:

$$\begin{aligned} T &= Q\cos\beta - P\sin\alpha \\ N &= P\cos\alpha - Q\sin\beta \end{aligned} \quad (4)$$

și înlocuind în inegalitatea (3) se obține:

$$Q \leqslant P\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)} \quad (5)$$

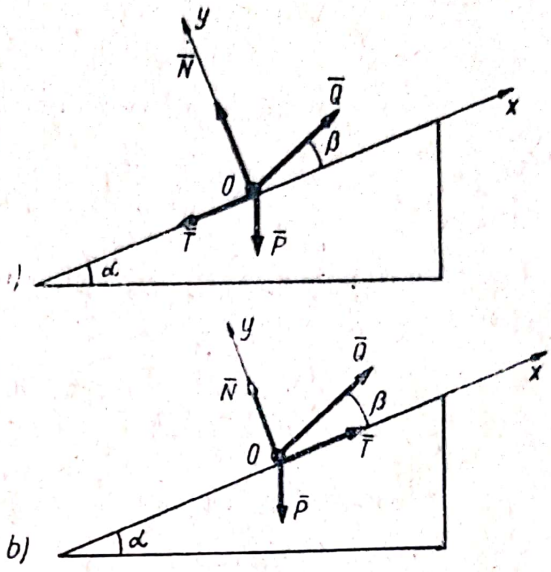


Fig. 2.14

dacă $|\beta - \varphi| < \frac{\pi}{2}$, iar pentru $|\beta - \varphi| > \frac{\pi}{2}$ lunecare în sus nu poate apărea.

b) Dacă tendința de lunecare este în jos, sensul forței $\bar{T}$ va fi schimbat. Ecuațiile (2) și (3) rămîn neschimbate, iar ecuația (1) de proiecție pe axa Ox devine:

$$X = Q\cos\beta - P\sin\alpha + T = 0 \quad (6)$$

de unde:

$$T = P\sin\alpha - Q\cos\beta.$$

Înlocuind această expresie a lui T și expresia (4) a lui N în inegalitatea (3) se obține:

$$Q \geqslant \frac{P\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\beta+\varphi)}, \quad (7)$$

pentru $|\beta + \varphi| < \frac{\pi}{2}$, iar pentru $\alpha > \varphi$ lunecare în jos nu poate apărea.

Legătura fiind unilaterală, ca punctul să nu se desprindă de pe plan, trebuie îndeplinită condiția (2.8) $N > 0$ adică:

$$P\cos\alpha - Q\sin\beta > 0$$

$$Q \leqslant \frac{P\cos\alpha}{\sin\beta}; \quad (8)$$

Comparînd inegalitățile (5) și (8) rezultă:

$$\frac{P\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)} \gtreqless \frac{P\cos\alpha}{\sin\beta}, \text{ dacă } \alpha + \beta \gtreqless \frac{\pi}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Condițiile de echilibru sînt:

$$\text{pentru } \alpha + \beta < \frac{\pi}{2} : \frac{P \sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)} \leqslant Q \leqslant \frac{P \sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)}$$

echilibrul rupîndu-se prin lunecarea punctului.

$$\text{Pentru } \alpha + \beta > \frac{\pi}{2} : \frac{P \cos \alpha}{\sin \beta} \leqslant Q \leqslant \frac{P \sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)}$$

punctul putînd părăsi poziția de echilibru prin desprindere de plan sau prin lunecare în jos.

Observație. Valoarea limită a lui Q din cazul *b*), dată de inegalitatea (7), se putea găsi și cu ajutorul relațiilor (1)... (3) corespunzătoare cazului *a*). În cazul lunecării în jos, scalarul forței T din ecuația (1) se putea considera negativ și atunci inegalitatea (3) se putea scrie:

$$T \geqslant N \operatorname{tg}(-\varphi).$$

Toate calculele efectuate în cazul *a*) erau deci valabile și în cazul *b*), dacă înlocuiam unghiul φ prin $-\varphi$ și schimbam sensul inegalității. Astfel din inegalitatea (5) se deduce inegalitatea (7).

2.15. Pentru ce valori ale coeficientului de frecare f este necesară o forță mai mică pentru a ridica un corp pe verticală în sus decît pentru a-l ridica pe linia de cea mai mare pantă a planului sub unghiul α față de orizont?

Rezolvare. Pentru a ridica corpul pe verticală în sus este necesară o forță egală cu greutatea P a corpului. Va trebui deci ca sub acțiunea unei forțe Q, dirijată pe linia de cea mai mare pantă a planului și egală în modul cu P, corpul să nu se ridice, adică să fie în echilibru.

Folosim metodele geometrice. Forțele efectiv aplicate sînt $\overline{P}$ și $\overline{Q}$, iar rezultanta forțelor efectiv aplicate

$$\overline{F} = \overline{P} + \overline{Q}$$

formează un unghi egal cu $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ cu forțele $\overline{P}$ și $\overline{Q}$ (căci $Q = P$).

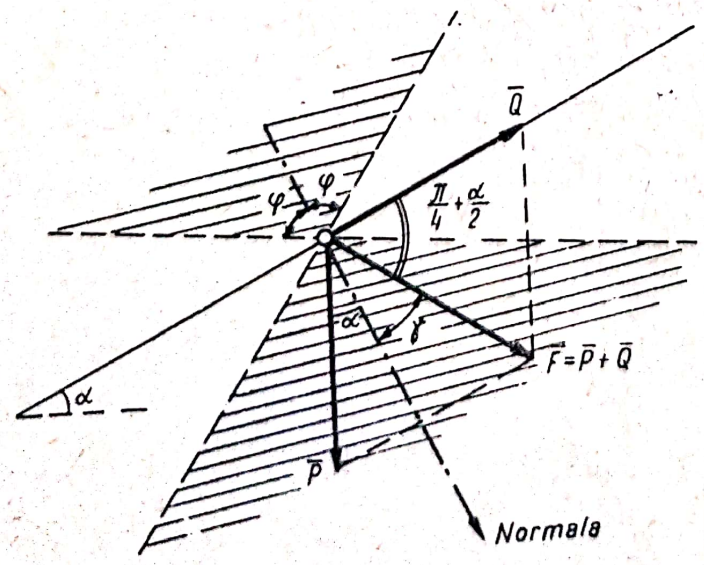


Fig. 2.15

Unghiul dintre suportul lui $\overline{F}$ și normala la plan va fi:

$$\gamma = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Condiția de echilibru (2.5) cu notațiile acestei probleme este:

$$\gamma \leqslant \varphi$$

deci unghiul de frecare

$$\varphi \geqslant \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

iar coeficientul de frecare căutat este:

$$f \geqslant \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

2.16. Un punct greu M se găsește pe o sferă aspră avînd unghiul de frecare φ. Să se determine pozițiile de echilibru ale punctului.

Rezolvare. Folosim metoda geometrică. Rezultanta forțelor efectiv aplicate este greutatea P, singura forță efectiv aplicată. Notînd cu λ unghiul dintre planul orizontal și raza OM care are direcția normalei la sferă, suportul forței $\bar{P}$ formează unghiurile $\alpha = \frac{\pi}{2} - \lambda$ și $\alpha' = \frac{\pi}{2} + \lambda$ cu normala la sferă.

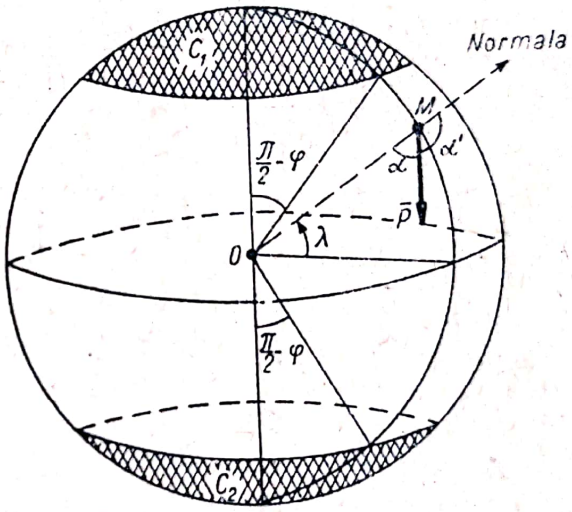


Fig. 2.16

Condiția (2.5) este:

$$\frac{\pi}{2} - \lambda \leqslant \varphi \quad \text{și} \quad \frac{\pi}{2} + \lambda \leqslant \varphi$$

deci:

$\lambda \geqslant \frac{\pi}{2} - \varphi$, relație ce definește punctele calotei superioare C_1 a sferei și $\lambda \leqslant -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$, relație ce definește punctele calotei inferioare C_2 a sferei.

Dacă legătura este bilaterală echilibrul este posibil pentru punctele calotelor C_1 și C_2.

Un calcul elementar arată că în cazul legăturii unilaterale, dacă punctul se găsește pe fața exterioară a sferei, echilibrul este posibil pe calota C_1, iar dacă punctul se găsește pe fața interioară a sferei, echilibrul este posibil pe calota C_2.

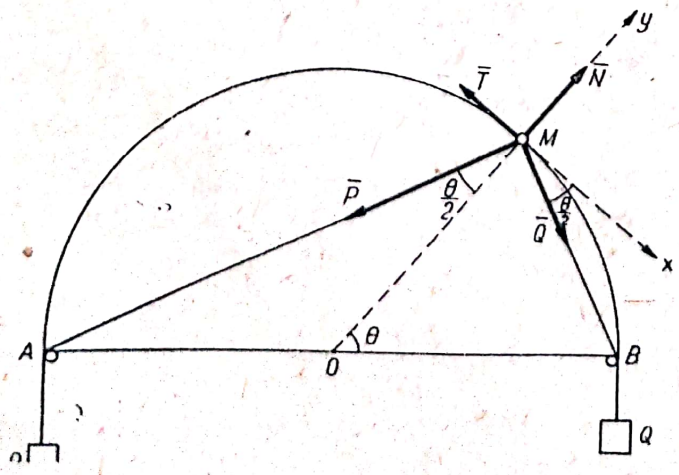


Fig. 2.17 *a*

2.17. Să se rezolve problema 2.11 dacă se presupune că semicercul este aspru, avînd unghiul de frecare φ.

Rezolvare. Presupunem că inelul lunecă spre B. Eliberînd inelul de legături, asupra lui acționează forțele efectiv aplicate $\overline{P}$ și $\overline{Q}$ și reacțiunile $\overline{N}$ și $\overline{T}$ orientate ca în figura 2.17 *a*. Cu sistemul de axe ales condițiile de echilibru (2.2) și (2.3) sînt:

$$X = -P \sin\frac{\theta}{2} + Q \cos\frac{\theta}{2} - T = 0 \tag{1}$$

$$Y = -P \cos\frac{\theta}{2} - Q \sin\frac{\theta}{2} + N = 0 \tag{2}$$

$$T \leqslant N \operatorname{tg} \varphi. \tag{3}$$

Rezolvînd ecuațiile (1) și (2) în raport cu T și N și introducîndu-le în inegalitatea (3), obținem succesiv:

$$P \sin\frac{\theta}{2} - Q \cos\frac{\theta}{2} \leqslant \operatorname{tg}\varphi \left(P \cos\frac{\theta}{2} + Q \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$P \sin\left(\frac{\theta}{2} - \varphi\right) \leqslant Q \cos\left(\frac{\theta}{2} - \varphi\right),$$

sau:

$$\theta \leqslant \theta_0 + 2\varphi \tag{4}$$

unde:

$$\theta_0 = 2 \operatorname{arc\,tg}\frac{Q}{P} \tag{5}$$

este unghiul θ ce corespunde poziției de echilibru fără frecare (v. problema 2.11). Dacă inelul lunecă spre A folosind observația de la problema 2.14 din inegalitatea (4) se deduce:

$$\theta \geqslant \theta_0 - 2\varphi$$

deci condițiile de echilibru sînt:

$$\theta_0 - 2\varphi \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + 2\varphi$$

echilibrul fiind posibil pe un arc de cerc corespunzător unui unghi la centru 4φ, mijlocul acestui arc de cerc corespunzînd poziției de echilibru fără frecare. Problema se poate rezolva și geometric. Rezultanta forțelor efectiv aplicate:

$$\overline{F} = \overline{P} + \overline{Q}$$

formează unghiul $\theta_0/2$ cu forța P deoarece forțele $\overline{P}$ și $\overline{Q}$ sînt perpendiculare și din relația (5) $\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2} = \frac{Q}{P}$.

Scanned with OKEN Scanner

Unghiurile β și β' formate de suportul lui F cu tangenta la semicerc sînt (v. fig. 2.17 *b*):

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} + \frac{\theta}{2}$$

$$\beta' = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \frac{\theta_0}{2}.$$

Din condiția (2.6):

$$\beta \geqslant \frac{\pi}{2} - \varphi \qquad \beta' \geqslant \frac{\pi}{2} - \varphi$$

și deci:

$$\theta_0 - 2\varphi \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + 2\varphi .$$

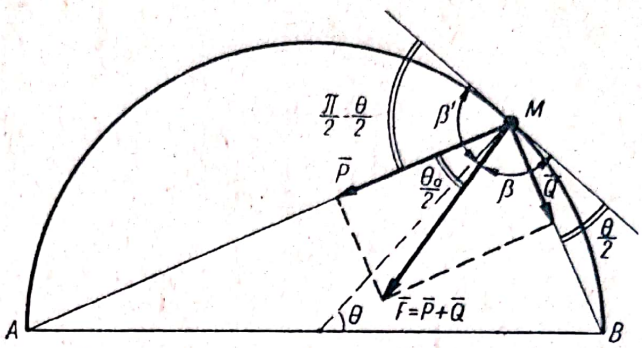


Fig. 2.17 *b*

2.18. Pe un plan aspru, avînd coeficientul de frecare f, înclinat sub unghiul α față de orizont se găsește un punct greu M de greutate P. Punctul M este atras de un punct fix O cu o forță elastică $\bar{F}$, constanta elastică fiind k. Să se determine pozițiile de echilibru ale punctului.

Rezolvare. Alegem sistemul de axe din figura 2.18, cu originea în punctul O, axa Ox — linia de cea mai mare pantă, Oy — orizontala planului, Oz — normala la plan. Punctul M va avea coordonatele x și y.

Forțele care acționează asupra punctului sînt greutatea $\bar{P}$, forța elastică $\bar{F}$, unde:

$$\bar{F} = k \cdot \overline{MO} = -k\bar{r} = -k(x\bar{i} + y\bar{j})$$

și reacțiunea avînd componenta $\bar{N}$ normală la plan și componenta $\bar{T}$ cuprinsă în plan (planul xOy). Notînd cu T_x, T_y proiecțiile forței de frecare, ecuațiile (2.2) se pot scrie:

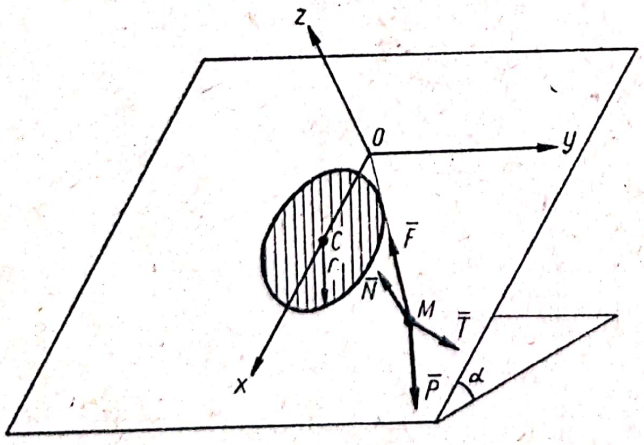


Fig. 2.18

$$X = P \sin\alpha - k\,x + T_x = 0$$

$$Y = -ky + T_y = 0 \qquad (1)$$

$$Z = -P\cos\alpha + N = 0.$$

Condiția (2.3) este:

$$T \leqslant f\,N . \qquad (2)$$

Cum:

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2}$$

rezolvînd ecuațiile (1) în raport cu T_x, T_y, N și introducînd în ecuația (2) se obține:

$$(kx - P\sin\alpha)^2 + k^2y^2 \leqslant f^2 P^2 \cos^2\alpha$$

sau

$$\left(x - \frac{P\sin\alpha}{k}\right)^2 + y^2 \leqslant \left(\frac{f\,P\cos\alpha}{k}\right)^2 \qquad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

deci pozițiile de echilibru ale punctului sînt punctele interioare și pe frontiera cercului:

$$\left(x - \frac{P \sin \alpha}{k}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{f P \cos \alpha}{k}\right)^2$$

avînd centrul $C\left(\frac{P \sin \alpha}{k}, 0\right)$ și raza $r = \frac{f P \cos \alpha}{k}$ (v. fig. 2.18).

C. PROBLEME NEREZOLVATE

2.19. Scripetele C, avînd atîrnată o lampă de greutate P, poate aluneca pe cablul flexibil ACB. Capetele A și B ale cablului sînt fixate pe aceeași orizontală la distanța $AB = 2a$. Cunoscînd lungimea $2l\,(l > a)$ a cablului să se determine tensiunea în cablu și poziția de echilibru a scripetelui.

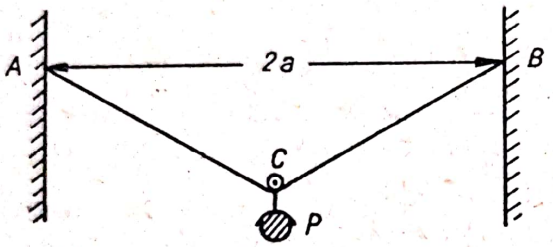


Fig. 2.19

Răspuns. $T = \frac{Pl}{2\sqrt{l^2 - a^2}}$, $AC = CB$.

2.20. O sferă de greutate P este prinsă printr-un fir de punctul fix B, iar în punctul A se sprijină pe un plan înclinat luciu. Să se determine reacțiunea $\bar{N}$ în punctul A și tensiunea T a firului, unghiurile α și β fiind cunoscute.

Răspuns. $T = \frac{P \cos \alpha}{\cos(\alpha - \beta)}$ $\qquad N = P \frac{\sin \beta}{\cos(\alpha - \beta)}$.

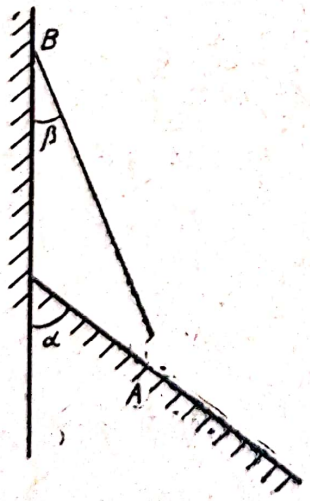


Fig. 2.20

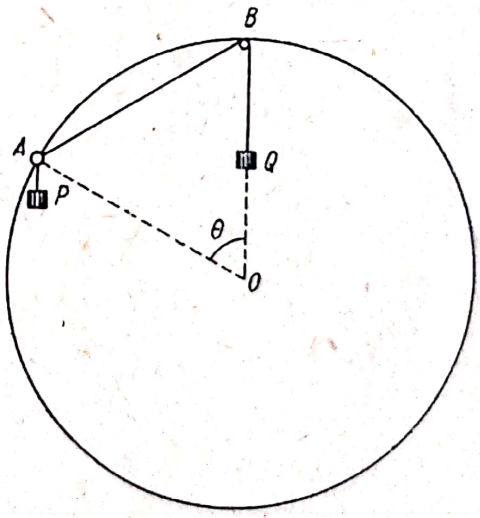


Fig. 2.21

2.21. Un inel A poate aluneca fără frecare pe un cerc de sîrmă situat într-un plan vertical. De inel este suspendată o greutate P și legat un fir ABQ, trecut peste scripetele fix B, situat în punctul cel mai de sus

al cercului. Firul poartă la capăt o greutate Q. Să se determine poziția de echilibru a inelului și reacțiunea N a cercului.

Răspuns. Problema admite două soluții: $\theta = \pi$, $N = P - Q$ și $\theta = 2 \arcsin \frac{Q}{2P}$, $N = P$.

2.22. Într-un tub înclinat sub unghiul α față de orizontală se găsește un punct greu A de greutate P. Punctul A este legat cu un resort de capătul de sus O al tubului. Știind că tensiunea din resort este $F = k(l - l_0)$, unde k — constanta elastică a resortului și l_0 — lungimea resortului în stare neîntinsă sînt date, iar l este lungimea resortului și cunoscînd coeficientul de frecare f se cer pozițiile de echilibru ale punctului.

Răspuns. $l_0 + \frac{P(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{k} \leqslant l \leqslant l_0 + \frac{P(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{k}$

2.23. Un punct M se poate mișca pe un cerc de rază r, punctul fiind atras de punctul fix A al cercului cu o forță elastică $\overline{F} = k \cdot \overline{MA}$, unde k este constanta elastică. Cunoscînd unghiul de frecare φ dintre punct și cerc se cer pozițiile de echilibru ale punctului. Se neglijează greutatea punctului. Să se rezolve problema și cu ajutorul metodei conului de frecare.

Răspuns. $\theta = \pi$ și $-2\varphi \leqslant \theta \leqslant 2\varphi$.

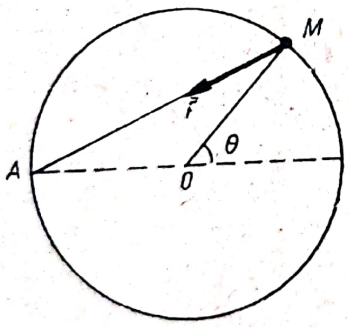


Fig. 2.23

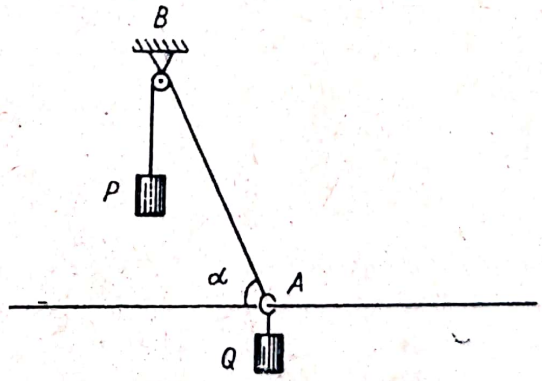


Fig. 2.24

2.24. Pe o bară orizontală se poate mișca un inel A de care este atîrnată o greutate Q și este legat un fir petrecut peste un scripete B, de capătul firului atîrnînd greutatea P. P, α și φ (unghiul de frecare dintre bară și inel) fiind date, pentru ce valori ale greutății Q este posibil echilibrul în situația din figură?

Indicație. Reamintim că în relația (2.3) $T \leqslant N \operatorname{tg}\varphi$, prin T și N se înțeleg modulele forțelor. Se vor obține două soluții:

$$Q \leqslant \frac{P\cos(\alpha + \varphi)}{\sin\varphi} \qquad Q \geqslant \frac{P\cos(\alpha - \varphi)}{\sin\varphi}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul III

MOMENTUL UNEI FORȚE FAȚĂ DE UN PUNCT ȘI FAȚĂ DE O AXĂ

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Prin momentul unei forțe $\overline{F}$ în raport cu un punct O (fig. 3. *a*) se înțelege produsul vectorial dintre vectorul de poziție $\overline{r}$ al punctului de aplicație al forței față de punctul O și vectorul $\overline{F}$:

$$\overline{M}_0(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F} \qquad (3.1)$$

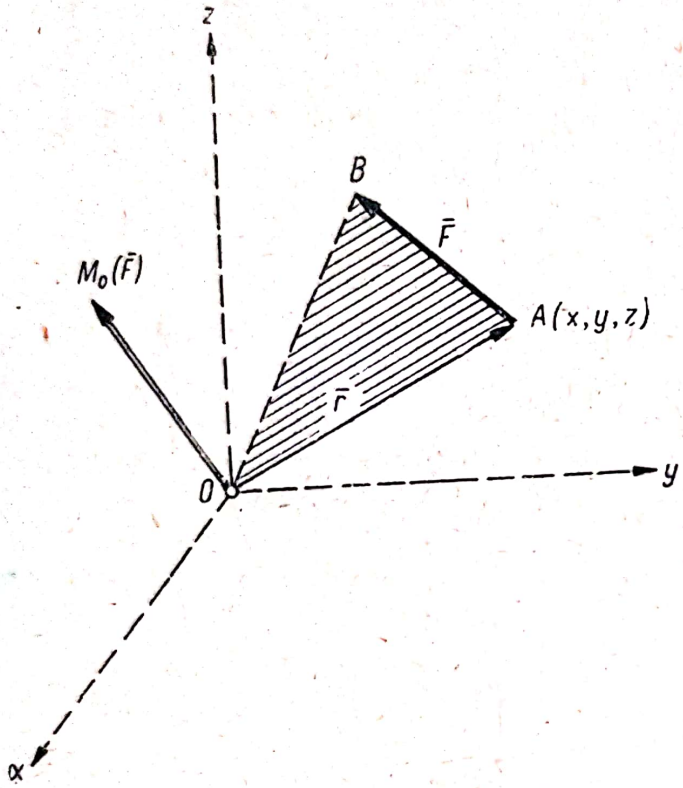


Fig. 3. *a*

adică un vector aplicat în punctul O, perpendicular pe planul determinat de punctul O și de suportul vectorului $\overline{F}$, avînd sensul, astfel încît un șurub drept acționat de către $\overline{F}$ înaintează în sensul vectorului moment, iar modulul său este egal cu produsul $r \cdot F \cdot \sin \sphericalangle(\overline{r}, \overline{F})$, adică este egal cu produsul dintre modulul forței $\overline{F}$ și distanța d de la punct la suportul forței:

$$|\overline{M}_0(\overline{F})| = F \cdot d. \qquad (3.2)$$

Momentul unei forțe în raport cu un punct este invariabil cînd forța își deplasează punctul de aplicație pe suportul ei.

Momentul unei forțe în raport cu un punct este nul cînd suportul forței trece prin punctul în raport cu care se calculează momentul.

Expresia analitică a momentului unei forțe $\overline{F} = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k}$ în raport cu un punct O se obține calculînd produsul vectorial:

$$\overline{M}_0(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = (yZ - zY)\overline{i} + (zX - xZ)\overline{j} + (xY - yX)\overline{k} \qquad (3.3)$$

în care $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$.

Cînd se ia ca plan xOy planul determinat de o forță și punctul în raport cu care se calculează momentul ei, expresia (3.3) devine:

$$\overline{M}_0(\overline{F}) = (xY - yX)\overline{k} \qquad (3.4)$$

momentul forței în raport cu punctul O neavînd decît o singură componentă perpendiculară pe planul xOy, al cărei scalar este:

$$M_0 = xY - yX. \qquad (3.5)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația (3.5) poate fi considerată drept ecuația suportului unei forțe $\overline{F}(X, Y)$, situate în planul xOy.

Momentul unei forțe $\overline{F}$ în raport cu o axă Δ (M_Δ) se obține proiectînd pe axa Δ momentul forței în raport cu un punct oarecare de pe axă (fig. 3. *b*).

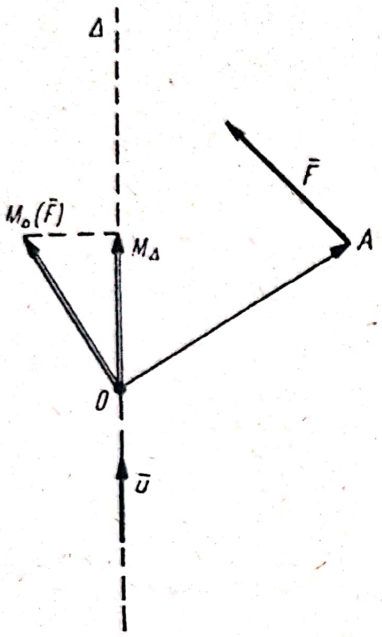


Fig. 3. *b*

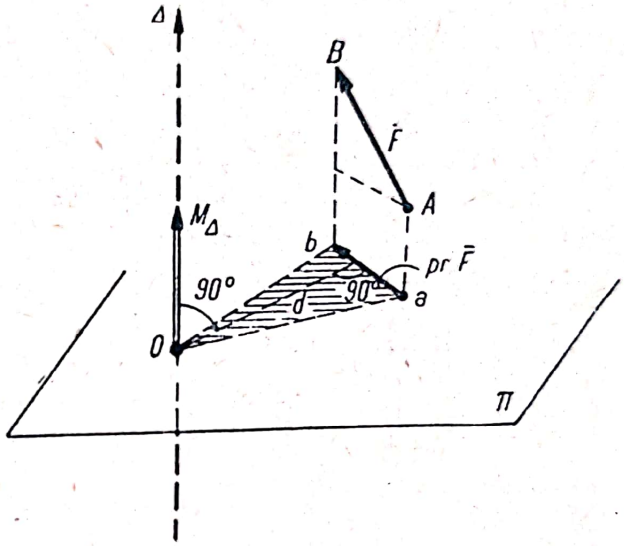


Fig. 3. *c*

Notînd cu $\overline{r}$ vectorul de poziție al originii forței F față de punctul arbitrar O de pe axă și cu $\overline{u}$ versorul axei, momentul M_Δ are expresia:

$$M_\Delta = (\overline{r} \times \overline{F}) \cdot \overline{u} = (\overline{r}, \overline{F}, \overline{u}) . \tag{3.6}$$

Se poate arăta că momentul forței $\overline{F}$ față de axa Δ este egal cu scalarul momentului proiecției forței $\overline{F}$ pe un plan π perpendicular pe axa Δ în raport cu punctul O, unde axa înțeapă acest plan (fig. 3. *c*):

$$M_\Delta = M_0 (\text{pr}\, \overline{F}) . \tag{3.7}$$

Momentul unei forțe în raport cu o axă este invariabil cînd forța alunecă pe suportul ei.

Momentul unei forțe $\overline{F}$ în raport cu o axă este nul cînd forța și axa sînt coplanare (paralele sau concurente).

B. PROBLEME REZOLVATE

3.1. Asupra unui cub de muchie egală cu a acționează o forță de modul P dirijată ca în figura 3.1 *a*.

Să se calculeze momentele acestei forțe în raport cu toate vîrfurile cubului și să se reprezinte vectorii moment.

Rezolvare. $\overline{M}_G(\overline{P}) = \overline{M}_H(\overline{P}) = 0$.

Conform (3.2):

$$|\overline{M}_C(\overline{P})| = CG \cdot P = aP.$$

Vectorul $\overline{M}_C(\overline{P})$ este aplicat în punctul C. Direcţia: $\perp$ pe planul $CDHG$. Sensul momentului se află cu ajutorul regulii şurubului.

Se aşază un şurub drept în punctul C pe direcţia momentului. Se roteşte şurubul în sensul în care forţa $\overline{P}$ tinde să-şi rotească vectorul de poziţie $\overline{CG}$. *Sensul de înaintare* al şurubului drept (sens invers axei Oy din figura 3.1 *b*) este sensul momentului $\overline{M}_C$.

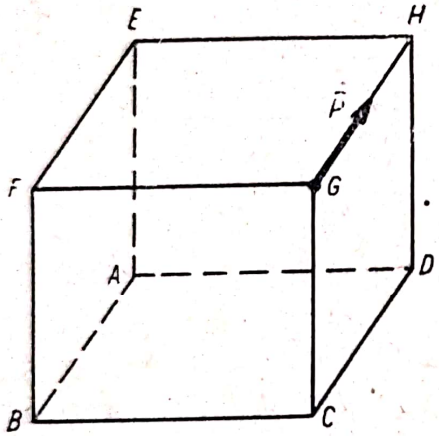


Fig. 3.1 *a*

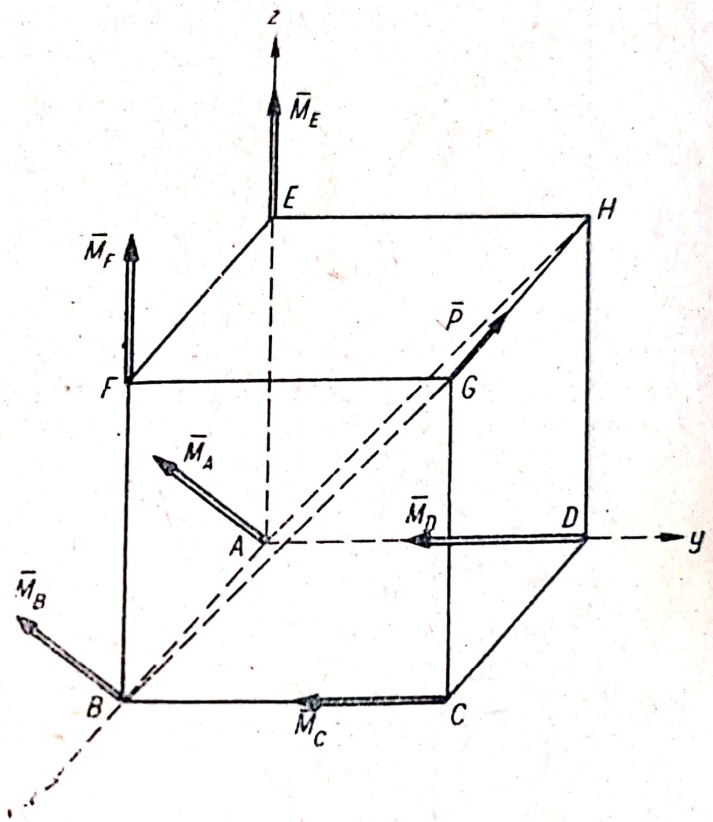


Fig. 3.1 *b*

Momentul are sensul în aşa fel încît privind din vîrful său, forţa are tendinţa de a-şi roti vectorul de poziţie în sensul invers acelor de ceasornic.

În cele ce urmează vom nota pe scurt $\overline{M}_D(\overline{P}) = \overline{M}_D$; $|\overline{M}_D(\overline{P})| = M_D$ etc. $M_D = aP$ [conform (3.2)], direcţia $\perp$ pe planul $CDHG$, sensul invers axei Oy:

$M_F = FG \cdot P = aP$ $\perp$ pe planul $EFGH$, sensul axei Oz

$M_E = EH \cdot P = aP$ $\perp$ pe planul $EFGH$, sensul axei Oz

$M_B = BG \cdot P = aP\sqrt{2}$ $\perp$ pe planul $ABGH$, sens ca în figura 3.1 *b*

$M_A = AH \cdot P = aP\sqrt{2}$ $\perp$ pe planul $ABGH$; sens ca în figura 3.1 *b*.

Pentru calculul vectorilor moment se poate utiliza şi formula (3.1). Astfel, de exemplu:

$$\overline{M}_A = \overline{AG} \times \overline{P} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a & a & a \\ -P & 0 & 0 \end{vmatrix} = -Pa\overline{j} + Pa\overline{k}.$$

Vectorul $\overline{M}_A$ are componentele $-aP$ pe axa Oy și aP pe axa Ox. Are modulul $M_A = \sqrt{P^2a^2 + P^2a^2} = Pa\sqrt{2}$ la fel cu cel stabilit mai sus.

3.2. O forță $\overline{F}$ de 9 tf se află pe dreapta definită de segmentul AB și este orientată de la A spre B. Să se afle momentele forței $\overline{F}$ în raport cu punctele O, C și D, știind că punctele date au următoarele coordonate (exprimate în metri):

$A\,(7,\ 4,\ 2)$, $B\,(0,\ 0,\ 6)$,
$C\,(1,\ 2,\ 0)$, $D\,(0,\ 4,\ 8)$.

Rezolvare. Deoarece:

$$\overline{F} = 9\,\overline{AB^\circ} = 9\frac{-7\bar{i} - 4\bar{j} + 4\bar{k}}{\sqrt{49 + 16 + 16}} =$$

$$= -7\bar{i} - 4\bar{j} + 4\bar{k}$$

unde $\overline{AB^\circ}$ este versorul direcției AB și

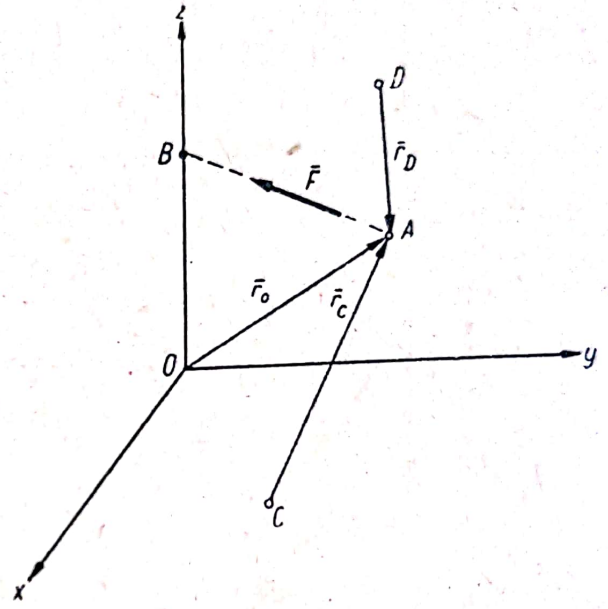


Fig. 3.2

$$\overline{r}_0 = \overline{OA} = 7\bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}$$
$$\overline{r}_C = \overline{CA} = 6\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$$
$$\overline{r}_D = \overline{DA} = 7\bar{i} \qquad - 6\bar{k}$$

conform definiției (3.1) cele trei momente căutate vor fi:

$$\overline{M}_0(\overline{F}) = \overline{r}_0 \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 7 & 4 & 2 \\ -7 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 24\,\bar{i} - 42\,\bar{j}$$

$$|\overline{M}_0| = \sqrt{24^2 + 42^2} \approx 48{,}4 \text{ tfm}$$

$$\overline{M}_C(\overline{F}) = \overline{r}_C \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6 & 2 & 2 \\ -7 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 16\,\bar{i} - 38\,\bar{j} - 10\,\bar{k}$$

$$|\overline{M}_C| = \sqrt{16^2 + 38^2 + 10^2} \approx 42{,}4 \text{ tfm}$$

$$\overline{M}_D(\overline{F}) = \overline{r}_D \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 7 & 0 & -6 \\ -7 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -24\,\bar{i} + 14\bar{j} - 28\,\bar{k}$$

$$|\overline{M}_D| = \sqrt{24^2 + 14^2 + 28^2} \approx 39{,}4 \text{ tfm}$$

3.3. Să se determine forța al cărei moment în raport cu un punct O este de 12 kgfm și ale cărei proiecții pe două drepte perpendiculare, trecînd prin O și situate în același plan cu forța, sînt de 3 kgf și 4 kgf.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Conform (3.5) ecuația suportului forței (luînd cele două drepte perpendiculare ca axe Ox și Oy) este:

$$4x - 3y = 12. \qquad (1)$$

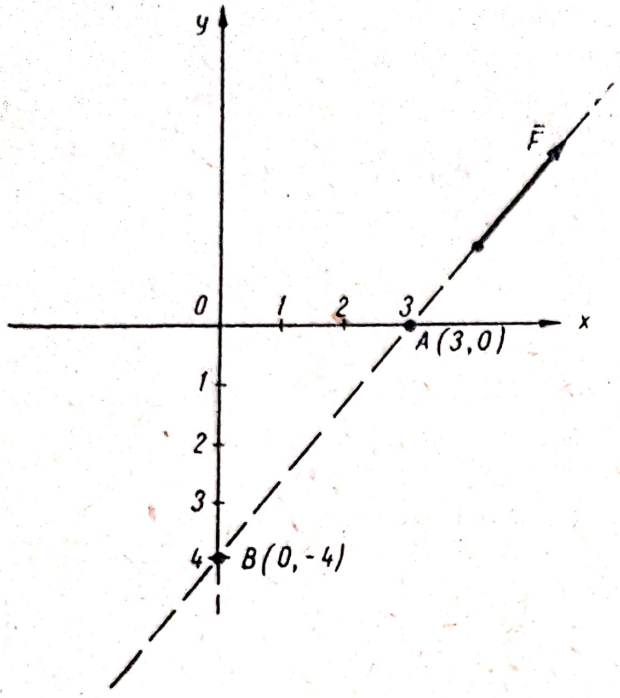


Fig. 3.3

Modulul forței este:

$$F = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ kg}.$$

Sensul forței este astfel ales încît să aibă ambele proiecții pozitive, astfel considerate inițial la alegerea axelor.

În figura 3.3 s-a reprezentat dreapta suport dată de ecuația (1) și forța $\overline{F}$.

3.4. O forță de 8 kgf are, în raport cu două puncte O și O' situate în același plan cu forța, momente de $\pm$ 12 kgfm și $\pm$ 8 kgfm; să se determine forța și suportul ei (sensul pozitiv pentru momente este sensul acelor de ceasornic).

Rezolvare. Ținînd seama de (3.2):

$$M_0 = F \cdot d \qquad d = \frac{M_0}{F} = \frac{12}{8} = 1{,}5 \qquad M_0' = F \cdot d' \qquad d' = \frac{M_0'}{F} = \frac{8}{8} = 1\,.$$

Orice forță de mărimea dată (8 kgf) tangentă la cercul cu centrul în O și cu raza egală cu 1,5 m are $M_0 = 12$ kgfm; orice forță de mărimea

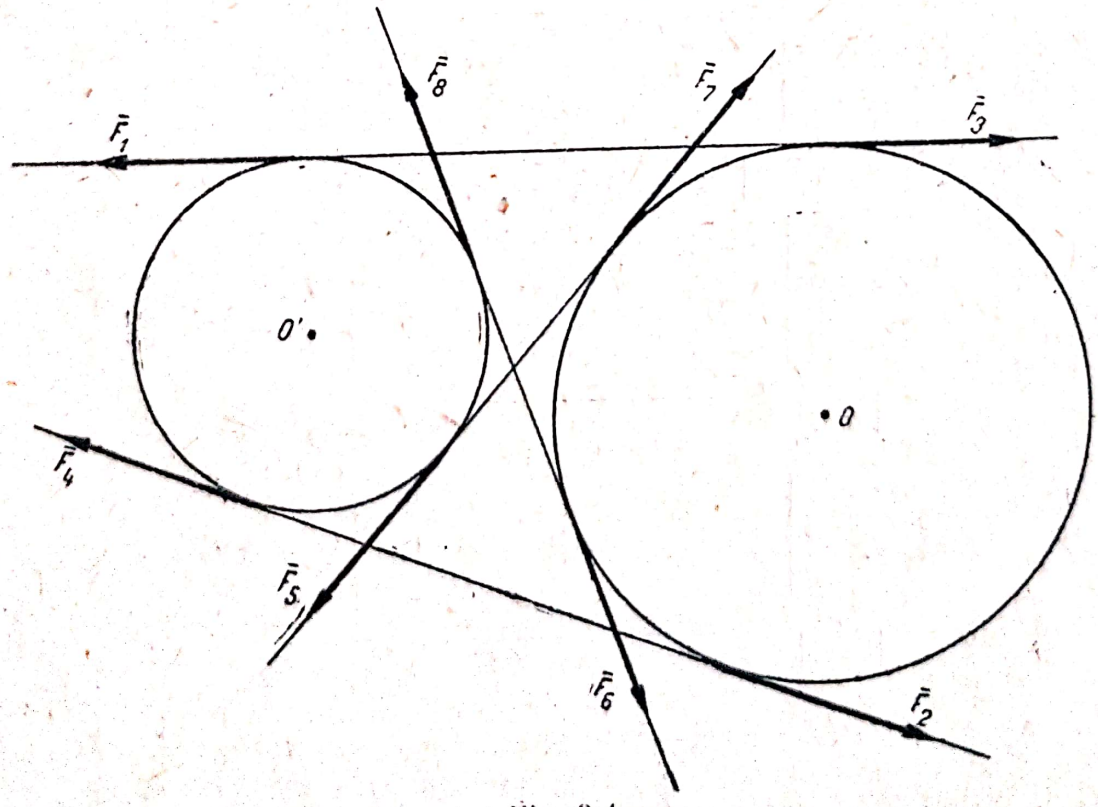


Fig. 3.4

dată tangentă la cercul cu centrul în O' și cu raza egală cu 1 m are $M_0' = 8$ kgfm. Pentru ca $M_0 = \pm 12$ și $M_0' = \pm 8$ simultan, forța $\overline{F}$ trebuie să fie situată pe una dintre tangentele comune la cele două cercuri. Alegînd pentru momente ca sens pozitiv sensul invers acelor de ceasornic, pentru valorile pozitive ale momentelor sînt două soluții: $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ (fig. 3.4); pentru valorile negative sînt de asemenea două soluții: $\overline{F}_3$ și $\overline{F}_4$. Dacă M_0 este pozitiv și M_0' este negativ există soluțiile $\overline{F}_5$ și $\overline{F}_6$ și în sfîrșit pentru M_0 negativ și M_0' pozitiv soluțiile $\overline{F}_7$ și $\overline{F}_8$. Evident ca soluțiile să existe trebuie ca $OO' > d - d' = 0{,}5$ m (altfel cercurile nu pot avea tangente comune, cercul O' fiind interior cercului O), iar pentru ca ultimele patru soluții $\overline{F}_5$, $\overline{F}_6$, $\overline{F}_7$, $\overline{F}_8$ să existe trebuie ca $OO' > d + d' = 2.5$ m (altfel cercurile se intersectează și nu pot avea tangente interioare).

Evident problema se poate rezolva și pe cale analitică, folosind relația (3.5), concluziile care se obțin fiind bineînțeles aceleași.

3.5. Un fir de lungime a, legat de un stîlp, sub un unghi α este întins cu o forță, a cărei mărime este P. Să se determine momentul acestei forțe în raport cu punctul A (moment de răsturnare). Pentru ce valoare a unghiului α acest moment atinge valoarea maximă?

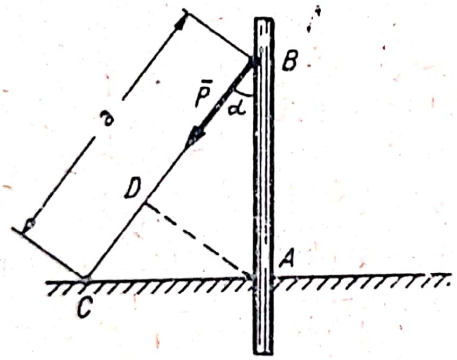


Fig. 3.5

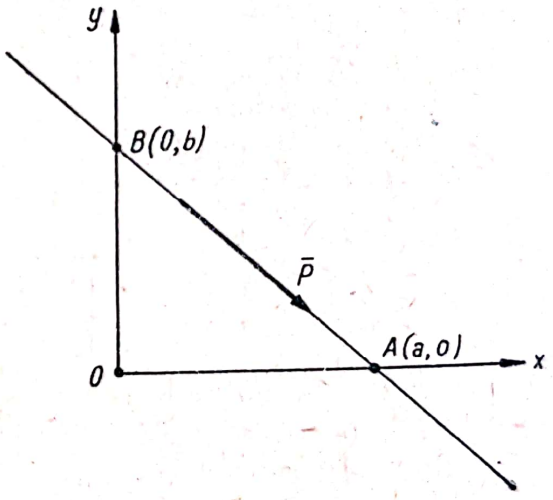


Fig. 3.6

Rezolvare. Alegem ca sens pozitiv pentru scalarul momentului sensul invers acelor de ceasornic.

Aplicînd formula (3.2) în care $d = AD = a \cos\alpha \cdot \sin\alpha$

$$M_A = P \cdot a \cos\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} Pa \sin 2\alpha.$$

Valoarea maximă a lui M_A este dată de:

$$\sin 2\alpha = 1 \qquad \alpha = 45°$$

$$M_{A\,max} = \frac{Pa}{2}.$$

3.6. O forță de modul P are ca suport dreapta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ din planul xOy și este orientată de la B spre A (fig. 3.6). Să se determine momentul forței în raport cu originea.

Rezolvare. Cum versorul:

$$\overline{BA}^0 = \frac{a\,\overline{i} - b\,\overline{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\overline{P} = \frac{aP}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,\overline{i} - \frac{bP}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,\overline{j}$$

și momentul forței P față de origine este cf. (3.1):

$$\overline{M}_0 = \overline{OA} \times \overline{P}$$

momentul nedepinzînd de punctul de aplicație al forței pe suport. Deci:

$$\overline{M}_0 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a & 0 & 0 \\ \dfrac{aP}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \dfrac{-bP}{\sqrt{a^2 + b^2}} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,P\,\overline{k}\,.$$

Acest rezultat se putea obține și cu ajutorul formulei (3.2).

Momentul vectorului P față de origine era un vector perpendicular pe planul xOy (dirijat după axa Oz) egal în modul cu $P\,d$ unde distanța de la O la suportul forței este:

$$d = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}}} = \frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

În sfîrșit mai puteam rezolva problema și cu ajutorul ecuației suportului (3.5). În această problemă:

$$X = \frac{aP}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad Y = -\frac{bP}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

deci ecuația suportului:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{1}$$

se poate scrie:

$$M_0 = -\frac{x\,b\,P}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{y\,aP}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,. \tag{2}$$

Coeficienții ecuațiilor (1) și (2) trebuind să fie proporționali:

$$\frac{M_0}{1} = \frac{\dfrac{-b\,P}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{\dfrac{1}{a}} = \frac{\dfrac{-aP}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{\dfrac{1}{b}}$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă:

$$M_0 = -\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} P .$$

3.7. Să se afle locurile geometrice ale extremităților vectorilor care reprezintă forțe aplicate într-un punct dat A care au: 1) Același moment $\overline{M}$ în raport cu un punct dat O. 2) Același moment M în modul în raport cu punctul dat O.

Rezolvare. 1) Considerînd că $\overline{M}$ are o direcție dată și notînd $\overline{r} = \overline{OA}$ prin definiție:

$$\overline{M} = \overline{r} \times \overline{F}. \tag{1}$$

Pentru ca problema să aibă sens va trebui ca $\overline{M}$ să fie perpendicular pe vectorul $\overline{r}$, iar forța $\overline{F}$ se va găsi într-un plan perpendicular pe $\overline{M}$ (planul xOy din figura 3.7), curba descrisă de extremitatea vectorului $\overline{F}$ fiind situată în acest plan. Luînd punctul A drept pol, ecuația curbei va fi dată de condiția:

$$M = a \cdot F \sin \theta = \text{const}$$

unde $a = |\overline{r}|$, deci:

$$Y = F \sin \theta = \frac{M}{a} \tag{2}$$

ecuație care în coordonatele alese reprezintă o dreaptă paralelă cu OA la distanța $\frac{M}{a}$. Această dreaptă va avea poziția din figură dacă $\overline{M}$ are sensul axei Oz și poziția simetrică față de Ox dacă $\overline{M}$ are sensul invers axei Oz.

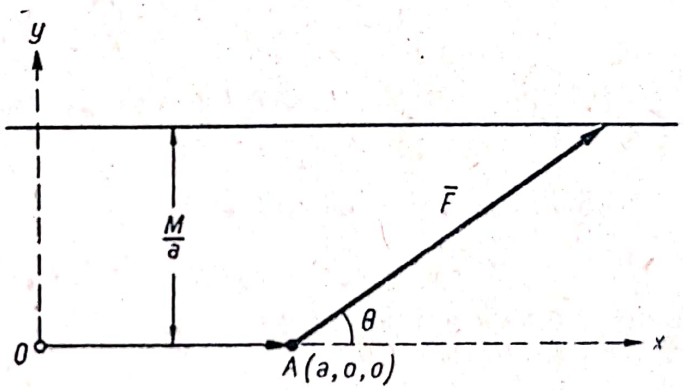


Fig. 3.7

Se poate da și o soluție vectorială problemei. Cu sistemul de referință considerat, ecuația (1) se poate scrie:

$$M\overline{k} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a & 0 & 0 \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

deci:

$$Z = 0 \qquad Y = \frac{M}{a}$$

ecuații care în sistemul $AXYZ$ reprezintă ecuațiile unei drepte din planul XAY paralele cu axa AX (X, Y, Z reprezintă coordonatele extremității forței $\overline{F}$).

2) Dacă momentul își schimbă direcția, rămînînd însă perpendicular pe $\overline{r}$, adică dacă momentul se rotește în planul xOz, păstrînd același modul M,

dreapta de la punctul 1) se va roti în jurul axei Ox. Deci locul geometric căutat va fi un cilindru de rază $\frac{M}{a}$, avînd ca axă suportul vectorului OA.

Analitic:

$$\overline{M} = \overline{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a & 0 & 0 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = -aZ\overline{j} - aY\overline{k}$$

$$|\overline{M}| = M = a\sqrt{Y^2 + Z^2}$$

deci:

$$Y^2 + Z^2 = \left(\frac{M}{a}\right)^2$$

este ecuația cilindrului descris de extremitatea vectorului $\overline{F}$ (reprezentare în sistemul $AXYZ$).

3.8. Să se arate că momentul unei forțe $\overline{F}$ față de o axă Δ este:

$$M = \pm F d \sin \alpha \qquad (1)$$

unde d este lungimea perpendicularei comune și α — unghiul dintre axa Δ și suportul forței.

Rezolvare. Fie OA perpendiculara comună pe Δ și pe suportul forței ($\overline{OA} \perp \Delta$ și $\overline{OA} \perp \overline{F}$). Cum momentul unei forțe față de o axă nu variază cînd forța lunecă pe suportul ei și nu depinde de punctul de pe axă în raport cu care calculăm momentul, presupunem forța $\overline{F}$ aplicată în A și calculăm momentul ei în raport cu punctul O: $\overline{M}_0 = \overline{OA} \times \overline{F}$.

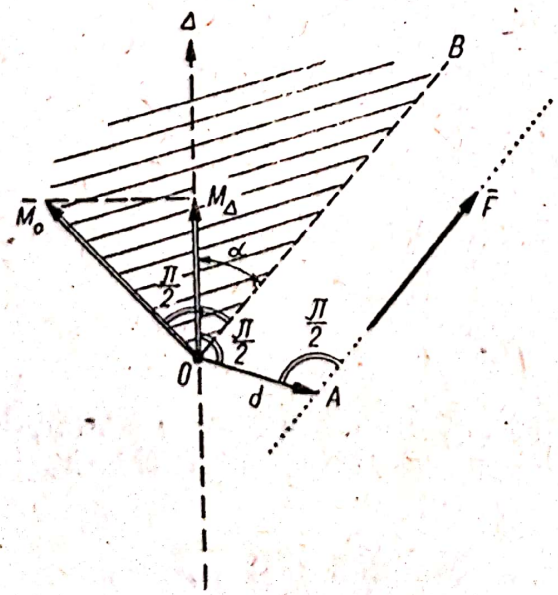


Fig. 3.8 *a*

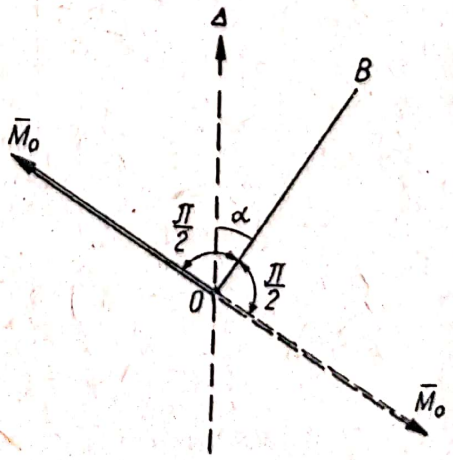


Fig. 3.8 *b*

Vectorul $\overline{M}_0$ va fi perpendicular pe $\overline{OA}$, deci se va găsi în planul definit de axa Δ și de paralela OB la suportul forței dusă prin O, și va avea modulul:

$$|\overline{M}_0| = |\overline{F}| \cdot |\overline{OA}| \sin \frac{\pi}{2} = Fd.$$

Unghiul dintre $\overline{M}_0$ și Δ este $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ deoarece unghiul dintre Δ și OB este α și $\overline{M}_0$ este perpendicular pe $\overline{F}$, deci și pe OB (fig. 3.8 *b*). Conform definiției (3.6) rezultă:

$$M_\Delta = F\, d \cos \left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$$

de unde:

$$M_\Delta = \pm F\, d \sin \alpha. \qquad (1)$$

Semnul + se va alege atunci cînd un șurub drept situat pe axa Δ acționat de forța $\overline{F}$ va înainta în sensul axei Δ și semnul — în cazul contrar.

Momentul unei forțe față de o axă Δ este deci nul dacă:

a) $F = 0$ caz banal

b) $d = 0$ axa și suportul forței sînt concurente

c) $\alpha = 0$ sau $\alpha = \pi$ axa și suportul forței sînt paralele.

Condițiile b) și c) exprimă coplanaritatea axei și suportului forței.

3.9. Asupra unui cub cu muchia egală cu a, acționează o forță de modul P dirijată ca în figura 3.9 *a*.

Să se calculeze momentele acestei forțe în raport cu toate muchiile cubului și să se indice pe figură sensurile pe care le au.

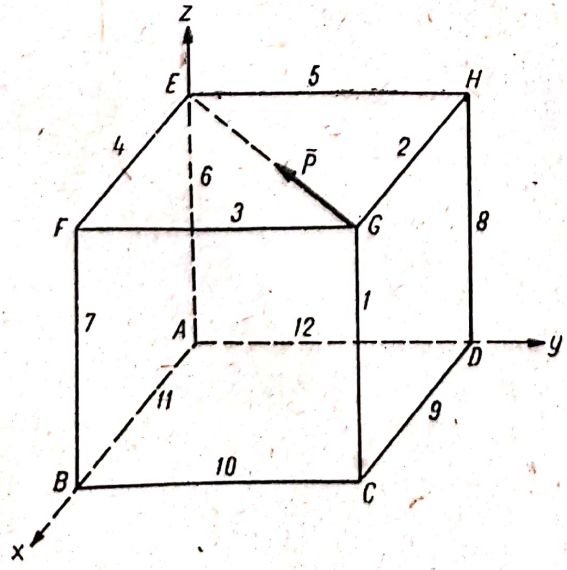


Fig. 3.9 *a*

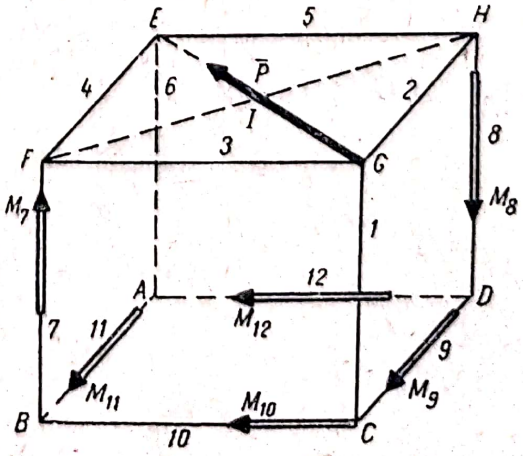


Fig. 3.9 *b*

Rezolvare. Pentru simplificarea notațiilor s-au numerotat muchiile cubului; ca atare: $M_{GH} = M_2$, $M_{GF} = M_3$ etc.

$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = 0$ forța P întîlnind toate axele respective.

$M_7 = P \cdot FG \sin 45° = Pa \frac{\sqrt{2}}{2}$: cf. (3.7) s-a proiectat forța $\overline{P}$ pe planul $EFGH$ care este perpendicular pe axa 7 și s-a luat momentul proiecției forței $\overline{P}$ pe acest plan (proiecție egală cu P) în raport cu punctul F unde axa 7 înțeapă planul $EFGH$.

Axa	Momentul față de axă	Planul de proiecție	Punctul în care axa înțeapă planul
8	$M_8 = P \cdot HG \sin \frac{\pi}{4} = Pa \frac{\sqrt{2}}{2}$	$EFGH$	H
9	$M_9 = P \cos \frac{\pi}{4} \cdot CG = Pa \frac{\sqrt{2}}{2}$	$CBFG$	C
10	$M_{10} = P \cos \frac{\pi}{4} \cdot CG = Pa \frac{\sqrt{2}}{2}$	$CDHG$	C
11	$M_{11} = P \cos \frac{\pi}{4} \cdot BF = Pa \frac{\sqrt{2}}{2}$	$CBFG$	B
12	$M_{12} = P \cos \frac{\pi}{4} \cdot DH = Pa \frac{\sqrt{2}}{2}$	$CDHG$	D

Sensurile momentelor (fig. 3.9, *b*) se află întocmai ca și în cazul momentului unei forțe în raport cu un punct cu ajutorul regulii șurubului (v. problema 3.8).

Problema se mai putea rezolva folosind definiția (3.6) a momentului față de o axă. Astfel pentru momentele M_7, M_{10} și M_{11} putem calcula momentul față de punctul B (situat pe cele 3 muchii) și apoi proiecta pe M_B pe muchiile 7, 10, 11:

$$\overline{M}_B = \overline{BG} \times \overline{P} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & a & a \\ \frac{-P\sqrt{2}}{2} & \frac{-P\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = Pa \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{i} - Pa \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{j} + Pa \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{k}.$$

Rezultă :

$$M_{11} = M_{Bx} = Pa \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$M_{10} = M_{By} = - Pa \frac{\sqrt{2}}{2}$ (orientat în sens invers axei Oy, v. fig. 3.9 *b*)

$M_7 = M_{Bz} = Pa \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Analog se pot determina şi celelalte momente faţă de muchiile cubului. În sfîrşit o a treia metodă ar fi metoda găsită în problema (3.8). În problema de faţă perpendicularele comune sînt foarte uşor de găsit. Cu notaţiile de la problema (3.8): d (lungimea perpendicularei comune), α (unghiul dintre axă şi suportul forţei), rezultatele sînt trecute în următoarea tabelă:

Axa	Perpendiculara comună	d	α	$M_\Delta = P\,d\,\sin\alpha$
7	$F\,I$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$M_7 = Pa\frac{\sqrt{2}}{2}$
8	$H\,I$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$M_8 = Pa\frac{\sqrt{2}}{2}$
9	$C\,G$	a	$\frac{\pi}{4}$	$M_9 = Pa\frac{\sqrt{2}}{2}$
10	$C\,G$	a	$\frac{\pi}{4}$	$M_{10} = Pa\frac{\sqrt{2}}{2}$
11	$A\,E$	a	$\frac{\pi}{4}$	$M_{11} = Pa\frac{\sqrt{2}}{2}$
12	$A\,E$	a	$\frac{\pi}{4}$	$M_{12} = Pa\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.10. În vîrful C unui tetraedru regulat de muchie a, este aplicată o forţă $\overline{F}$ de modul $2P$ dirijată după muchia CD a tetraedrului ca în figura 3.10.

Să se calculeze momentul forţei $\overline{F}$ în raport cu toate muchiile tetraedrului.

Rezolvare. $M_{CD} = M_{CB} = M_{CA} = M_{DB} = M_{DA} = 0$ forţa $\overline{F}$ întîlnind toate muchiile respective. Rămîne de calculat M_{AB}.

Ducem prin forţa $\overline{F}$ un plan perpendicular pe axa AB şi luăm momentul forţei $\overline{F}$ (identică cu proiecţia ei) în raport cu punctul E unde axa AB înţeapă planul normal CDE (fig. 3.10):

$M_{AB} = F \times EH = 2\,P \cdot EH, \quad EH \perp CD$

sensul momentului va fi de la A la B

$$EH = \sqrt{EC^2 - HC^2} =$$

$$= \sqrt{\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

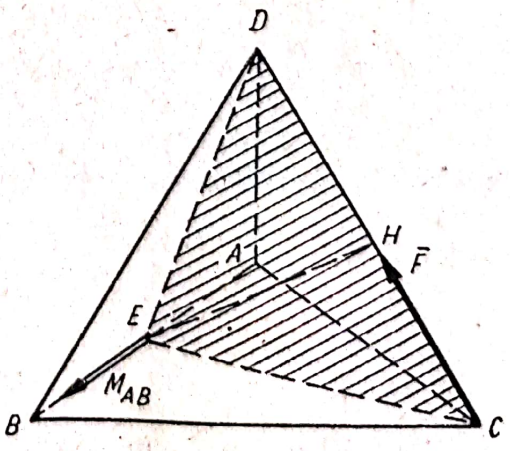


Fig. 3.10

Rezultă:

$$M_{AB} = Pa\sqrt{2}\ .$$

Observație. EH fiind perpendiculara comună pe $\overline{F}$ și pe muchia AB și $\alpha = \frac{\pi}{2}$ folosind metoda de la problema (3.8) se obține același rezultat.

3.11. Asupra unei uși având lățimea a și înălțimea $a\sqrt{3}$ care se rotește în jurul axei AB acționează forțele $\overline{F}_1$ (paralelă cu muchia BC a ramei ușii) și $\overline{F}_2$ (pe direcția $C'D$). Să se afle momentele acestor forțe față de axa AB (orientată ca în fig. 3.11) știind că planul ușii $ABC'D'$ formează unghiul $\frac{\pi}{3}$ cu planul ramei $ABCD$.

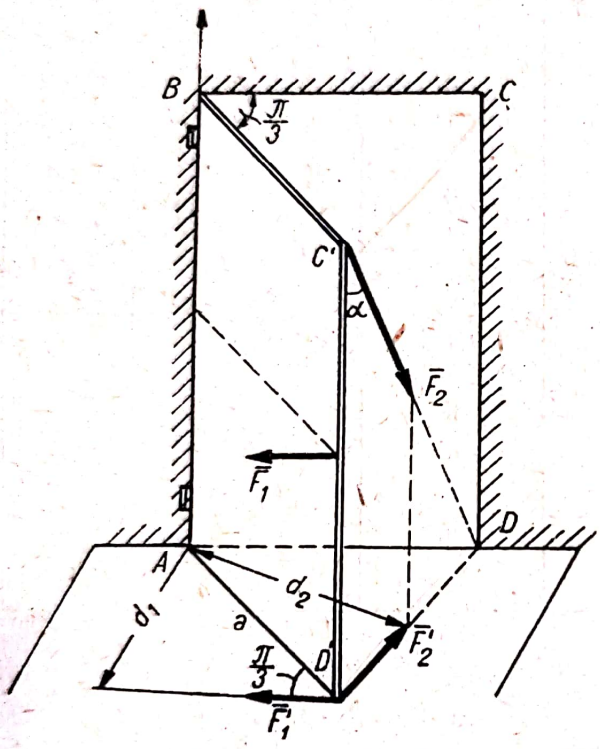


Fig. 3.11

Rezolvare. Proiectăm forțele pe planul ADD' perpendicular pe axa AB și determinăm momentele proiecțiilor forțelor pe acest plan $\overline{F}_1'$ și $\overline{F}_2'$ în raport cu punctul A în care axa înțeapă planul:

$$F_1' = F_1$$

$$F_2' = F_2 \sin\alpha = F_2 \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}F_2$$

deoarece:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{DD'}{D'C'} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ ;\ \alpha = \frac{\pi}{6}\ .$$

Distanțele de la punctul A la suporturile forțelor F_1' și F_2' fiind

$$d_1 = a\sin\frac{\pi}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad d_2 = a\sin\frac{\pi}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

momentele forțelor $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ față de axa AB vor fi:

$$M_1 = -aF_1\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$M_2 = aF_2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

semnele ținînd seama de orientarea axei.

Scanned with OKEN Scanner

3.12. Asupra unei piramide cu baza un pătrat de latură $2a$ și înălțimea $a\sqrt{2}$ acționează forța $\overline{P}$ din figura 3.12. Să se determine momentele acestei forțe în raport cu vîrfurile piramidei și în raport cu punctul O.

Răspuns.

$$\overline{M}_0 = -\frac{aP}{\sqrt{2}}\overline{i} + \frac{aP}{\sqrt{2}}\overline{j},\ \overline{M}_A = \overline{M}_E = 0,$$

$$\overline{M}_B = aP\sqrt{2}\,\overline{j} + aP\overline{k}, \qquad \overline{M}_C = -aP\sqrt{2}\,\overline{i} + aP\sqrt{2}\,\overline{j},$$

$$\overline{M}_D = -aP\sqrt{2}\,\overline{i} - aP\overline{k}.$$

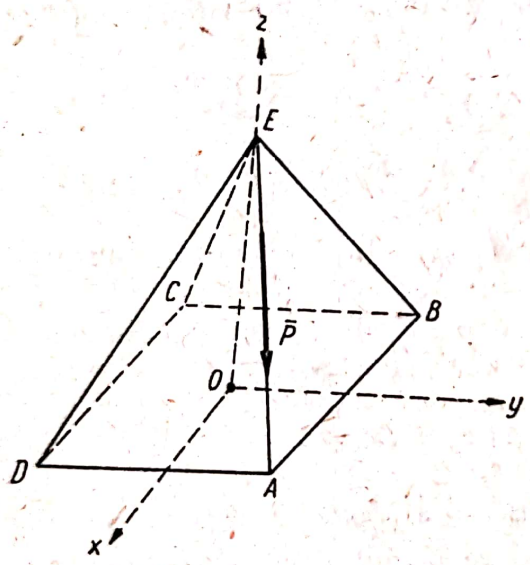


Fig. 3.12

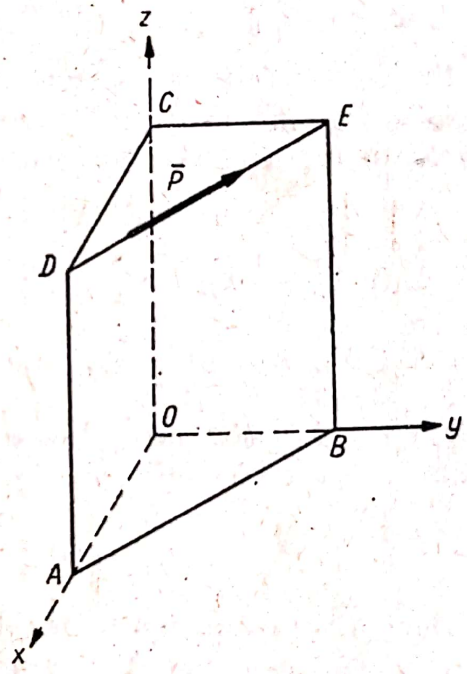


Fig. 3.13

3.13. Asupra unei prisme triunghiulare avînd baza un triunghi isoscel dreptunghic acționează forța $\overline{P}$ din figura 3.13. Știind că $OA = OB = a$, $OC = 2a$ să se determine momentele forței $\overline{P}$ în raport cu muchiile prismei.

Răspuns.

$$M_{AB} = M_{BE} = M_{DE} = M_{AD} = M_{CD} = M_{CE} = 0,\ M_{OA} = -aP\sqrt{2},$$

$$M_{OB} = -aP\sqrt{2},\ M_{OC} = \frac{aP}{\sqrt{2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul IV

REDUCEREA UNUI SISTEM DE FORȚE OARECARE

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Două sisteme de forțe sînt echivalente dacă într-un punct arbitrar O din spațiu se reduc la același *torsor* adică:

la aceeași forță rezultantă:

$$\overline{R} = \Sigma \overline{F}_i \tag{4.1}$$

și la același moment rezultant:

$$\overline{M}_0 = \Sigma \overline{r}_i \times \overline{F}_i \,. \tag{4.2}$$

Proiecțiile forței rezultante $\overline{R}$ sînt egale cu suma proiecțiilor forțelor și proiecțiile momentului rezultant $\overline{M}_0$ sînt egale cu suma momentelor forțelor în raport cu axele respective:

$$X = \Sigma X_i \qquad Y = \Sigma Y_i \qquad Z = \Sigma Z_i \tag{4.3}$$

$$M_x = \Sigma (y_i Z_i - z_i Y_i) \quad M_y = \Sigma (z_i X_i - x_i Z_i) \quad M_z = \Sigma (x_i Y_i - y_i X_i) \tag{4.4}$$

unde X_i, Y_i, Z_i sînt proiecțiile forței $\overline{F}_i$ și x_i, y_i, z_i coordonatele punctului de aplicație a lui $\overline{F}_i$.

Forța rezultantă este aceeași în orice punct din spațiu. Momentul rezultant se schimbă de la un punct la altul după legea:

$$\overline{M}_{0'} = \overline{M}_0 + \overline{O'O} \times \overline{R} \tag{4.5}$$

Dacă $\overline{R} = 0$ momentul rezultant $\overline{M}_{0'} = \overline{M}_0$ este același în toate punctele din spațiu. Dacă $\overline{R} \neq 0$ momentul rezultant este minim pe axa centrală a sistemului care este o dreaptă din spațiu, paralelă cu forța rezultantă $\overline{R}$ și ale cărei ecuații față de un sistem de axe cartezian cu originea în punctul O este:

$$\frac{M_x - yZ + zY}{X} = \frac{M_y - zX + xZ}{Y} = \frac{M_z - xY + yX}{Z} \tag{4.6}$$

unde x, y, z sînt coordonatele unui punct curent de pe axa centrală. Pe axa centrală momentul rezultant (cînd este nenul) și forța rezultantă sînt coliniare.

Produsul:

$$\overline{R} \cdot \overline{M}_0 = XM_x + YM_y + ZM_z \tag{4.7}$$

este același cu orice punct din spațiu și poartă numele de *trinom invariant*.

Scanned with OKEN Scanner

Momentul minim M_r este proiecția momentului rezultant pe direcția forței rezultante:

$$M_r = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}}{R} = \frac{X M_x + Y M_y + Z M_z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} . \qquad (4.8)$$

El este același în orice punct din spațiu și este egal cu scalarul momentului rezultant în raport cu un punct de pe axa centrală.

Cazurile de reducere ale sistemelor de forță sînt:

1. $\bar{R} = 0$ $\quad \bar{M}_0 = 0$ — Sistem echivalent cu *zero*.

2. $\bar{R} = 0$ $\quad \bar{M}_0 \neq 0$ — Sistem echivalent cu un *cuplu*, adică un sistem de forțe $\bar{F}$ și $-\bar{F}$ egale, paralele, orientate în sensuri opuse. Cuplul se găsește într-un plan perpendicular pe vectorul $\bar{M}_0$, iar forțele lui satisfac relația $Fd = M_0$, unde d este distanța dintre suporturile forțelor (fig. 4. *a*).

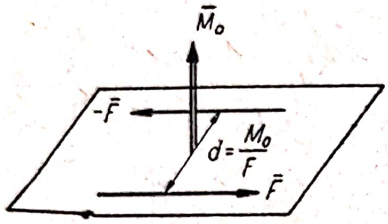


Fig. 4. *a*

3. $\bar{R} \neq 0$ $\quad \bar{R} \cdot \bar{M}_0 = 0$ — Sistem echivalent cu o *forță unică* $\bar{F} = \bar{R}$ situată pe axa centrală. Cum pe axa centrală momentul $\bar{M}_r = 0$ dacă $\bar{M}_0 = 0$ atunci axa centrală trece prin punctul O de reducere și dacă $\bar{M}_0 \neq 0$ axa centrală (Δ) nu trece prin O, ea este paralelă cu $\bar{R}$ și este situată într-un plan (π) perpendicular pe M_0 la distanța $d = \frac{M_0}{R}$ de punctul O (fig. 4. *b*).

4. $\bar{R} \neq 0$ $\quad \bar{M}_0 \neq 0$ $\quad \bar{R} \cdot \bar{M}_0 \neq 0$ — Sistem echivalent cu o forță $\bar{F} = \bar{R}$ situată pe axa centrală (Δ) și cu un cuplu situat într-un plan normal pe axa centrală (fig. 4. *c*). Forțele cuplului satisfac relația $F_1 d = M_r$, unde $\bar{M}_r$ este momentul minim (4.8). Un asemenea sistem este denumit în unele tratate dinam, torsor minimal sau răsucitor.

Un sistem de forțe *concurente* sau este echivalent cu zero, sau se reduce la o forță unică.

Un sistem de forțe *coplanare* în planul xOy este sau echivalent cu zero ($\bar{R} = 0$, $\bar{M}_0 = 0$), sau se reduce la un cuplu situat în planul forțelor ($\bar{R} = 0$, $\bar{M}_0 \neq 0$) sau dacă $\bar{R} \neq 0$ se reduce la o forță unică situată pe axa centrală a cărei ecuație devine:

$$xY - yX = M_0 , \qquad (4.9)$$

Un sistem de forțe *paralele* poate fi echivalent cu zero, cu un cuplu sau cu o forță unică.

În toate aceste cazuri particulare și în general în cazul unui sistem care se reduce la o forță unică, este valabilă *teorema lui Varignon*: momentul rezultantei sistemului în raport cu un punct (sau cu o axă) este egal cu momentul rezultant, adică cu suma momentelor forțelor sistemului, în raport cu acel punct (sau acea axă).

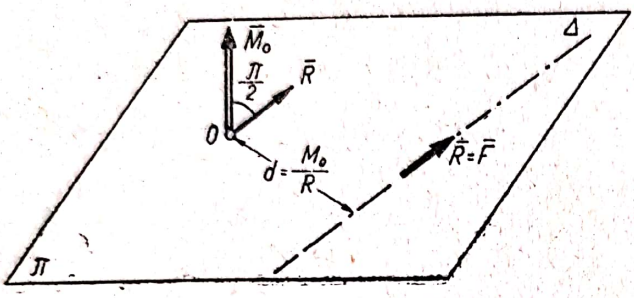


Fig. 4. *b*

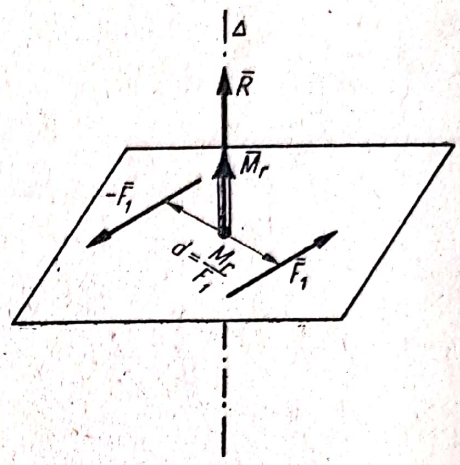


Fig. 4. *c*

Un sistem de cupluri poate fi înlocuit printr-un cuplu. Momentul acestui cuplu este egal cu suma vectorială a momentelor cuplurilor ce compun sistemul. Dacă această sumă este nulă sistemul este echivalent cu zero.

B. PROBLEME REZOLVATE

4.1. Sistemul de forțe din figura 4.1 *a* acționează asupra unui cub de latură *a*. Știind că $|\overline{P_1}| = |\overline{P_2}| = |\overline{P_3}| = |\overline{P_4}| = |\overline{P_5}| = |\overline{P_6}| = P$ și că $|P_7| = |\overline{P_8}| = P\sqrt{2}$ se cere:

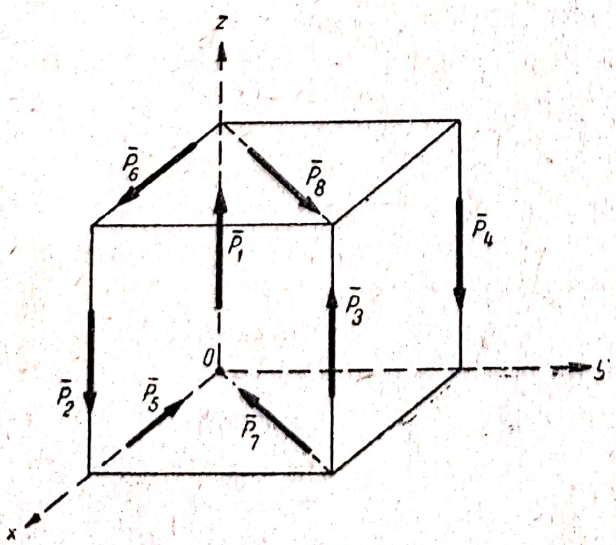


Fig. 4.1 *a*

a) să se calculeze momentele forțelor în raport cu punctul O;

b) cu ce este echivalent sistemul format din forțele $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, și $\overline{P}_4$;

c) cu ce este echivalent sistemul format din forțele $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_5$ și $\overline{P}_6$;

d) cu ce este echivalent sistemul format din forțele $\overline{P}_1$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_7$ și $\overline{P}_8$;

e) cu ce este echivalent sistemul format din forțele $\overline{P}_2$, $\overline{P}_5$ și $\overline{P}_6$;

f) cu ce este echivalent sistemul format din forțele $\overline{P}_5$, $\overline{P}_7$ și $\overline{P}_8$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Notînd $\overline{M}_i$ momentul forței $\overline{P}_i$ $(i = 1,2,\ldots,8)$ în raport cu punctul O avem:

$$\overline{M}_1 = \overline{M}_5 = \overline{M}_7 = 0; \qquad \overline{M}_2 = a\,P\,\overline{j}; \qquad \overline{M}_3 = a\,P\,\overline{i} - a\,P\,\overline{j};$$
$$\overline{M}_4 = -a\,P\,\overline{i}; \qquad \overline{M}_6 = a\,P\overline{j}; \qquad \overline{M}_8 = -a\,P\,\overline{i} + a\,P\,\overline{j}.$$

b) Torsorul de reducere în punctul O este:

$$\overline{R} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 + \overline{P}_4 = 0 \quad \text{(forța rezultantă)}$$
$$\overline{M}_0 = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3 + \overline{M}_4 = 0 \quad \text{(momentul rezultant).}$$

Sistemul de forțe paralele $(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{P}_4)$ este deci echivalent cu zero.

c) Torsorul de reducere în punctul O este:

$$\overline{R} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_5 + \overline{P}_6 = 0$$
$$\overline{M}_0 = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_5 + \overline{M}_6 = 2\,a\,P\overline{j} \neq 0.$$

Sistemul de forțe coplanare $(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_5, \overline{P}_6)$ este deci echivalent cu un cuplu de moment $2\,a\,P$ situat într-un plan perpendicular pe axa Oy. Un exemplu de asemenea cuplu ar putea fi format de exemplu de forțele $\overline{F} = 2\,\overline{P}_1$ și $-\overline{F} = 2\,\overline{P}_2$ deoarece $F = 2\,P$, distanța dintre forțe este $d = a$ și momentul $M_0 = Fd = 2\,aP$.

Sistemul de mai sus poate fi considerat ca un sistem de cupluri format din cuplurile $(\overline{P}_1, \overline{P}_2)$ și $(\overline{P}_5, \overline{P}_6)$, fiecare dintre cuplurile componente avînd momentul $a\,P\,\overline{j}$, cuplul rezultant are momentul $2a\,P\,\overline{j}$.

d) Torsorul de reducere în punctul O este:

$$\overline{R} = \overline{P}_1 + \overline{P}_3 + \overline{P}_7 + \overline{P}_8 = 2\,P\,\overline{k} \neq 0$$
$$\overline{M}_0 = \overline{M}_1 + \overline{M}_3 + \overline{M}_7 + \overline{M}_8 = 0$$

deci trinomul invariant este nul:

$$\overline{R}\;\overline{M}_0 = 0.$$

Sistemul este echivalent cu o forță unică aplicată pe axa centrală. Deoarece $\overline{M}_0 = 0$ axa centrală trece prin punctul O și fiind paralelă cu rezultanta, axa centrală este axa Oz avînd ecuațiile $x = 0$, $y = 0$ ecuații ce se pot deduce din relația (4.6). Putem deci înlocui sistemul de forțe coplanare $(\overline{P}_1, \overline{P}_3, \overline{P}_7, \overline{P}_8)$ cu o forță unică $\overline{R} = 2\,P\,\overline{k}$ aplicată pe axa Oz.

e) Torsorul de reducere în punctul O este:

$$\overline{R} = \overline{P}_2 + \overline{P}_5 + \overline{P}_6 = -P\,\overline{k} \neq 0$$
$$\overline{M}_0 = \overline{M}_2 + \overline{M}_5 + \overline{M}_6 = 2\,a\,P\overline{j} \neq 0$$

și trinomul invariant:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_0 = 0.$$

Sistemul de forțe coplanare $(\bar{P}_2, \bar{P}_5, \bar{P}_6)$ este deci echivalent cu o forță unică $\bar{R} = -P\bar{k}$ situată pe axa centrală. Axa centrală Δ se găsește în planul xOz perpendicular pe $\bar{M}_0$ (planul forțelor) la distanța $d = \frac{M_0}{R} = 2a$ de punctul O și este paralelă cu rezultanta, deci și cu axa Oz (fig. 4.1 *b*).

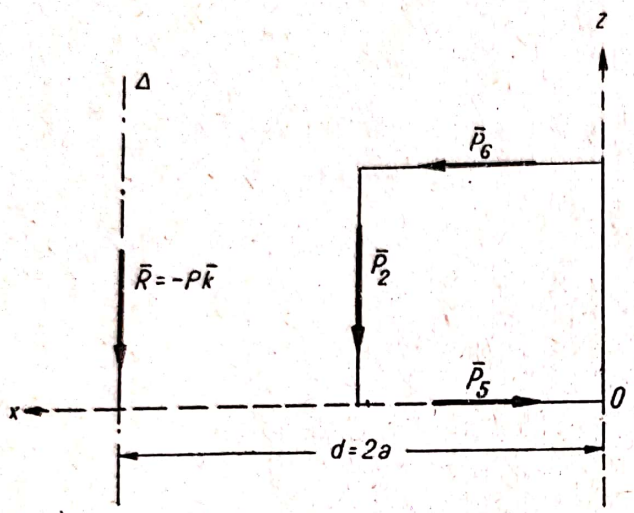


Fig. 4.1 *b*

Ecuațiile axei centrale $x=2a$, $y=0$ se pot găsi și cu formula (4.6) care în acest caz devine:

$$\frac{Py}{0} = \frac{2aP - Px}{0} = \frac{0}{-P}.$$

f) Torsorul de reducere în punctul O este:

$$\bar{R} = \bar{P}_5 + \bar{P}_7 + \bar{P}_8 = -P\bar{i} \neq 0$$

$$\bar{M}_0 = \bar{M}_5 + \bar{M}_7 + \bar{M}_8 = -aP\bar{i} + aP\bar{j} \neq 0$$

și trinomul invariant:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_0 = aP^2 \neq 0.$$

Axa centrală Δ a sistemului, conform (4.6), este :

$$\frac{-aP}{-P} = \frac{aP + zP}{0} = \frac{-yP}{0}$$

adică dreapta Δ de ecuații $y=0$, $z=-a$, paralelă cu axa Ox (fig. 4.1 *c*).

Sistemul de forțe $(\bar{P}_5, \bar{P}_7, \bar{P}_8)$ este deci echivalent cu o forță egală cu rezultanta $\bar{R} = -P\bar{i}$ aplicată pe axa centrală Δ și cu un cuplu de moment:

$$\bar{M}_r = -aP\bar{i}$$

situat într-un plan perpendicular pe axa centrală. De exemplu cuplul format din forțele $\bar{F} = \bar{P}_1$ și $-\bar{F} = \bar{P}_4$ situat în planul yOz îndeplinește condițiile cerute.

Momentul minim $\bar{M}_r$ se putea determina cu formula (4.8) sau mai simplu

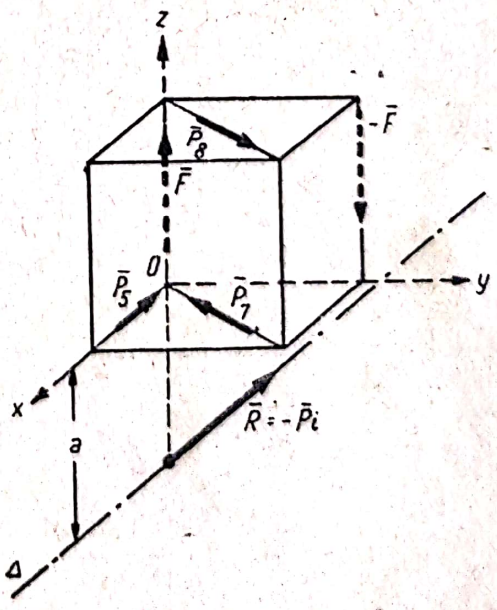


Fig. 4.1 *c*

pornind de la definiție, momentul minim fiind proiecția momentului rezultant $\bar{M}_0$ pe direcția rezultantei, adică în cazul nostru pe direcția axei Ox ($M_r = M_x = -aP$).

4.2. Se dă sistemul de forțe coplanare $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$, $\bar{P}_4$. Proiecțiile X_i și Y_i ale acestor forțe și coordonatele x_i, y_i ale punctelor lor de aplicație sînt cuprinse în tabela alăturată. Să se reducă acest sistem în origine și să se afle ecuația axei centrale.

	$\bar{P}_1$	$\bar{P}_2$	$\bar{P}_3$	$\bar{P}_4$
X_i	1	−2	3	−4
Y_i	4	1	−3	−3
x_i	2	−2	3	−4
y_i	1	−1	−3	−6

Rezolvare. Rezultanta acestui sistem este:

$$\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j}$$

unde:

$$X = \Sigma X_i = 1 - 2 + 3 - 4 = -2$$

$$Y = \Sigma Y_i = 4 + 1 - 3 - 3 = -1$$

iar momentul rezultant:

$$\bar{M}_0 = M_z\,\bar{k} = \Sigma\,(x_i Y_i - y_i X_i)\,\bar{k}$$

$$\Sigma\,(x_i Y_i - y_i X_i) = [2 \times 4 - 1 \times 1] + [(-2) \times 1 - (-1) \times (-2)] +$$
$$+ [3 \times (-3) - (-3) \times 3] + [(-4) \times (-3) - (-6) \times (-4)] = -9.$$

Deci:

$$\bar{R} = -2\bar{i} - \bar{j} \qquad \bar{M}_0 = -9\,\bar{k}$$

$\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_0 \neq 0$, $\bar{R} \cdot \bar{M}_0 = 0$ sistemul de forțe dat se reduce la o singură forță $\bar{R} = -2\bar{i} - \bar{j}$.

Ecuația axei centrale (suportul forței $\bar{R}$) este dată de ecuația (4.9):

$$xY - yX = M_0$$

adică:

$$x \cdot (-1) - y \cdot (-2) = -9 \text{ sau}$$

$$x - 2y - 9 = 0.$$

4.3. Se dă sistemul de forțe din figura 4.3 *a* în care $|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2| = P$ și $|\bar{F}_3| = 2P$. Forțele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ sînt paralele cu axa Oz.

Se cere:

a) Să se calculeze torsorul sistemului în origine.
b) Cu ce este echivalent sistemul?
c) Să se afle ecuațiile axei centrale și punctul unde înțeapă planul xOy.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Torsorul de reducere în O este:

$$\overline{R} = -P\sqrt{2}\,\overline{i} + P\sqrt{2}\,\overline{j} + 2P\overline{k}$$

$$\overline{M}_0 = Pa\,\overline{i} - Pa\,\overline{j} + Pa\sqrt{2}\,\overline{k}.$$

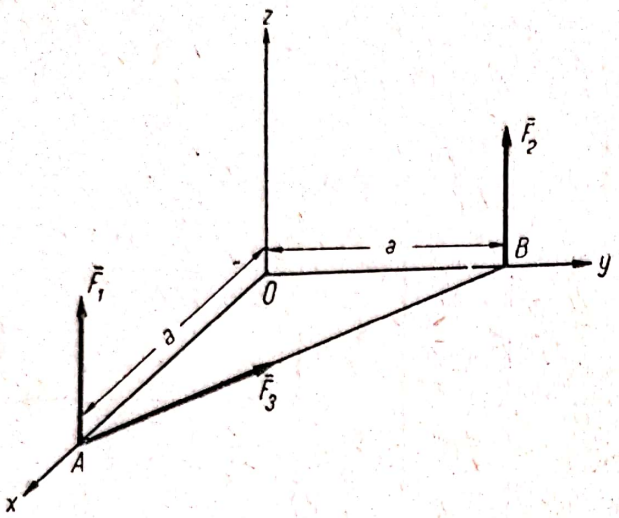


Fig. 4.3 *a*

b) $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_0 \neq 0$, $\overline{R} \cdot \overline{M}_0 = 0$. Sistemul se reduce la o forță unică $\overline{F} = \overline{R}$.

c) Axa centrală (suportul rezultantei $\overline{R}$) are conform (4.6) ecuațiile:

$$\frac{Pa - 2Py + P\sqrt{2}\,z}{-P\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{-Pa + P\sqrt{2}\,z + 2Px}{P\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{Pa\sqrt{2} - P\sqrt{2}\,x - P\sqrt{2}\,y}{2P}.$$

După simplificări rezultă:

$$x - y + \sqrt{2}\,z = 0$$

$$x + 3y - \sqrt{2}\,z = 2a.$$

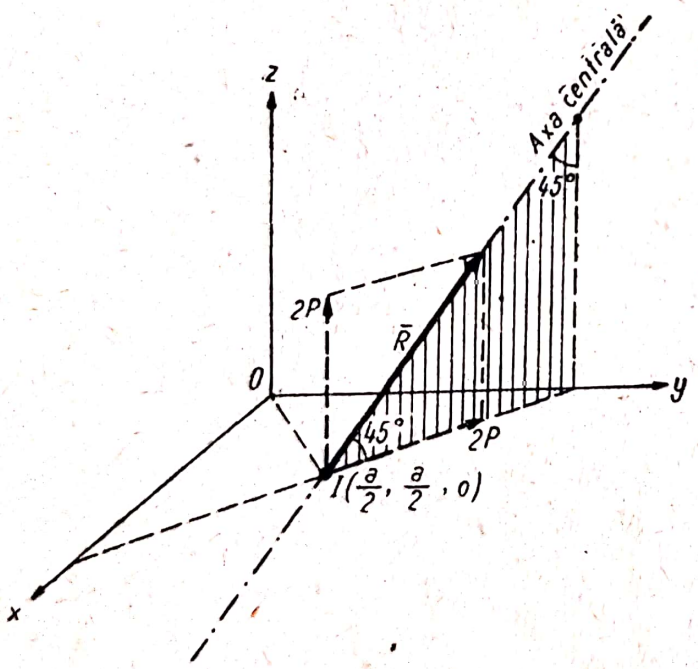


Fig. 4.3 *b*

Intersectînd această dreaptă cu planul xOy ($z = 0$) se obțin coordonatele $x = y = \frac{a}{2}$ ale punctului de intersecție I. Axa centrală trece prin I și este paralelă cu $\overline{R}$.

4.4. Se dau două forțe perpendiculare între ele în spațiu: $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$. Perpendiculara lor comună $AB = a$.

Să se determine:

a) Torsorul minimal al sistemului.

b) Axa centrală.

c) Unghiurile pe care axa centrală le face cu fiecare dintre forțe.

Rezolvare. a) Se alege punctul A ca origine, suportul forței $\overline{P}_1$ ca axă. Az perpendiculara comună se ia ca axă Ay (fig. 4.4 *b*). Reducînd sistemul în punctul A se obține forța rezultantă (4.1):

$$\overline{R} = P_2\overline{i} + P_1\overline{k}$$

și momentul rezultant (4.2):

$$\overline{M}_A = -a\,P_2\,\overline{k}\,.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece:

$\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_A \neq 0$, $\overline{R} \cdot \overline{M}_A = -P_1 P_2 a \neq 0$ sistemul se reduce la o forță egală cu forța rezultantă $\overline{R}$ aplicată pe axa centrală și un cuplu de moment $\overline{M}_r$. Scalarul momentului minim conform relației (4.8) este:

$$M_r = -\frac{a P_1 P_2}{\sqrt{P_1^2 + P_2^2}}.$$

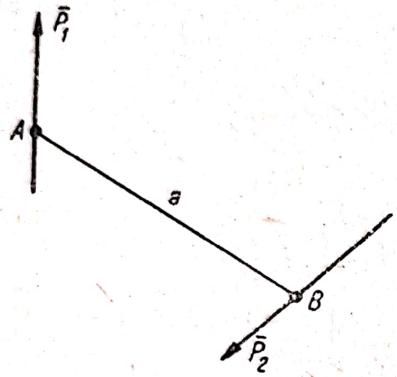


Fig. 4.4 *a*

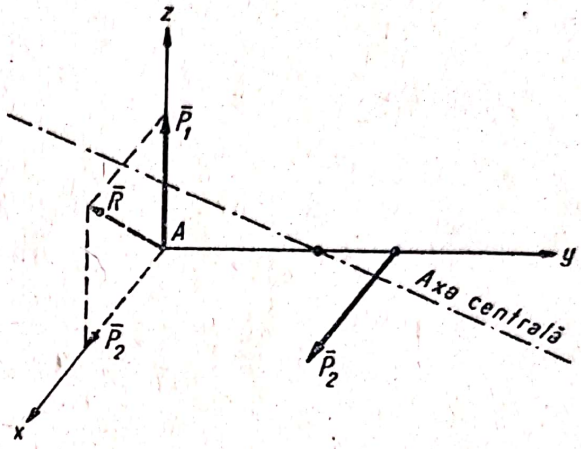


Fig. 4.4 *b*

b) Axa centrală este paralelă cu forța rezultantă $\overline{R}$ și într-un punct $O'(x, y, z)$ al axei centrale $\overline{M}_0'$ este coliniar cu $\overline{R}$. Însă conform (4.5):

$$\overline{M}_0' = \overline{M}_A + \overline{O'A} \times \overline{R} = -a P_2 \bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -x & -y & -z \\ P_2 & 0 & P_1 \end{vmatrix} =$$

$$= -yP_1 \bar{i} + (xP_1 - zP_2)\bar{j} + (-aP_2 + yP_2)\bar{k}$$

deci ecuațiile axei centrale sînt:

$$\frac{-yP_1}{P_2} = \frac{xP_1 - zP_2}{0} = \frac{-aP_2 + yP_2}{P_1}$$

sau:

$$xP_1 - zP_2 = 0$$

$$y = \frac{aP_2^2}{P_1^2 + P_2^2}$$

ecuații ce puteau fi găsite direct cu formula (4.6).

c) Axa centrală avînd direcția rezultantei, unghiurile pe care le face cu fiecare dintre forțe sînt:

$$\operatorname{tg} \sphericalangle (\overline{R}, \overline{P}_1) = \frac{P_2}{P_1}$$

$$\operatorname{tg} \sphericalangle (\overline{R}, \overline{P}_2) = \frac{P_1}{P_2}.$$

4.5. Se dau 6 forțe egale în modul cu F situate în același plan și dirijate ca în figura 4.5.

Se cere:

a) Să se reducă acest sistem în punctele O, A, B și C.

b) Cu ce este echivalent sistemul.

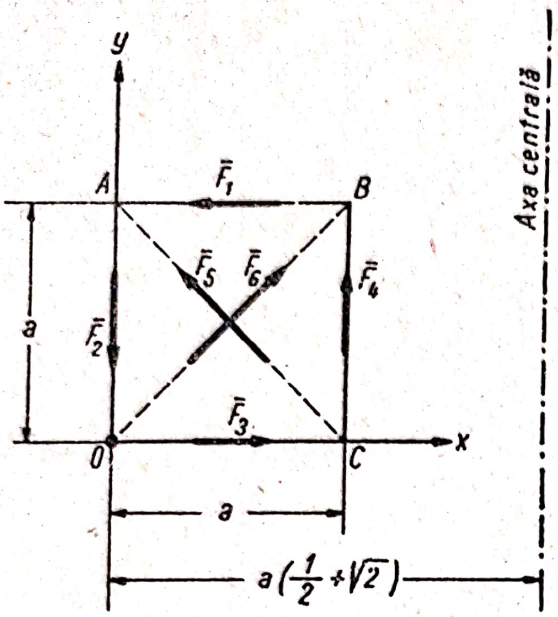


Fig. 4.5

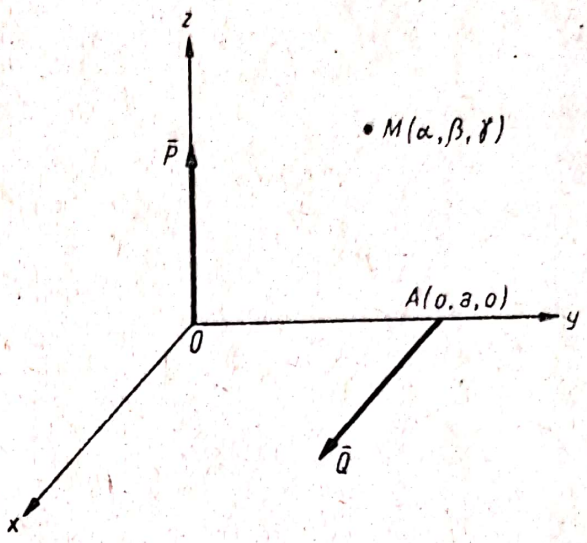


Fig. 4.6

Rezolvare. a) Torsorul de reducere în O este:

$$\bar{R} = F\sqrt{2}\,\bar{j}$$

$$\bar{M}_0 = F\,a\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\bar{k}.$$

Conform legii de variație a momentului rezultant (4.5) rezultă:

$$\bar{M}_A = \bar{M}_0 + \overline{AO}\times\bar{R} = \bar{M}_0$$

căci $\overline{AO}$ este coliniar cu $\bar{R}$

$$\bar{M}_B = \bar{M}_0 + \overline{BO}\times\bar{R} = \bar{M}_0 + (-a\,\bar{i} - a\,\bar{j})\times F\sqrt{2}\,\bar{j} = F\,a\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\bar{k}$$

$$\bar{M}_C = \bar{M}_B + \overline{CB}\times\bar{R} = \bar{M}_C$$

căci $\overline{CB}$ este coliniar cu $\bar{R}$.

b) $\bar{R}\neq 0$, $\bar{M}_0\neq 0$, $\bar{R}\cdot\bar{M}_0 = 0$ sistemul se reduce la o forță unică egală cu rezultanta. Ecuația axei centrale (suportul rezultantei) a unui sistem de forțe coplanare este dată de ecuația (4.9) care în acest caz devine:

$$F\sqrt{2}\;x = F\,a\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

sau

$$x = a\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)\text{ (o dreaptă paralelă cu } Oy).$$

4.6. Se dau forțele $\bar{P}$ și $\bar{Q}$ orientate ca în figura 4.6 și punctul $M(\alpha, \beta, \gamma)$.

Știind că forța $\bar{Q}$ are suportul paralel cu axa Ox la distanța a se cere să se afle ce relație trebuie să existe între elementele P, Q, a și α, β, γ

pentru ca sistemul de forţe dat să admită o axă centrală care să treacă prin punctul M.

Rezolvare. Forţa rezultantă şi momentul rezultant în O au componentele:

$$X = Q, \quad Y = 0, \quad Z = P$$

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = -Q\,a.$$

Ecuaţiile axei centrale vor fi conform formulei (4.6):

$$\frac{-yP}{Q} = \frac{-zQ + xP}{0} = \frac{-Qa + yQ}{P}$$

care se scriu mai simplu:

$$Px - Qz = 0, \quad (Q^2 + P^2)\,y = Q^2\,a.$$

Punctul M (α, β, γ) trebuind să fie pe axa centrală, coordonatele sale trebuie să satisfacă aceste ecuaţii. Rezultă:

$$P\alpha = Q\gamma \text{ şi } \beta = \frac{Q^2}{P^2 + Q^2}\,a.$$

4.7. Se dă sistemul de forţe $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$ aplicate pe muchiile unui cub de latură a ca în figura 4.7.

Să se afle condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească forţele date pentru ca:

1) să se echilibreze;

2) să se reducă la o forţă unică;

3) să se reducă la un cuplu;

4) să se reducă la o forţă şi un cuplu.

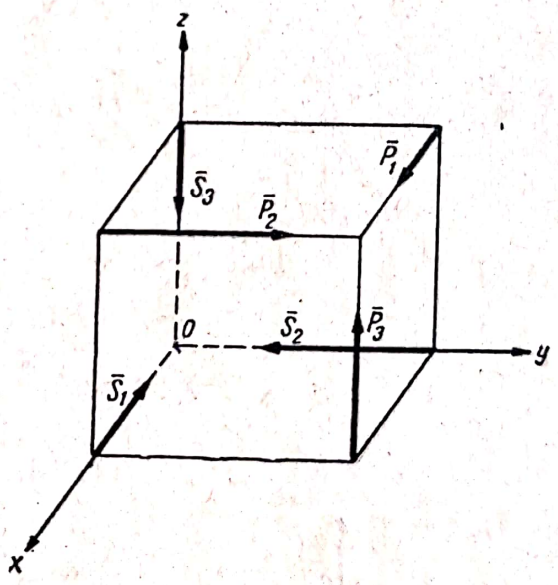


Fig. 4.7

Rezolvare. Reducînd sistemul de forţe dat în punctul O se obţine torsorul:

$$\bar{R} = (P_1 - S_1)\,\bar{i} + (P_2 - S_2)\,\bar{j} + (P_3 - S_3)\,\bar{k}$$

$$\bar{M}_0 = (P_3 - P_2)\,a\,\bar{i} + (P_1 - P_3)\,a\,\bar{j} + (P_2 - P_1)\,a\,\bar{k}.$$

1. Pentru *echilibru* condiţia este: $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_0 = 0$ ceea ce revine la:

$$\begin{aligned} P_1 - S_1 &= 0 \quad & (P_3 - P_2)\,a &= 0 \\ P_2 - S_2 &= 0 \quad & (P_1 - P_3)\,a &= 0 \quad \text{sau} \quad P_1 = P_2 = P_3 = S_1 = S_2 = S_3. \\ P_3 - S_3 &= 0 \quad & (P_2 - P_1)\,a &= 0 \end{aligned}$$

2. Condiția ca sistemul să se reducă la o *forță unică* este $\overline{R} \neq 0$, $\overline{R} \cdot \overline{M}_0 = 0$ adică să avem îndeplinită măcar una dintre relațiile $P_1 \neq S_1$, $P_2 \neq S_2$ sau $P_3 \neq S_3$ și totodată:

$$(P_1 - S_1)(P_3 - P_2) + (P_2 - S_2)(P_1 - P_3) + (P_3 - S_3)(P_2 - P_1) = 0. \quad (1)$$

În ipoteza că se pune condiția suplimentară ca punctul O să aparțină axei centrale a sistemului, condițiile sînt:

$$\overline{R} \neq 0, \quad \overline{M}_0 = 0$$

din $\overline{M}_0 = 0$ rezultă: $P_1 = P_2 = P_3$

din $\overline{R} \neq 0$ rezultă: $P_i \neq S_i$

pentru cel puțin unul dintre indicii i ($i = 1,2,3$).

3. Condiția ca sistemul de forțe dat să se reducă la un *cuplu* este $\overline{R} = 0$, $\overline{M}_0 \neq 0$;

din $\overline{R} = 0$ rezultă: $P_1 = S_1 \quad P_2 = S_2 \quad P_3 = S_3$

din $\overline{M}_0 \neq 0$ rezultă: $\sqrt{(P_3 - P_2)^2 + (P_1 - P_3)^2 + (P_2 - P_1)^2} \neq 0$

adică cel puțin una dintre parantezele de sub radical să fie diferită de zero.

4. Pentru ca sistemul să se reducă la o forță și un cuplu este necesar ca $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_0 \neq 0$ și $\overline{R} \cdot \overline{M}_0 \neq 0$. Bazați pe rezultatele anterioare condițiile acestea impun:

1) cel puțin o forță P să fie diferită de forța S cu același indice;

2) cel puțin două forțe P să fie de mărimi diferite;

3) produsul scalar (1) să fie diferit de zero.

4.8. Asupra unui paralelipiped avînd muchiile $OA = 2a$, $OB = 3a$, $OC = a$ acționează forțele din figura 4.8. Știind că $|\overline{P}_1| = 2P$, $|\overline{P}_2| = |\overline{P}_3| = P$, $|\overline{P}_4| = 3P$ să se determine scalarul forței $\overline{F}$ astfel ca sistemul să se reducă la o forță unică și să se determine suportul ei (axa centrală).

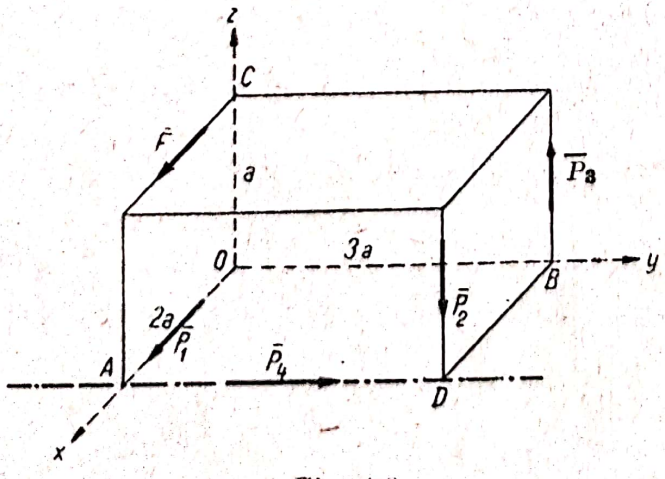


Fig. 4.8

Rezolvare. Reducem sistemul în origine:

$$\overline{R} = (2P + F)\,\overline{i} + 3P\,\overline{j}$$

$$\overline{M}_0 = (2aP + aF)\,\overline{j} + 6aP\,\overline{k}.$$

Condițiile ca sistemul să se reducă la o forță unică sînt: $\overline{R} \neq 0$ (condiție îndeplinită pentru orice valoare a lui F) și $\overline{R} \cdot \overline{M}_0 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Cum:

$$\overline{R} \cdot \overline{M}_0 = 3aP(2P + F) = 0$$

rezultă:

$$F = -2P.$$

În acest caz vom avea:

$$\overline{R} = 3P\overline{j}$$

$$\overline{M}_0 = 6aP\overline{k}.$$

Ecuațiile axei centrale (4.6) devin:

$$\frac{3Pz}{0} = \frac{0}{3P} = \frac{6aP - 3Px}{0}$$

adică $x = 2a$, $z = 0$. Muchia AD a paralelipipedului se găsește pe axa centrală.

Sistemul se reduce la forța $\overline{R} = 3P\overline{j}$ situată pe axa centrală, adică la forța $\overline{P}_4$. Rezultatul este normal deoarece forțele $\overline{P}_1$, $\overline{F}$ și $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ alcătuiesc două cupluri de momente egale și de sens contrar, deci sistemul $\overline{P}_1$, $\overline{F}$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ este echivalent cu zero și sistemul dat se reduce la forța $\overline{P}_4$.

4.9. Un cub de latură a este acționat de forțele din figura 4.9 *a*. Știind că $|\overline{P}_i| = P$ $(i = 1,2,\ldots,8)$ să se determine forța $\overline{F}$ aplicată în punctul A astfel încît sistemul să fie echivalent cu un cuplu.

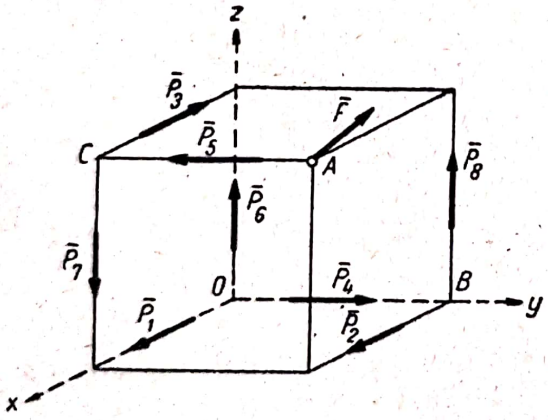


Fig. 4.9 a

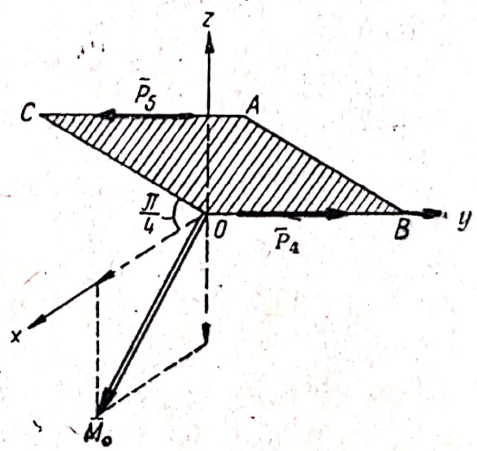


Fig. 4.9 b

Rezolvare. Pentru ca sistemul să fie echivalent cu un cuplu trebuie ca $\overline{R} = 0$, $\overline{M}_0 \neq 0$. Însă:

$$\overline{R} = (P + F_x)\overline{i} + F_y\overline{j} + (P + F_z)\overline{j}$$

unde F_x, F_y, F_z sînt proiecțiile forței $\overline{F}$ pe axele de coordonate. Va trebui deci ca:

$$F_x = -P \qquad F_y = 0 \qquad F_z = -P.$$

În acest caz:

$$\overline{M}_0 = aP\overline{i} - aP\overline{k} \neq 0 \qquad |\overline{M}_0| = aP\sqrt{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul dat poate fi înlocuit printr-un cuplu situat într-un plan perpendicular pe vectorul $\bar{M}_0$ de exemplu planul $OBAC$ (plan bisector al unghiului diedru format din planele xOy și yOz). În acest plan putem considera cuplul format din forțele $\bar{P}_5$ și $\bar{P}_4$ care are un moment egal cu $Pa\sqrt{2}$ (căci distanța între suporturile forțelor este $d = a\sqrt{2}$) și care îndeplinește condiția cerută (fig. 4.9 *b*).

4.10. Asupra unui paralelipiped având muchiile $OA = 3a$, $OC = 4a$, $OD = 2a$ acționează sistemul de forțe din figura 4.10. Știind că $|\bar{P}_1| = 6P$, $|\bar{P}_2| = |\bar{P}_3| = 3P$, $|\bar{P}_4| = |\bar{P}_5| = 5P$, $|\bar{P}_6| = |\bar{P}_7| = P$, $|\bar{P}_8| = 2P$ și că sistemul are rezultanta $\bar{R} = P\bar{i}$ și momentul minim $\bar{M}_r = -4aP\bar{i}$ să se determine scalarii forțelor $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ și $\bar{F}_4$ și axa centrală a sistemului.

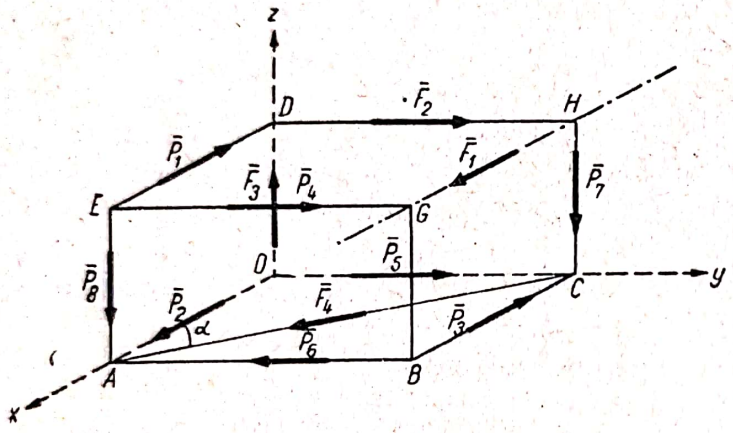


Fig. 4.10

Rezolvare. Notînd α unghiul dintre suportul forței $\bar{F}_4$ și axa O_x:

$$\cos\alpha = \frac{OA}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}$$

de unde:

$$\bar{F}_4 = \frac{3}{5}F_4\bar{i} - \frac{4}{5}F_4\bar{j}$$

$$\bar{M}_0(\bar{F}_4) = -\frac{12}{5}aF_4\bar{k}.$$

Forța rezultantă $\bar{R}$ și momentul rezultant $\bar{M}_0$ au componentele:

$$X = -6P + F_1 + \frac{3}{5}F_4, \quad Y = 9P + F_2 - \frac{4}{5}F_4, \quad Z = -3P + F_3$$

$$M_x = -14aP - 2aF_2, \qquad M_y = -6aP + 2aF_1,$$

$$M_z = 24aP - 4aF_1 - \frac{12}{5}aF_4.$$

Momentul minim este proiecția lui $\bar{M}_0$ pe direcția rezultantei, adică în cazul nostru pe direcția axei Ox, $M_r = M_x$. Deci condițiile se vor putea scrie:

$$X = P \qquad Y = 0 \qquad Z = 0 \qquad M_r = M_x = -4aP.$$

Se obține sistemul de ecuații:

$$-6P + F_1 + \frac{3}{5}F_4 = P$$

$$9P + F_2 - \frac{4}{5}F_4 = 0$$

$$-3P + F_3 = 0$$

$$-14aP - 2aF_2 = -4aP$$

de unde $F_1 = 4P$ $F_2 = -5P$ $F_3 = 3P$ și $F_4 = 5P$.

Scanned with OKEN Scanner

Făcînd înlocuirile rezultă:

$$\bar{R} = P\bar{i} \qquad \bar{M}_0 = -4aP\bar{i} + 2aP\bar{j} - 4aP\bar{k}$$

deci ecuațiile axei centrale (4.6) devin:

$$\frac{-4aP}{P} = \frac{2aP - zP}{0} = \frac{-4aP + yP}{0}$$

adică $y = 4a$, $z = 2a$, muchia GH a paralelipipedului găsindu-se pe axa centrală. Sistemul se reduce la o forță $\bar{R} = P\bar{i}$ situată pe axa centrală și la un cuplu de moment $\bar{M}_r = -4aP\bar{i}$.

4.11. Asupra unui cerc acționează forțele concurente din figura 4.11. Știind că $|\bar{P}_3| = P$ și că forțele sînt proporționale cu lungimile coardelor pe care sînt aplicate să se reducă sistemul de forțe în punctele A, B și C.

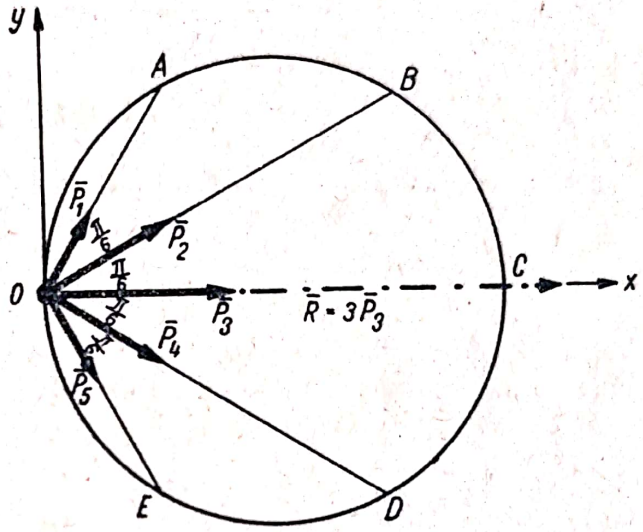


Fig. 4.11

Rezolvare. Din enunț rezultă:

$$OA = OE = r \quad OB = OD = r\sqrt{3} \quad OC = 2r$$

deci:

$$\frac{P_1}{r} = \frac{P_2}{r\sqrt{3}} = \frac{P}{2r} = \frac{P_4}{r\sqrt{3}} = \frac{P_5}{r}$$

adică:

$$P_1 = P_5 = \frac{P}{2} \qquad P_2 = P_4 = \frac{P\sqrt{3}}{2}.$$

Rezultanta este:

$$R = \sum_{i=1}^{5} \bar{P}_i = 3P\bar{i}.$$

Forțele fiind concurente pentru calculul momentelor $\bar{M}_A$, $\bar{M}_B$ și $\bar{M}_C$ se poate aplica teorema lui Varignon, momentul rezultant fiind egal cu momentul rezultantei.

Rezultă:

$$\bar{M}_A = \overline{AO} \times \bar{R} = \frac{3\sqrt{3}}{2} Pr\bar{k} \qquad \bar{M}_B = \overline{BO} \times \bar{R} = \frac{3\sqrt{3}}{2} Pr\bar{k}$$

$$\bar{M}_C = \overline{CO} \times \bar{R} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

4.12. Se dau 3 forțe coplanare avînd modulele $|\overline{F}_1| = |\overline{F}_2| = F$ și $|\overline{F}_3| = F\sqrt{2}$ și un cuplu de moment $M = 2Fa$ ale cărei forțe acționează în planul celorlalte forțe (fig. 4.12). Cu ce este echivalent acest sistem? Se dă $OA = a$.

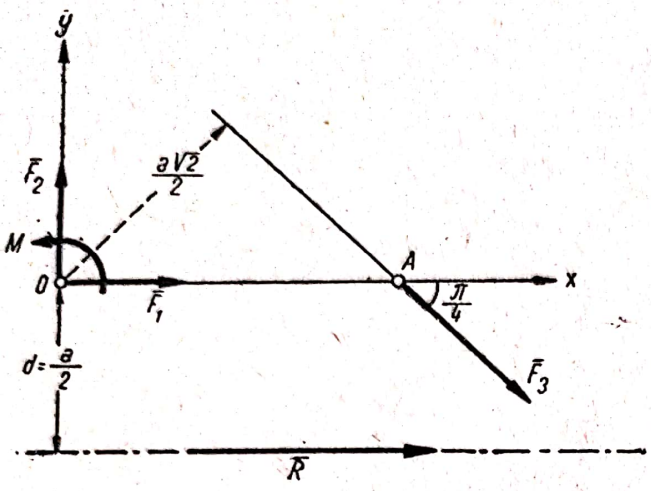


Fig. 4.12

Rezolvare. Reducînd sistemul în origine forța rezultantă va avea componentele:

$$X = 2F \qquad Y = 0,$$

iar momentul rezultant va fi:

$$M_0 = M - \frac{a\sqrt{2}}{2} F_3 = Fa,$$

$\overline{R} \neq 0$ sistemul se reduce la o forță unică egală cu rezultanta $\overline{R} = 2F\overline{i}$. Pentru a găsi suportul ei aplicăm teorema lui Varignon. Momentul rezultantei va fi:

$$Rd = M_0$$

unde d este distanța de la O la suportul rezultantei:

$$d = \frac{Fa}{2F} = \frac{a}{2}.$$

Suportul rezultantei (axa centrală) va fi paralelă cu $\overline{R}$ (cu axa Ox) și va avea ecuația $y = \frac{a}{2}$ sau $y = -\frac{a}{2}$. Cum $M_0 > 0$ trebuie aleasă soluția $y = -\frac{a}{2}$. Această soluție se putea găsi și direct din formula (4.9).

4.13. Una dintre forțele unui cuplu este aplicată în punctul A (5, 3, 10). Proiecțiile acestei forțe $\overline{F}_1$ pe axele de coordonate sînt: $X_1 = 12$, $Y_1 = -8$, $Z_1 = 0$. A doua forță $\overline{F}_2$ a cuplului este aplicată în punctul B (4, 4, 10). Să se determine proiecțiile forței $\overline{F}_2$ pe axe, momentul cuplului și unghiurile α, β, γ formate de el cu axele.

Rezolvare. Din condiția $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 = 0$ rezultă:

$$X_2 = -X_1 = -12$$
$$Y_2 = -Y_1 = +8$$
$$Z_2 = -Z_1 = 0.$$

Momentul cuplului este momentul rezultant al celor două forțe în raport cu un punct oarecare, de exemplu cu punctul A (5, 3, 10).

Scanned with OKEN Scanner

Cum momentul forței $\overline{F}_1$ este nul, iar $\overline{AB} = -\overline{i} + \overline{j}$ rezultă:

$$\overline{M} = \overline{AB} \times \overline{F}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -12 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 4\,\overline{k}$$

Prin urmare modulul momentului este 4, direcția paralelă cu axa Oz, sensul același cu al axei Oz, $\alpha = \beta = 90°$, $\gamma = 0$.

4.14. Asupra unui cub de latură a acționează cuplurile din figura 4.14. Știind că $|\overline{P}_i| = P$ și că punctele A, B, C, D, E, F, G și H se găsesc în mijlocul laturilor respective se cere:

a) Să se reducă sistemul cuplurilor $(\overline{P}_1, -\overline{P}_1)$, $(\overline{P}_2, -\overline{P}_2)$ și $(\overline{P}_3, -\overline{P}_3)$.

b) Să se reducă sistemul tuturor cuplurilor care acționează asupra cubului.

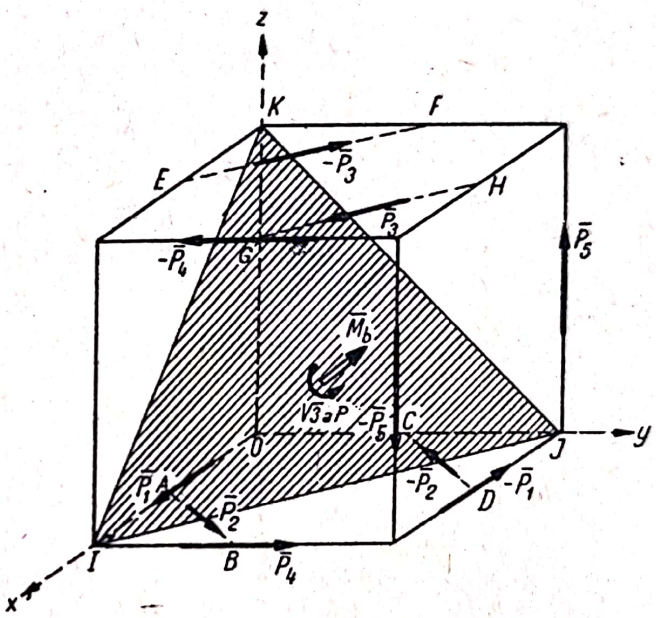


Fig. 4.14

Rezolvare. a) Cele 3 cupluri acționează în plane paralele cu planul xOy; sistemul se va reduce la un cuplu de moment:

$$\overline{M}_a = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3$$

unde $\overline{M}_i$ este momentul cuplului $(\overline{P}_i, -\overline{P}_i)$, situat tot într-un plan paralel cu xOy

$$\overline{M}_1 = aP\overline{k} \qquad \overline{M}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,aP\overline{k} \qquad \overline{M}_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,aP\overline{k}$$

deci:

$$\overline{M}_a = aP\overline{k}.$$

b) Cum:

$$\overline{M}_4 = aP\overline{i} \qquad \overline{M}_5 = aP\overline{j}$$

sistemul se reduce la un cuplu de moment:

$$\overline{M}_b = \sum_{i=1}^{5} \overline{M}_i = aP\overline{i} + aP\overline{j} + aP\overline{k}$$

și va fi situat într-un plan perpendicular pe $\overline{M}_b$ (de ex. planul IJK din figură). Modulul momentului este:

$$M_b = \sqrt{3}\,aP.$$

Scanned with OKEN Scanner

4.15. Se dau 12 forțe de modul P și dirijate după muchiile unui octaedru regulat de muchii egale cu a.

Să se reducă aceste forțe la elementul mecanic corespunzător.

Rezolvare. Studiind sistemul de forțe dat și ținînd seama că în cazul octaedrului regulat poligoanele $ABCD$, $AECF$, $BEDF$ sînt pătrate de latură a, se observă:

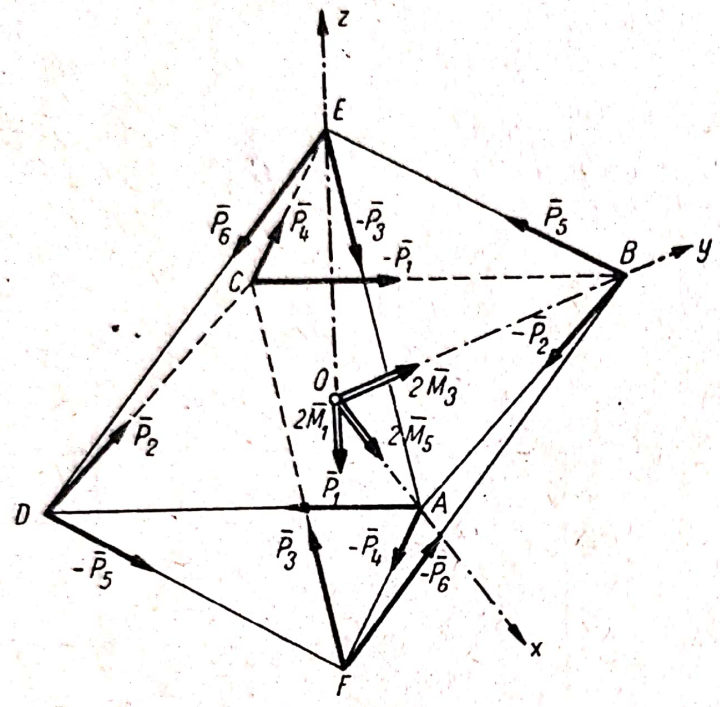


Fig. 4.15

— Forța rezultantă $\bar{R}$ este nulă, pe fiecare dintre cele 3 pătrate acționînd cîte două cupluri.

— Momentul rezultant $\bar{M}_0$ este vectorul rezultant al momentelor celor 6 cupluri, egale fiecare în modul cu Pa dar avînd direcții diferite.

Pentru reprezentarea lor considerăm în punctul O sistemul de axe din figura 4.15 și anume:

Ox pe direcția OA

Oy pe direcția OB

Oz pe direcția OE

$2\,\bar{M}_1$ este momentul celor două cupluri de pe laturile pătratului $ABCD$

$2\,\bar{M}_3$ — pentru pătratul $AECF$

$2\,\bar{M}_5$ — pentru pătratul $BEDF$.

Dar $M_1 = M_3 = M_5 = Pa$; prin urmare momentul rezultant va fi:

$$\bar{M}_0 = 2Pa\bar{i} + 2Pa\bar{j} - 2Pa\bar{k}$$

și va avea modulul:

$$M_0 = 2\ P\ a\sqrt{3}\ .$$

Sistemul de cupluri poate fi înlocuit cu un cuplu de moment $M_0 = 2\,P\,a\sqrt{3}$ situat într-un plan normal pe vectorul $\bar{M}_0$, de exemplu în planul ABF sau în planul CDE.

Calea geometrică pe care s-a rezolvat această problemă a dus la rezultat cu foarte puține calcule. Se poate utiliza și metoda analitică însă calculele sînt ceva mai lungi.

4.16. Asupra axei unui motor acționează forțele și cuplul indicate în figura 4.16.

Să se reducă acest sistem în raport cu punctul A.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Observînd sistemul de forțe dat (lăsînd la o parte cuplul) constatăm că el se echilibrează: forțele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ sînt egale și direct opuse iar forța $\bar{F}_5$ este egală și direct opusă cu rezultanta forțelor paralele $\bar{F}_3$ și $\bar{F}_4$.

În concluzie sistemul de forțe inclusiv cuplul se reduce în orice punct la cuplul de momentul dat $M = 2$ tfm.

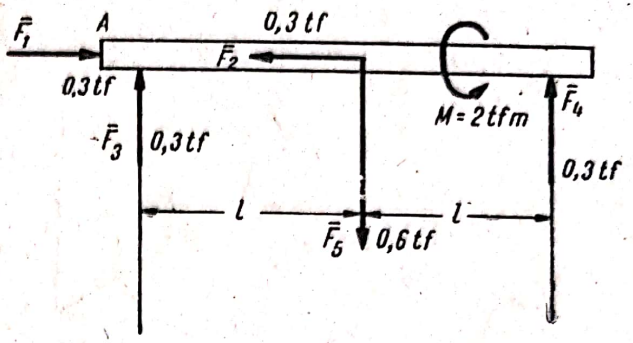


Fig. 4.16

4.17. Să se demonstreze că proiecțiile momentelor rezultante ale unui sistem de forțe oarecare față de două puncte arbitrare A și B pe axa AB sînt egale.

Rezolvare. Presupunem că în punctul A sistemul se reduce la torsorul $\bar{R}$ și $\bar{M}_A$, iar în punctul B la torsorul $\bar{R}$ și $\bar{M}_B$, unde conform relației (4.5):

$$\bar{M}_B = \bar{M}_A + \overline{BA} \times \bar{R}.$$

Notînd cu $\bar{u}$ versorul dreptei AB și înmulțind scalar cu $\bar{u}$ relația de mai sus:

$$\bar{M}_B \cdot \bar{u} = \bar{M}_A \cdot \bar{u} + (\overline{BA} \times \bar{R}) \cdot \bar{u},$$

$\bar{u}$ fiind versorul dreptei $\overline{AB}$ produsul mixt $(\overline{BA} \times \bar{R}) \cdot \bar{u} = 0$ pentru că vectorii $\overline{BA}$ și $\bar{u}$ sînt coliniari și deci:

$$\bar{M}_B \cdot \bar{u} = \bar{M}_A \cdot \bar{u}$$

c.c.t.d.

4.18. Fiind date, momentul rezultant $\bar{M}_A$ al unui sistem oarecare de forțe, în raport cu un punct A și direcția momentului rezultant $\bar{M}_B$ al aceluiași sistem în raport cu un alt punct B, să se determine momentul $\bar{M}_B$.

Rezolvare. Notăm $\bar{u}$ versorul vectorului AB, $\bar{b}$ versorul momentului $\bar{M}_B$. Cu ajutorul relației (4.5):

$$\bar{M}_B = \bar{M}_A + \overline{BA} \times \bar{R}$$

s-a demonstrat în problema 4.17 că:

$$\bar{M}_B\, \bar{u} = \bar{M}_A\, \bar{u}. \qquad (1)$$

Însă $\bar{M}_B = M_B\, \bar{b}$ deci:

$$M_B = \frac{\bar{M}_A \bar{u}}{\bar{b}\, \bar{u}}$$

deci momentul căutat este:

$$\bar{M}_B = \frac{\bar{M}_A \bar{u}}{\bar{b}\, \bar{u}}\, \bar{b}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Acestei soluții vectoriale îi corespunde o reprezentare geometrică. Proprietatea (1) arată că momentele $\overline{M}_A$ și $\overline{M}_B$ au aceeași proiecție pe dreapta AB. $\overline{M}_A$ fiind cunoscut, proiecția $\overline{M}_A\,\overline{u} = Aa$ pe dreapta AB este de asemenea cunoscută. În punctul B cunoaștem proiecția $\overline{M}_B\,\overline{u} = Bb = Aa$ a momentului $\overline{M}_B$ pe dreapta AB și direcția lui $\overline{M}_B$. Intersecția între planul normal în b pe dreapta AB și suportul lui $\overline{M}_B$ determină extremitatea vectorului moment $\overline{M}_B$ (fig. 4.18).

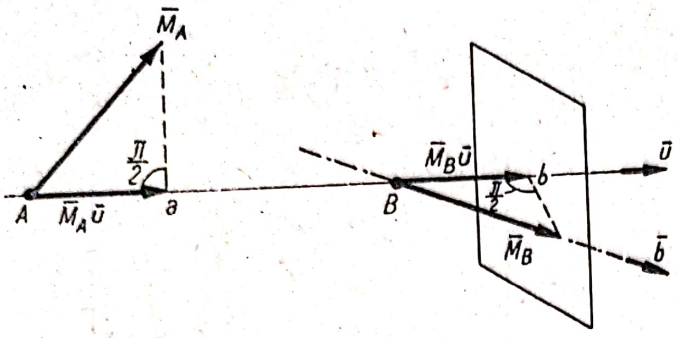


Fig. 4.18

4.19. Se dă un sistem de forțe oarecare dirijate oricum în spațiu. Să se arate că vectorul $\overline{\delta}$ aplicat în 0 și definit de relația:

$$\overline{OA} = \overline{\delta} = \frac{\overline{R} \times \overline{M}_0}{R^2}$$

determină un punct A al axei centrale a sistemului de forțe dat ($\overline{R}$ și $\overline{M}_0$ sînt forța rezultantă și momentul rezultant în raport cu punctul O).

Rezolvare. Pentru a arăta că A este un punct al axei centrale este necesar și suficient de exemplu să se arate că $\overline{M}_A = \lambda\overline{R}$ (adică $\overline{M}_A$ este paralel cu $\overline{R}$).

Într-adevăr conform (4.5):

$$\overline{M}_A = \overline{M}_0 - \overline{\delta} \times \overline{R} = \overline{M}_0 - \frac{1}{R^2}(\overline{R} \times \overline{M}_0) \times \overline{R} =$$

$$= \overline{M}_0 - \frac{1}{R^2}[R^2\,\overline{M}_0 - (\overline{R}\,\overline{M}_0)\,\overline{R}] = \frac{\overline{R}\,\overline{M}_0}{R^2}\,\overline{R}.$$

Notînd scalarul $\frac{\overline{R}\,\overline{M}_0}{R^2} = \lambda$ rezultă:

$$\overline{M}_A = \lambda\overline{R}.$$

Observație. Conform (4.8):

$$\overline{M}_A = \frac{\overline{R}\,\overline{M}_0}{R^2}\,\overline{R} = \overline{M}_r$$

adică momentul din punctul A este egal cu momentul minim.

4.20. Fiind dat un sistem format din două forțe $\overline{P}$ și $\overline{Q}$ să se arate că perpendiculara comună pe suporturile forțelor intersectează axa centrală a sistemului sub un unghi drept.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Fie OA perpendiculara comună. Reducem forțele în punctul O:

$$\overline{R} = \overline{P} + \overline{Q}$$

$$\overline{M}_0 = \overline{OA} \times \overline{Q}.$$

(Vectorii $\overline{R}$ și $\overline{M}_0$ sînt perpendiculari pe $\overline{OA}$ [$\overline{R} \cdot \overline{OA} = \overline{P} \cdot \overline{OA} + \overline{Q} \cdot \overline{OA} = 0$; $\overline{M}_0 \cdot \overline{OA} = (\overline{OA} \times \overline{Q}) \cdot \overline{OA} = 0$]. Putem alege deci sistemul de axe din figura 4.20, axa Ox avînd direcția perpendicularei comune, axa Oy direcția rezultantei, iar vectorul $\overline{M}_0$ fiind în planul yOz, deci:

$$\overline{R} = R\overline{j}$$

$$\overline{M}_0 = M_y\overline{j} + M_z\overline{k}$$

unde $M_y = M_r$ este momentul minim.

Ecuațiile (4.6) ale axei centrale sînt:

$$\frac{zR}{0} = \frac{M_r}{R} = \frac{M_z - xR}{0}$$

din care deducem:

$$z = 0 \qquad x = \frac{M_z}{R}.$$

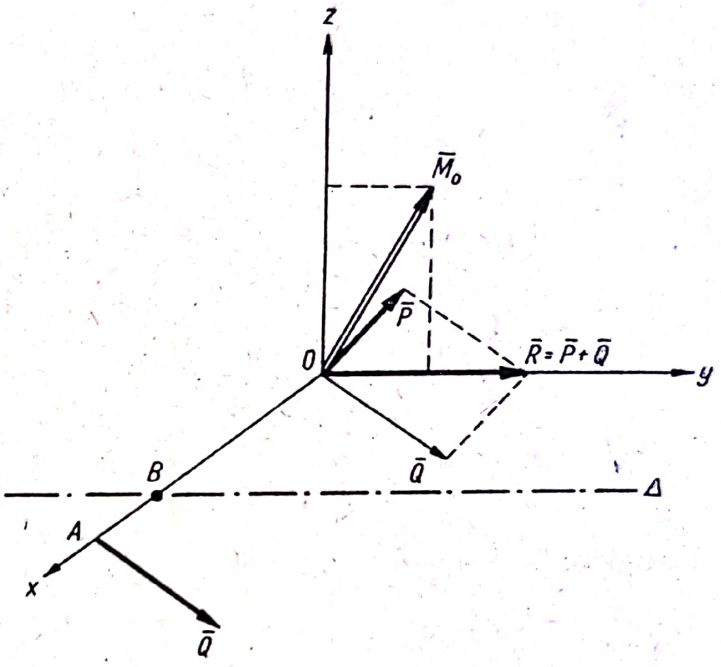


Fig. 4.20

Axa centrală (Δ) este paralelă cu axa Oy (cu direcția rezultantei) deci perpendiculară pe OA, iar punctul $B\left(\frac{M_z}{R}, 0, 0\right)$ se găsește atît pe axa centrală cît și pe perpendiculara comună OA, fiind punctul de intersecție al lor.

4.21. Un sistem de forțe (S) este alcătuit din două sisteme de forțe (S_1) și (S_2) avînd axele centrale concurente într-un punct O. Știind că sistemele (S_1) și (S_2) se reduc în punctul O la torsorii $(\overline{R}_1, \overline{M}_1)$ și $(\overline{R}_2, \overline{M}_2)$ și că unghiul dintre $\overline{R}_1$ și $\overline{R}_2$ este α se cere:

— cu ce este echivalent sistemul (S)?

— ce condiții trebuie îndeplinite ca axa centrală a sistemului (S) să treacă prin punctul O?

Rezolvare. Punctul O găsindu-se pe axele centrale ale sistemelor (S_1) și (S_2) vectorii $\overline{R}_1$ și $\overline{M}_1$ precum și $\overline{R}_2$ și $\overline{M}_2$ sînt coliniari, momentele rezultante $\overline{M}_1$ și $\overline{M}_2$ fiind momentele minime.

Scanned with OKEN Scanner

Cu sistemul de axe ales în figura 4.21 reducînd sistemul (S) în punctul O se obține torsorul:

$$\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2 = (R_1 + R_2 \cos \alpha)\,\bar{i} + R_2 \sin \alpha\,\bar{j}$$

$$\bar{M}_0 = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 = (M_1 + M_2 \cos \alpha)\,\bar{i} + M_2 \sin \alpha\,\bar{j}.$$

Trinomul invariant este:

$$\bar{R}\,\bar{M}_0 = R_1 M_1 + R_2 M_2 + (R_1 M_2 + R_2 M_1) \cos \alpha.$$

1. Ca sistemul (S) să fie echivalent cu zero trebuie ca $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_0 = 0$, adică $\bar{R}_1 = -\bar{R}_2$ și $\bar{M}_1 = -\bar{M}_2$, cei doi torsori să fie egali și opuși ($\alpha = \pi$).

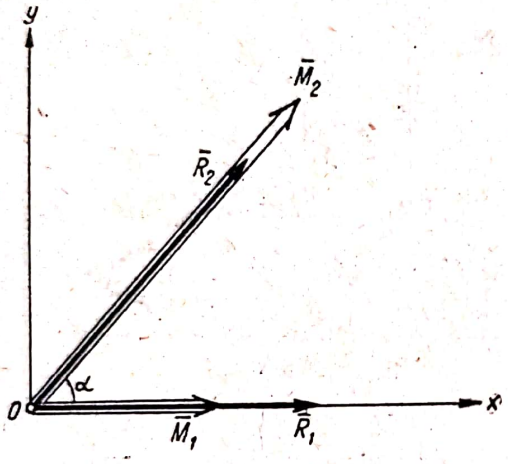


Fig. 4.21

2. Ca sistemul (S) să fie echivalent cu un cuplu trebuie ca $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_0 = 0$ adică $\bar{R}_1 = -\bar{R}_2$ dar $\bar{M}_1 \neq -\bar{M}_2$. Dacă $\bar{R}_1 \neq 0$, $\alpha = \pi$ vectorii rezultanți sînt egali și opuși, iar vectorii moment rezultant au aceeași direcție fără a fi egali și opuși.

Dacă $\bar{R}_1 = \bar{R}_2 = 0$ unghiul α poate avea orice valoare, în acest caz sistemele (S_1) și (S_2) nu au axă centrală reducîndu-se la două cupluri de moment $\bar{M}_1$ și $\bar{M}_2$, iar (S) va fi și el echivalent cu un cuplu de moment $\bar{M}_0 = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$.

Evident în aceste cazuri (S) nu va avea axă centrală.

3. Ca sistemul (S) să fie echivalent cu o forță unică trebuie ca $\bar{R} \neq 0$, $\bar{R}\bar{M}_0 = 0$, adică $\bar{R}_1 \neq -\bar{R}_2$ și $R_1 M_1 + R_2 M_2 + (R_1 M_2 + R_2 M_1) \cos \alpha = 0$. Ca axa centrală a sistemului să treacă prin punctul O va trebui ca $\bar{M}_0 = 0$ adică fie $\bar{M}_1 = -\bar{M}_2$ (în acest caz $\alpha = 0$ sau $\alpha = \pi$), fie $\bar{M}_1 = \bar{M}_2 = 0$ [în acest caz (S_1), (S_2) se reduc la forțele $\bar{R}_1$ și $\bar{R}_2$ aplicate pe axa lor centrală, iar (S) se reduce la forța $\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2$].

4. Dacă nici una dintre condițiile precedente nu este îndeplinită, adică dacă $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_0 \neq 0$, $\bar{R}\,\bar{M}_0 \neq 0$ sistemul se reduce la o forță și un cuplu.

Pentru ca axa centrală a sistemului să treacă prin punctul O va trebui ca vectorii $\bar{R}$ și $\bar{M}_0$ să fie coliniari (pe axa centrală forța rezultantă și momentul rezultant sînt coliniari), deci:

$$\bar{R} \times \bar{M}_0 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ R_1 + R_2 \cos \alpha & R_2 \sin \alpha & 0 \\ M_1 + M_2 \cos \alpha & M_2 \sin \alpha & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

sau:

$$\sin \alpha \, [R_1 M_2 - R_2 M_1] = 0.$$

Soluțiile acestei ecuații sînt:

a) $\sin \alpha = 0$: $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$, adică axele centrale ale sistemelor (S_1) și (S_2) sînt coliniare;

b) $\frac{R_1}{R_2} = \frac{M_1}{M_2}$ adică vectorii $\overline{R}$ și $\overline{M}_0$ sînt coliniari. avînd componente proporționale pe direcțiile definite de $\overline{R}_1$ și $\overline{R}_2$.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

4.22. Se dau 12 forțe egale ca mărime cu P și dirijate după muchiile unui cub de latură a.

Se cere:

a) Să se reducă acest sistem în punctul O.

b) Cu ce este echivalent sistemul?

c) Ecuațiile axei centrale și poziția punctelor I_1 și I_2 unde axa centrală intersectează fețele cubului.

Răspuns. a) $\overline{R} = -2P\overline{i} + 2P\overline{j} + 4P\overline{k}$, $\overline{M}_0 = 2Pa\,\overline{i} - 2Pa\overline{j} + 4Pa\overline{k}$. b) Cum $\overline{R} \cdot \overline{M}_0 = 8aP^2$ sistemul este echivalent cu o forță $\overline{R}$ aplicată pe axa centrală și cu un cuplu de moment $M_r = -\frac{2aP}{3}\overline{i} + \frac{2aP}{3}\overline{j} + \frac{4aP}{3}\overline{k}$.

c) Ecuațiile axei centrale sînt:

$$\frac{a - 2y + z}{-1} = \frac{-a + z + 2x}{1} = \frac{2a - x - y}{2},$$ iar

$I_1\left(\frac{2a}{3}, \frac{2a}{3}, 0\right)$ și $I_2\left(\frac{a}{3}, a, \frac{2a}{3}\right)$.

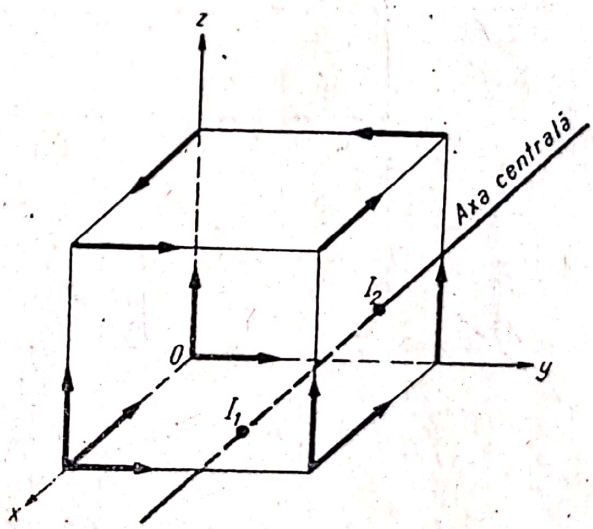


Fig. 4.22

4.23. Se dau trei forțe:

P_1 (3, 5, 4) cu punctul de aplicație (0, 4, 2)

P_2 (−2, 2, −6) cu punctul de aplicație (1, −1, 3)

P_3 (0, 2, 1) cu punctul de aplicație (6, 10, 8).

Să se reducă acest sistem în origine.

Răspuns. $\overline{R} = \overline{i} + 9\overline{j} - \overline{k}$; $\overline{M}_0 = 0$ (sistem echivalent cu o forță $\overline{R}$, axa centrală trecînd prin punctul O).

Scanned with OKEN Scanner

4.24. Şase cupluri acţionează într-un plan. Mărimile forţelor lor sînt: $5F$, $3F$, $2F$, $3F$, $\frac{1}{2}F$ şi F, iar braţele corespunzătoare: $2a$, a, $4a$, x, $6a$ şi $3a$. Să se afle braţul x, cunoscînd că sistemul acestor cupluri este echivalent cu zero şi că primele trei cupluri au momente pozitive, iar celelalte cupluri au momentele negative.

Rezolvare. $x = 5a$, momentul cuplului fiind negativ.

4.25. Să se compună patru cupluri aşezate pe cele patru feţe ale unui tetraedru regulat ştiind că momentele lor sînt egale ca mărime şi orientate spre interiorul tetraedrului.

Răspuns. Sistemul de cupluri este echivalent cu zero.

4.26. Trei forţe $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{S}$ acţionează în lungul muchiilor $EF = a$, $GB = b$, $AD = c$ ale unui paralelipiped dreptunghi. Să se afle condiţia ca sistemul să fie echivalent cu o forţă unică.

Indicaţie. Se vor pune condiţiile: $\bar{R} \neq 0$ (deci măcar una dintre forţele P, Q şi S sînt nenule) şi $\bar{R} \cdot \bar{M}_0 = 0$, de unde rezultă relaţia:

$$aQS + bPS + cPQ = 0.$$

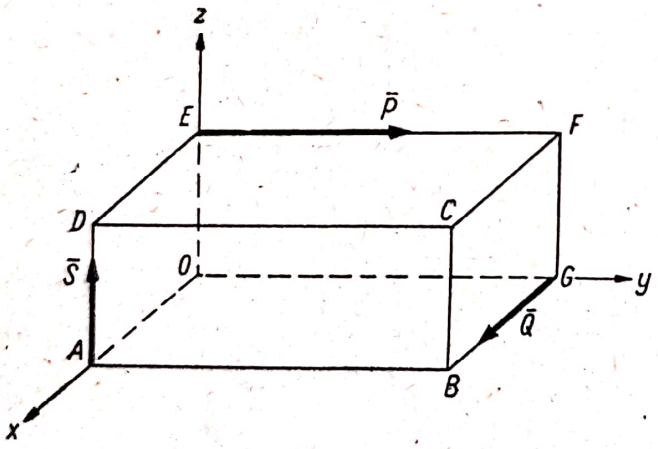


Fig. 4.26

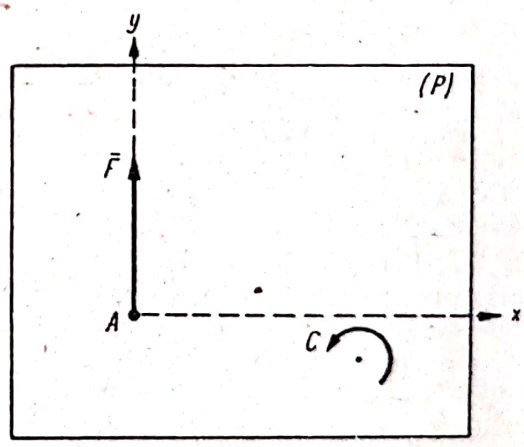


Fig. 4.27

4.27. În planul (P) acţionează forţa $\bar{F}$ aplicată în punctul A şi cuplul C de moment $M = 3aF$ (fig. 4.27).

Se cere să se găsească locul geometric al punctelor în care sistemul se reduce la o forţă.

Indicaţie. Locul geometric al punctelor în care făcînd reducerea sistemului dat, el se reduce la o forţă este *axa centrală* a sistemului respectiv care, deoarece $\bar{R} \cdot \bar{M}_0 = 0$, va reprezenta suportul rezultantei. Ecuaţia axei centrale este $x = 3a$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul V

FORȚE PARALELE. CENTRUL FORȚELOR PARALELE. CENTRUL MASELOR

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Un sistem de forțe $\overline{F}_i$ care au toate aceeași direcție Δ de versor $\overline{u}$ formează un sistem de forțe paralele:

$$\overline{F}_i = F_i\,\overline{u} \tag{5.1}$$

unde F_i este scalarul forței.

Un asemenea sistem poate fi echivalent cu zero, cu un cuplu sau cu o forță unică (rezultantă). În acest caz forța rezultantă $\overline{R}$ are direcția Δ, scalarul ei fiind egal cu suma scalarilor forțelor:

$$\overline{R} = (\Sigma F_i)\,\overline{u}\,. \tag{5.2}$$

Punctul fix prin care trece axa centrală a unui sistem de forțe paralele cînd forțele își schimbă direcția păstrînd neschimbate intensitatea și punctele de aplicație se numește *centrul forțelor paralele*. Vectorul de poziție al centrului forțelor paralele este:

$$\overline{\rho} = \frac{\Sigma F_i \overline{r}_i}{\Sigma F_i} \tag{5.3}$$

în care $\overline{r}_i$ este vectorul de poziție al punctului de aplicație al forței. Coordonatele centrului forțelor paralele sînt:

$$\xi = \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i} \qquad \eta = \frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i} \qquad \zeta = \frac{\Sigma F_i z_i}{\Sigma F_i} \tag{5.4}$$

în care $\overline{\rho} = \xi\overline{i} + \eta\overline{j} + \zeta\overline{k}$ și $\overline{r}_i = x_i\,\overline{i} + y_i\,\overline{j} + z_i\,\overline{k}$.

Poziția centrului forțelor paralele nu se schimbă dacă toate forțele se măresc sau se micșorează în același raport.

În cazul particular a două forțe paralele $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ centrul forțelor paralele se găsește pe linia care unește punctele de aplicație A_1 și A_2 ale celor două forțe, iar poziția lui se determină foarte simplu aplicînd teorema lui Varignon (momentul rezultant este egal cu momentul rezultantei).

Centrul maselor (*de greutate*) al unui sistem de puncte materiale (sau al unui corp) este centrul forțelor paralele care acționează asupra fiecărui punct al sistemului (al corpului) datorită atracției gravitației. Vectorul de poziție al centrului maselor este:

$$\overline{\rho} = \frac{\Sigma m_i \overline{r}_i}{m_i} \tag{5.5}$$

și coordonatele sale sînt:

$$\xi = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} \qquad \eta = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i} \qquad \zeta = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i} \tag{5.6}$$

unde m_i este masa punctului P_i avînd vectorul de poziție $\overline{r}_i = x_i\,\overline{i} + y_i\,\overline{j} + z_i\,\overline{k}$.

Scanned with OKEN Scanner

Sumele $\Sigma m_i \bar{r}_i$ și $\Sigma m_i x_i$, $\Sigma m_i y_i$, $\Sigma m_i z_i$ poartă numele de *momente statice* în raport cu punctul O respectiv cu planele Oyz, Ozx, Oxy. Din (5.5) și (5.6) se pot obține relațiile:

$$M\bar{\rho} = \Sigma m_i \bar{r}_i \text{ și } M\xi = \Sigma m_i x_i, \quad M\eta = \Sigma m_i y_i, \quad M\zeta = \Sigma m_i z_i \tag{5.7}$$

unde $M = \Sigma m_i$ este masa sistemului. Aceste relații sînt cunoscute sub numele de *teorema momentelor statice*, momentul static al unui sistem de puncte în raport cu un punct (sau un plan) este egal cu momentul static în raport cu acel punct (sau acel plan) ca și cum întreaga masă ar fi aplicată în centrul maselor.

În cazul unui corp continuu expresiile (5.5) și (5.6) devin la limită:

$$\bar{\rho} = \frac{\int \bar{r}\, dm}{\int dm} \tag{5.8}$$

și

$$\xi = \frac{\int x\, dm}{\int dm} \qquad \eta = \frac{\int y\, dm}{\int dm} \qquad \zeta = \frac{\int z\, dm}{\int dm} \tag{5.9}$$

dm fiind elementul de masă și x, y, z coordonatele centrului maselor al elementului considerat.

În cazul unui corp omogen în formulele (5.5) și (5.6) se poate înlocui masa m_i prin volumul V_i sau prin aria A_i (în cazul plăcilor omogene) sau prin lungimea s_i (în cazul liniilor sau barelor omogene). Analog în formulele (5.8) și (5.9) în cazul corpurilor, plăcilor și barelor omogene elementul de masă dm poate fi înlocuit respectiv prin dV, dA sau ds.

Dacă un corp omogen are un plan, o axă sau un centru de simetrie, centrul maselor se găsește în planul, pe axa sau în centrul de simetrie.

În cazul unui corp care se poate considera ca rezultînd din reunirea sau scoaterea unor porțiuni din corp ale căror centre ale maselor sînt cunoscute, pentru determinarea poziției centrului maselor se pot aplica formulele (5.5) și (5.6). În aceste formule $\bar{r}_i = x_i \bar{i} + y_i \bar{j} + z_i \bar{k}$ va fi vectorul de poziție al centrului maselor al porțiunii de masă m_i, masa m_i fiind considerată negativă pentru porțiunile care se scot.

Teoremele lui Guldin-Pappus. I. Aria A generată prin rotația unei curbe plane de lungime s în jurul unei axe Ox din planul ei care nu intersectează curba este:

$$A = 2\pi\eta s \tag{5.10}$$

unde η este ordonata centrului maselor (fig. 5. *a*).

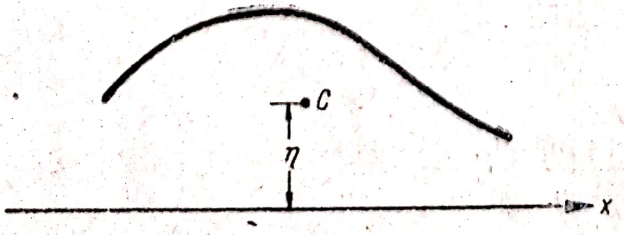


Fig. 5. *a*

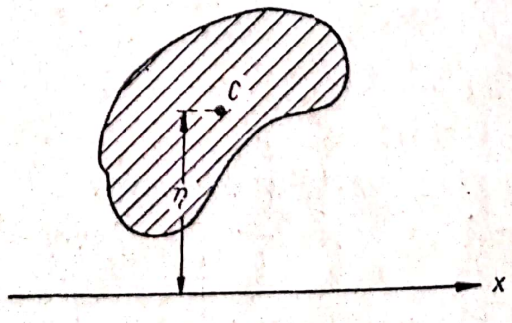


Fig. 5. *b*

Scanned with OKEN Scanner

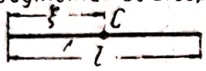
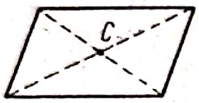
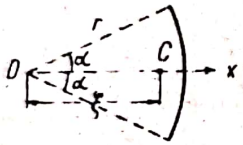
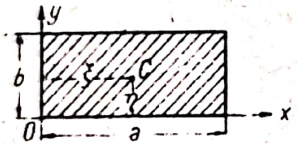
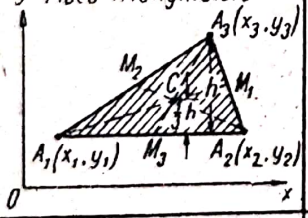
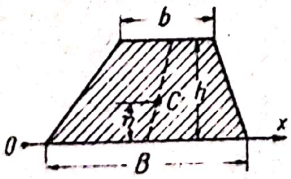
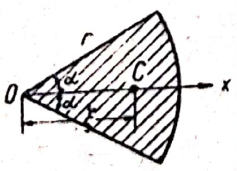
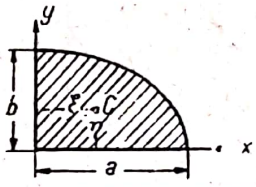
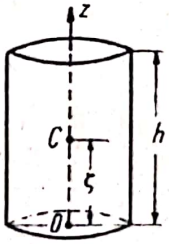
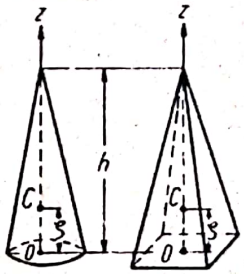
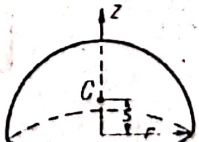
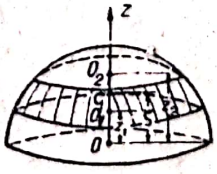
II. Volumul V al corpului generat prin rotaţia unei suprafeţe plane de arie A în jurul unei axe Ox care nu o traversează este:

$$V = 2\pi\eta A \tag{5.11}$$

unde η este ordonata centrului maselor (fig. 5. *b*).

În tabela (5.1) sînt date coordonatele centrelor maselor ale unor corpuri omogene uzuale.

Tabela 5.1

Nr.	Corpul	Coordonatele centrului de greutate
1.	Segmentul de dreaptă 	$\xi = \frac{l}{2}$
2.	Conturul paralelogramului 	La intersecţia diagonalelor
3	Arcul de cerc 	$\xi = r\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ (α în radiani) Pentru semicerc $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\xi = \frac{2r}{\pi}$
4	Placa dreptunghiulară 	$\xi = \frac{a}{2}$ $\eta = \frac{b}{2}$
5	Placa triunghiulară 	La intersecţia medianelor $CM_i = \frac{1}{3}A_iM_i$ $\xi = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$ $\eta = \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$
6	Placa trapezoidală 	C se găseşte pe dreapta care uneşte mijloacele bazelor $\eta = \frac{h}{3}\cdot\frac{B+2b}{B+b}$
7	Sectorul circular 	$\xi = \frac{2r}{3}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ (α în radiani) Pentru placa semicirculară $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\xi = \frac{4r}{3\pi}$
8	Sfertul de elipsă 	$\xi = \frac{4a}{3\pi}$ $\eta = \frac{4b}{3\pi}$
9	Cilindrul 	$\zeta = \frac{h}{2}$
10	Conul şi piramida 	$\zeta = \frac{h}{4}$
11	Emisfera 	$\zeta = \frac{3}{8}r$
12.	Suprafaţa zonei sferice 	$\zeta = \frac{z_1+z_2}{2}$

Scanned with OKEN Scanner

5.1. Să se determine rezultanta și centrul forțelor paralele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ din figura 5.1. Să se determine rezultanta și centrul forțelor paralele $\bar{F}_3$ și $\bar{F}_4$ din aceeași figură. Știind că $F_1 = F_3 = F$, $F_2 = F_4 = 3F$, să se explice rezultatele obținute.

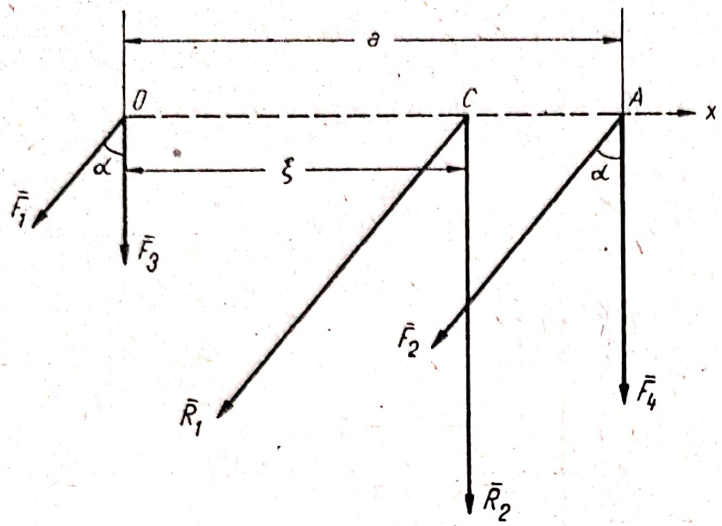


Fig. 5.1

Rezolvare. Conform (5.2):

$$R_1 = F_1 + F_2 = 4F$$

$$R_2 = F_3 + F_4 = 4F.$$

Conform (5.4):

$$\xi_1 = \frac{F_1 \cdot 0 + F_2\, a}{F_1 + F_2} = \frac{3}{4}\, a$$

$$\xi_2 = \frac{F_3 \cdot 0 + F_4\, a}{F_3 + F_4} = \frac{3}{4}\, a.$$

Centrul forțelor paralele este în același punct întrucît el nu depinde de orientarea forțelor ci numai de scalarul lor și de coordonatele punctelor de aplicație care în problema dată au fost aceleași.

Abscisa centrului forțelor paralele se putea determina și cu ajutorul teoremei lui Varignon. Vom egala momentul rezultant M_0 cu momentul rezultantei față de același punct O:

$$R_1 \xi = F_2\, a$$

de unde rezultă:

$$\xi = \frac{3}{4}\, a.$$

5.2. Să se găsească rezultanta și centrul forțelor paralele din figura 5.2 în următoarele ipoteze:

a) $|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2| = |\bar{F}_3| = P$

b) $|\bar{F}_1| = P \quad |\bar{F}_2| = 2P \quad |\bar{F}_3| = 3P.$

Rezolvare. Ipoteza a): conform (5.2), alegînd ca sens pozitiv pentru scalarii forțelor sensul forței $\bar{F}_3$, rezultă:

$$R = \Sigma F_i = -P - P + P = -P.$$

Rezultanta are modulul P și este orientată ca forțele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$. Conform (5.3):

$$\bar{\rho} = \frac{-P \cdot a\,\bar{i} - P \cdot a\,\bar{j} + P \cdot a\,\bar{k}}{-P} =$$

$$= a\,\bar{i} + a\,\bar{j} - a\,\bar{k}.$$

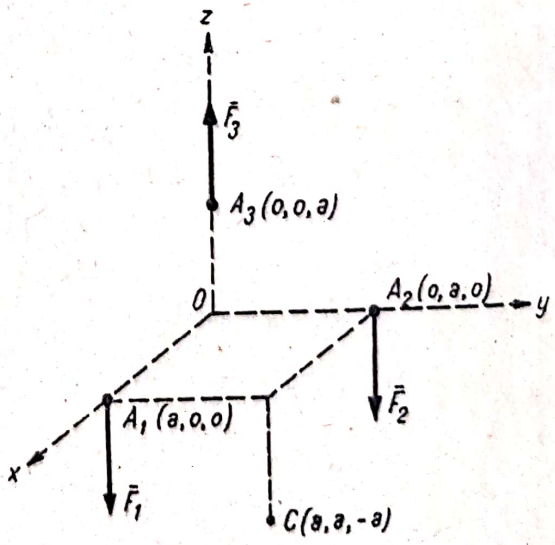


Fig. 5.2

Prin urmare centrul forțelor paralele este $C\ (a,\ a,\ -a)$.

Ipoteza b): conform (5.2):

$$R = \Sigma F_i = -P - 2P + 3P = 0.$$

Rezultanta fiind nulă sistemul de forțe se echilibrează sau se reduce la un cuplu. Momentul rezultant în raport cu un punct arbitrar, de exemplu cu originea O este:

$$\overline{M}_0 = -2Pa\,\overline{i} + Pa\,\overline{j} \neq 0.$$

Sistemul se reduce la un cuplu al cărui moment $\overline{M} = \overline{M}_0$.

5.3. Să se afle rezultanta și centrul forțelor paralele pentru sistemele din figurile 5.3 a — 5.3 d.

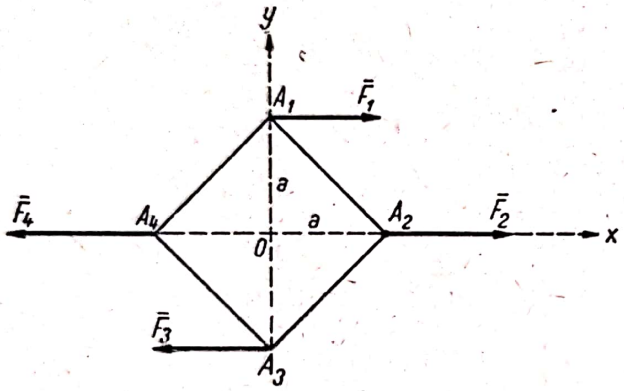


Fig. 5.3 a

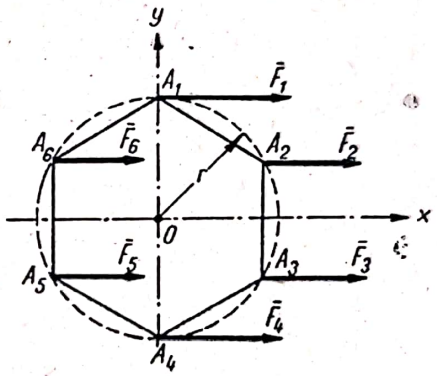


Fig. 5.3 b

În figura 5.3 a forțele $|\overline{F}_1| = |\overline{F}_3| = |\overline{F}_4| = P$ și $|\overline{F}_2| = 2P$ sînt aplicate în vîrfurile unui pătrat avînd diagonalele cu lungimea egală cu $2a$. În figura 5.3 b forțele $|\overline{F}_i| = P$ $(i = 1,2,\ldots,6)$ sînt aplicate în vîrfurile unui exagon regulat de latură r. În figura 5.3 c, forțele $|\overline{F}_i| = P$ $(i = 1,2,\ldots\ 5)$ sînt aplicate unui con avînd raza cercului de bază r și înălțimea h. În figura 5.3 d forțele $|\overline{F}_i| = iP$ $(i = 1,2,\ldots,8)$ sînt aplicate în vîrfurile unui cub de muchie a.

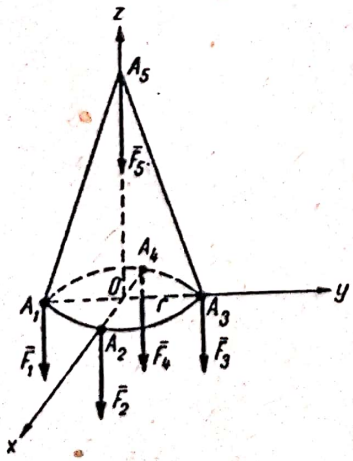


Fig. 5.3 c

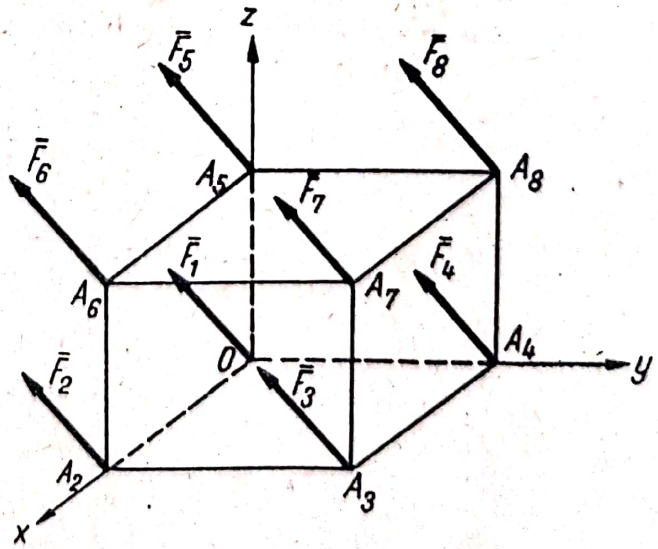


Fig. 5.3 d

Rezolvare. a) Conform (5.2) alegînd ca sens pozitiv pentru scalarii forțelor sensul forței $\bar{F}_2$

$$\bar{R} = (\Sigma F_i)\,\bar{i} = (P + 2P - P - P)\,\bar{i} = P\,\bar{i}.$$

Conform (5.4) cu axele din figura 5.3 *a* coordonatele centrului forțelor paralele sînt:

$$\xi = \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i} = \frac{P \cdot 0 + 2P \cdot a - P \cdot 0 + (-P)\,(-a)}{P} = 3a$$

$$\eta = \frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i} = \frac{P \cdot a + 2P \cdot 0 + (-P)\,(-a) - P \cdot 0}{P} = 2a.$$

b) Conform (5.2):

$$\bar{R} = (\Sigma F_i)\,\bar{i} = 6\,P\,\bar{i}$$

și conform (5.3) vectorul de poziție al centrului forțelor paralele este:

$$\bar{\rho} = \frac{\Sigma F_i \bar{r}_i}{\Sigma F_i} = 0.$$

Centrul forțelor paralele este în centrul cercului circumscris hexagonului.

c) $\bar{R} = (\Sigma F_i)\,(-\bar{k}) = 5P\,(-\bar{k})$.

$$\bar{\rho} = \frac{\Sigma F_i \bar{r}_i}{F_i} = \frac{-Pr\bar{j} + Pr\bar{i} + Pr\bar{j} - Pr\bar{i} + Ph\bar{k}}{5P} = \frac{h}{5}\,\bar{k}$$

prin urmare centrul forțelor paralele se află pe axa *Oz* la o cincime de înălțime față de origine.

d) Notînd cu $\bar{u}$ versorul direcției determinate de forțele $\bar{F}_i$ conform (5.2):

$$(\Sigma \bar{F}_i)\,\bar{u} = (P + 2P + \ldots + 8P)\,\bar{u} = \frac{(P + 8P)\,8}{2}\,\bar{u} = 36\,P\bar{u}.$$

Conform (5.3):

$$\bar{\rho} = \frac{\Sigma F_i \bar{r}_i}{\Sigma F_i} =$$

$$= \frac{P \cdot 0 + 2Pa\bar{i} + 3P(a\bar{i} + a\bar{j}) + 4Pa\bar{j} + 5Pa\bar{k} + 6P(a\bar{i} + a\bar{k}) + 7P(a\bar{i} + a\bar{j} + a\bar{k}) + 8P(a\bar{j} + a\bar{k})}{36\,P}$$

rezultă:

$$\bar{\rho} = \frac{a}{2}\,\bar{i} + \frac{11}{18}\,a\bar{j} + \frac{13}{18}\,a\,\bar{k}$$

adică:

$$\xi = \frac{a}{2} \qquad \eta = \frac{11}{18}\,a \qquad \zeta = \frac{13}{18}\,a.$$

Scanned with OKEN Scanner

5.4. O grindă de lungime $OA = l$ este încărcată: a) cu o sarcină uniform distribuită egală cu p pe unitatea de lungime;

b) cu o sarcină distribuită triunghiular, sarcina maximă pe unitatea de lungime fiind p;

c) cu o sarcină distribuită parabolic, sarcina maximă pe unitatea de lungime fiind p.

Să se determine forța rezultantă și poziția centrului forțelor paralele pentru aceste trei cazuri.

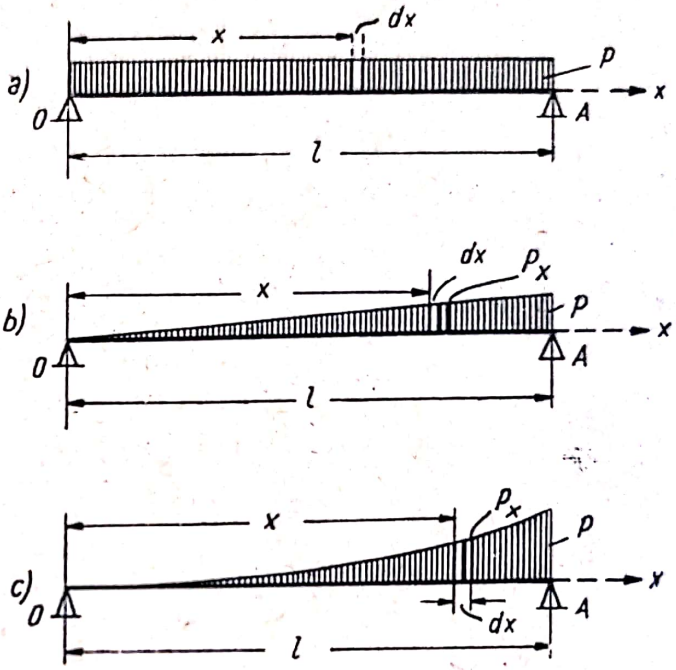


Fig. 5.4

Rezolvare. a) Considerînd un element de lungime dx sarcina aferentă acestui element este $dF = p\,dx$.

La limită formulele (5.2) ... (5.4) ce determină scalarul rezultantei și poziția centrului forțelor paralele devin:

$$R = \int dF \qquad (1)$$

$$\bar{\rho} = \frac{\int \bar{r}\,dF}{\int dF} \qquad (2)$$

$$\xi = \frac{\int x\,dF}{\int dF} \qquad \eta = \frac{\int y\,dF}{\int dF} \qquad \zeta = \frac{\int z\,dF}{\int dF} \qquad (3)$$

deci forța rezultantă este:

$$R = \int_0^l p\,dx = pl$$

iar abscisa centrului forțelor paralele este:

$$\xi = \frac{\int_0^l px\,dx}{\int_0^l p\,dx} = \frac{l}{2}$$

adică forța $R = p\,l$ se aplică la mijlocul grinzii.

b) În acest caz sarcina elementară este:

$$dF = p_x\,dx.$$

Din figură rezultă:

$$\frac{p}{l} = \frac{p_x}{x}$$

deci:

$$dF = \frac{px}{l}\,dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

Conform formulei (1) forța rezultantă este:

$$R = \int_0^l \frac{p\,x}{l}\,dx = \frac{pl}{2}$$

iar din formula (3) abscisa centrului forțelor paralele este:

$$\xi = \frac{\int_0^l \frac{p\,x^2}{l}\,dx}{\int_0^l \frac{p\,x}{l}\,dx} = \frac{2l}{3}$$

adică forța $R = \frac{pl}{2}$ se aplică la $l/3$ de capătul supus la încărcarea maximă.

c) Încărcarea p_x pe unitatea de lungime într-o secțiune situată la distanța x de capătul O al barei va fi de forma:

$$p_x = \alpha x^2$$

deoarece încărcarea variază parabolic. În capătul A al barei:

$$x = l \qquad p_x = p = \alpha\, l^2$$

de unde:

$$p_x = \frac{p\,x^2}{l^2}\,.$$

Încărcarea elementară este:

$$d\,F = p_x\,dx = \frac{p\,x^2}{l^2}\,dx$$

și înlocuind în formulele (1) și (3) se obține forța rezultantă:

$$R = \int_0^l \frac{p\,x^2}{l^2}\,dx = \frac{pl}{3}$$

și abscisa centrului forțelor paralele:

$$\xi = \frac{\int_0^l \frac{p\,x^3}{l^2}\,dx}{\int_0^l \frac{p\,x^2}{l^2}\,dx} = \frac{3l}{4}\,.$$

Observație. În toate aceste cazuri forța rezultantă:

$$R = \int_0^l d\,F = \int_0^l p_x\,dx$$

este egală ca mărime cu aria cuprinsă între axa Ox, curba p_x care determină legea de variație a sarcinii p_x, și paralelele duse prin punctele O și A la axa Oy, adică este egală cu ariile haşurate în figura 5.4.

Scanned with OKEN Scanner

Abscisa centrului forțelor paralele:

$$\xi = \frac{\int_0^l x p_x \, dx}{\int_0^l p_x \, dx}$$

este abscisa centrului maselor al ariei haşurate de mai sus.

5.5. Să se descompună o forță $\overline{F}$ în trei forțe coplanare paralele, avînd suporturile date așa ca $F_1 = F_2 + F_3$.

Se dau distanțele $CA_1 = a$, $CA_2 = b$, $CA_3 = c$ (fig. 5.5).

Rezolvare. Pentru determinarea scalarilor forțelor F_1, F_2 și F_3 sînt necesare trei ecuații; una dintre ele o dă direct problema:

$$F_1 = F_2 + F_3 \qquad (1)$$

A doua relație este dată de (5.2):

$$F = F_1 + F_2 + F_3 \qquad (2)$$

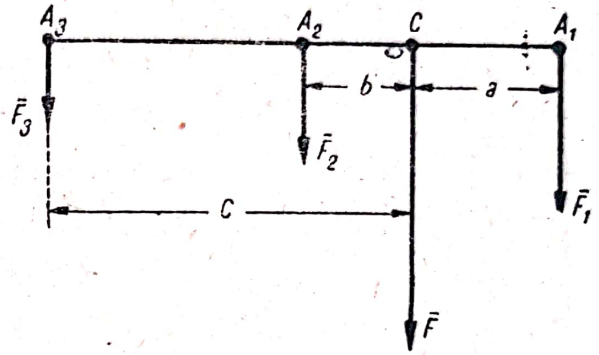


Fig. 5.5

A treia relație se obține știind că punctul C este punctul de aplicație al rezultantei F și deci conform teoremei lui Varignon momentul rezultant al celor trei componente este egal cu momentul rezultantei F în raport cu același punct C adică cu zero:

$$-F_1 a + F_2 b + F_3 c = 0. \qquad (3)$$

Rezolvîndu-se sistemul ecuațiilor (1), (2), (3) se obține:

$$F_1 = \frac{F}{2}$$

$$F_2 = \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{F}{2}$$

$$F_3 = \frac{a-b}{c-b} \cdot \frac{F}{2}.$$

5.6. Asupra unui triunghi dreptunghi OAB (fig. 5.6) așezat într-un plan orizontal acționează în punctul $C\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$ care este centrul său de greutate, o forță verticală $\overline{R}$. Să se descompună forța $\overline{R}$ în trei componente paralele cu ea, aplicate în vîrfurile triunghiului. Se dă $OA = a$, $OB = b$.

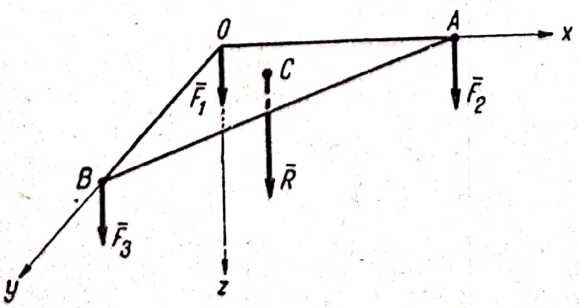


Fig. 5.6

Rezolvare. Aplicînd teorema lui Varignon în raport cu axele Ox și Oy rezultă:

$$F_3 \cdot b = R \cdot \frac{b}{3}$$

$$-F_2 a = -R \cdot \frac{a}{3}.$$

Ținînd seama de (5.2):

$$F_1 + F_2 + F_2 = R$$

rezultă:

$$F_1 = F_2 = F_3 = \frac{R}{3}.$$

5.7. Să se afle centrul maselor al conturului din figura 5.7, în care $AB = AD = R = a$. Aplicînd teorema lui Guldin să se afle suprafața laterală a solidului ce se obține prin rotirea acestui contur în jurul axei Oy.

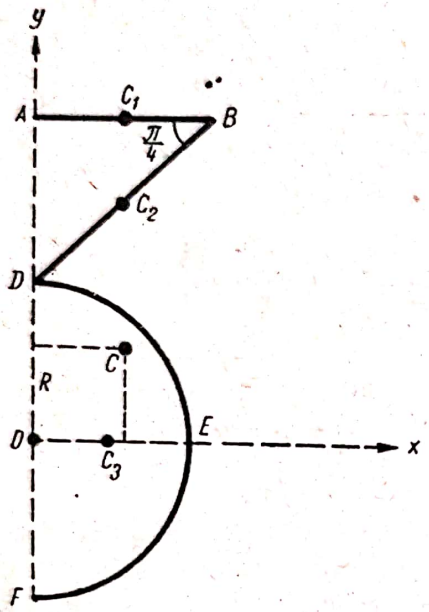


Fig. 5.7

Rezolvare. Se descompune conturul dat în: 1) segmentul AB de lungime $s_1 = a$; 2) segmentul BD de lungime $s_2 = a\sqrt{2}$; 3) semicercul DEF de lungime $s_3 = \pi a$. Pentru rezolvarea problemei se aplică formulele (5.6) în care masele m_i sînt înlocuite prin lungimile s_i ale părților componente:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{3} s_i x_i}{\sum_{i=1}^{3} s_i} \qquad \eta = \frac{\sum_{i=1}^{3} s_i y_i}{\sum_{i=1}^{3} s_i}.$$

Coordonatele x_i și y_i ale centrelor maselor ale părților componente sînt:

(C_1) $\quad x_1 = \frac{a}{2}, \quad y_1 = 2a$

(C_2) $\quad x_2 = \frac{a}{2}, \quad y_2 = \frac{3a}{2}$

(C_3) $\quad x_3 = \frac{2a}{\pi}, \quad y_3 = 0$ (v. tabela 5.1 nr. 3).

Pentru sistematizarea calculelor se poate folosi tabela de mai jos:

Nr.	x_i	y_i	s_i	$s_i x_i$	$s_i y_i$
1	$\frac{a}{2}$	$2a$	a	$\frac{a^2}{2}$	$2a^2$
2	$\frac{a}{2}$	$\frac{3a}{2}$	$a\sqrt{2}$	$a^2\frac{\sqrt{2}}{2}$	$3a^2\frac{\sqrt{2}}{2}$
3	$\frac{2a}{\pi}$	0	πa	$2a^2$	0
Σ	—	—	$a(1+\sqrt{2}+\pi)$	$\frac{a^2}{2}(5+\sqrt{2})$	$\frac{a^2}{2}(4+3\sqrt{2})$

Scanned with OKEN Scanner

Luînd din tabela de mai sus valorile corespunzătoare se află:

$$\xi = \frac{\frac{a^2}{2}(5+\sqrt{2})}{a(1+\sqrt{2}+\pi)} = \frac{a}{2}\cdot\frac{5+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\pi} \approx 0{,}58\ a$$

$$\eta = \frac{\frac{a^2}{2}(4+3\sqrt{2})}{a(1+\sqrt{2}+\pi)} = \frac{a}{2}\cdot\frac{4+3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\pi} \approx 0{,}74\ a.$$

Suprafața laterală obținută prin rotirea conturului dat în jurul axei Oy este conform teoremei I a lui Guldin (5.9):

$$A = 2\pi\xi s$$

Cum:

$$s = \Sigma s_i = a(1+\sqrt{2}+\pi)$$

rezultă:

$$A = \pi a^2(5+\sqrt{2}).$$

5.8. Să se determine pozițiile centrelor maselor ale conturului și suprafeței omogene din figura 5.8.

Rezolvare. Se poate considera conturul format din semicercurile:

1. AFB de rază R și lungime $s_1 = \pi R$ avînd coordonatele centrului maselor $x_1 = 0$, $y_1 = \frac{2R}{\pi}$ (v. tabela 5.1, nr. 3).

2. ODA de rază $\frac{R}{2}$ și lungime $s_2 = \frac{\pi R}{2}$ avînd coordonatele centrului maselor $x_2 = \frac{R}{2}$, $y_2 = -\frac{R}{\pi}$.

3. OEB de rază $\frac{R}{2}$ și lungime $s_3 = \frac{\pi R}{2}$ avînd coordonatele centrului maselor $x_3 = -\frac{R}{2}$, $y_3 = \frac{R}{\pi}$.

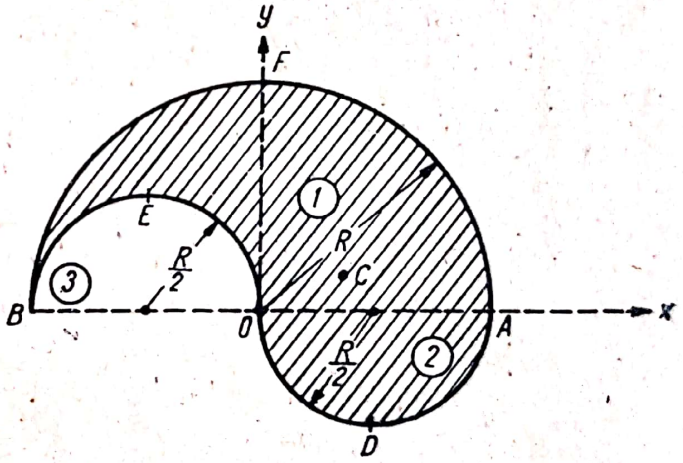


Fig. 5.8

Conform formulelor (5.6) coordonatele centrului maselor al conturului dat sînt:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{3} s_i x_i}{\sum_{i=1}^{3} s_i} = \frac{\pi R\cdot 0 + \frac{\pi R}{2}\cdot\frac{R}{2} + \frac{\pi R}{2}\left(-\frac{R}{2}\right)}{\pi R + \frac{\pi R}{2} + \frac{\pi R}{2}} = 0$$

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{3} s_i y_i}{\sum_{i=1}^{3} s_i} = \frac{\pi R\frac{2R}{\pi} + \frac{\pi R}{2}\left(-\frac{R}{\pi}\right) + \frac{\pi R}{2}\left(\frac{R}{\pi}\right)}{\pi R + \frac{\pi R}{2} + \frac{\pi R}{2}} = \frac{2R^2}{2\pi R^2} = \frac{R}{\pi}.$$

Centrul maselor al suprafeței mărginite de conturul din figura 5.8.

Această suprafață se poate considera că este alcătuită din semicercul AFB de arie $A_1 = \frac{\pi R^2}{2}$ la care se adaugă aria $A_2 = \frac{1}{2}\pi\frac{R^2}{4}$ a semicercului ODA și din care se scade aria semicercului OEB, $A_3 = -\frac{1}{2}\pi\frac{R^2}{4}$. Din tabela (5.1) nr. 7, coordonatele centrelor maselor corespunzătoare sînt: $x_1 = 0$, $y_1 = \frac{4R}{3\pi}$; $x_2 = \frac{R}{2}$, $y_2 = -\frac{2R}{3\pi}$; $x_3 = -\frac{R}{2}$, $y_3 = \frac{2R}{3\pi}$. Conform formulelor (5.6) coordonatele centrului maselor al suprafeței date sînt:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{3} A_i x_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{\frac{\pi R^2}{2}\cdot 0 + \frac{\pi R^2}{8}\cdot\frac{R}{2} - \frac{\pi R^2}{8}\left(-\frac{R}{2}\right)}{\frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{8} - \frac{\pi R^2}{8}} = \frac{R}{4}$$

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{3} A_i y_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{\frac{\pi R^2}{2}\cdot\frac{4R}{3\pi} + \frac{\pi R^2}{8}\left(-\frac{2R}{3\pi}\right) - \frac{\pi R^2}{8}\cdot\frac{2R}{3\pi}}{\frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{8} - \frac{\pi R^2}{8}} = \frac{R}{\pi}.$$

5.9. Dintr-o placă omogenă dreptunghiulară *1* avînd baza a și înălțimea b se taie o placă avînd forma unui triunghi isoscel *2*, ca în figura 5.9. Să se determine înălțimea $OE = y$ a triunghiului *2* știind că centrul maselor al porțiunii rămase este în punctul E.

Rezolvare. Placa avînd axa Oy ca axă de simetrie, centrul maselor se va găsi pe axa Oy adică:

$$\xi = 0.$$

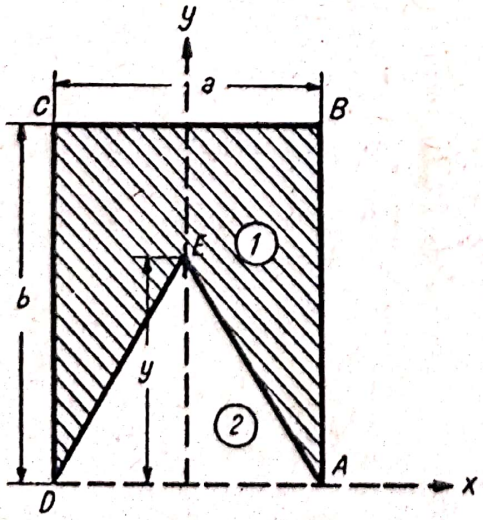


Fig. 5.9

Cum ariile și ordonatele centrelor maselor ale dreptunghiului *1* și triunghiului *2* sînt:

$$A_1 = ab \qquad y_1 = \frac{b}{2}$$

$$A_2 = -\frac{ay}{2} \qquad y_2 = \frac{y}{3}$$

ordonata centrului maselor va fi [conform (5.6)]:

$$\eta = \frac{\frac{ab^2}{2} - \frac{ay^2}{6}}{ab - \frac{ay}{2}} = \frac{3b^2 - y^2}{3(2b - y)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Însă cum centrul maselor este în punctul E: $\eta = y$ deci:

$$\frac{3b^2 - y^2}{3(2b - y)} = y$$

de unde rezultă:

$$2y^2 - 6by + 3b^2 = 0$$

sau:

$$y = \frac{b}{2}(3 \pm \sqrt{3}).$$

Cum înălțimea triunghiului trebuie să fie mai mică decît înălțimea b a dreptunghiului, numai soluția:

$$y = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} b \approx 0{,}63\, b$$

are sens.

5.10. O placă plană este alcătuită dintr-un semicerc *1* de rază R și dintr-un dreptunghi *2* cu baza egală cu diametrul semicercului, de înălțime h. Care trebuie să fie valoarea raportului h/R pentru ca centrul maselor al întregii plăci să coincidă cu centrul semicercului O?

Rezolvare. Placa este simetrică față de axa Oy deci centrul maselor se află pe această axă indiferent de valoarea raportului h/R adică $\xi = 0$.

Pentru ca centrul maselor să fie în punctul O va trebui ca:

$$\eta = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} =$$

$$= \frac{\frac{\pi R^2}{2}\left(-\frac{4R}{3\pi}\right) + 2Rh \cdot \frac{h}{2}}{\frac{\pi R^2}{2} + 2Rh} = 0$$

de unde rezultă după simplificări:

$$\frac{h}{R} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

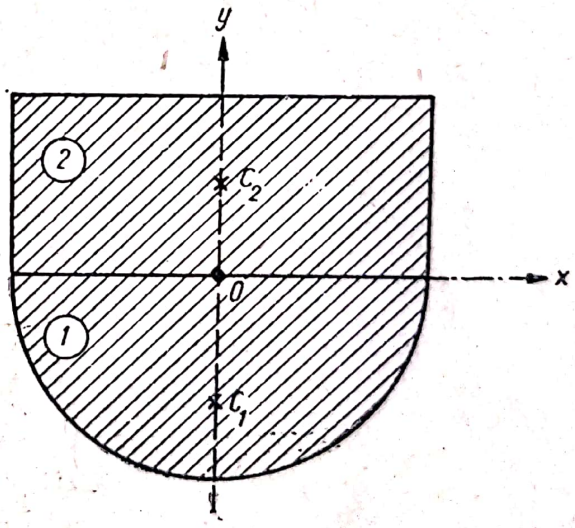


Fig. 5.10

5.11. Să se determine coordonatele centrelor maselor ale plăcilor din figurile 5.11 *a*, *b* și *c*. Placa din figura 5.11 *b* se obține dintr-un pătrat *1* de latură R din care se scoate un sfert de cerc de rază R. Placa din figura 5.11 *c* a luat naștere prin suprapunerea a două semicercuri de rază $2r$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Din tabela 5.1 nr. 7 avem: $OC = \frac{2R}{3} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$

unde $2\alpha = \frac{3\pi}{2}$, deci: $OC = \frac{2R}{3} \frac{\sin \frac{3\pi}{4}}{3 \frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{9\pi} R.$

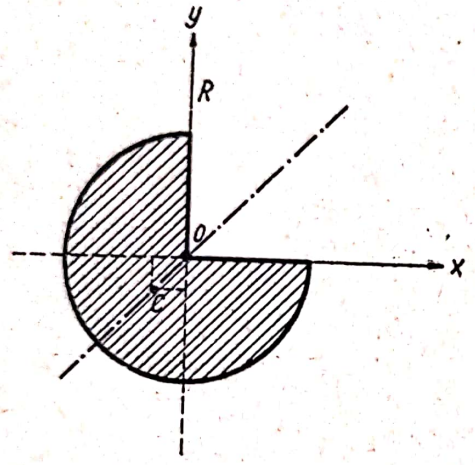


Fig. 5.11 *a*

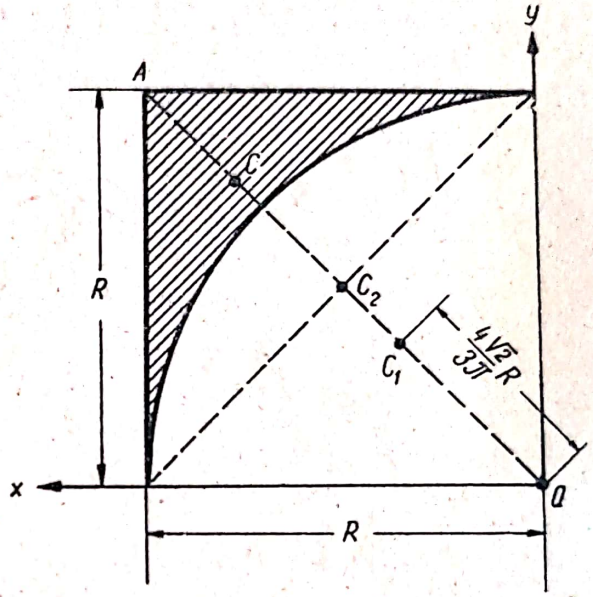


Fig. 5.11 *b*

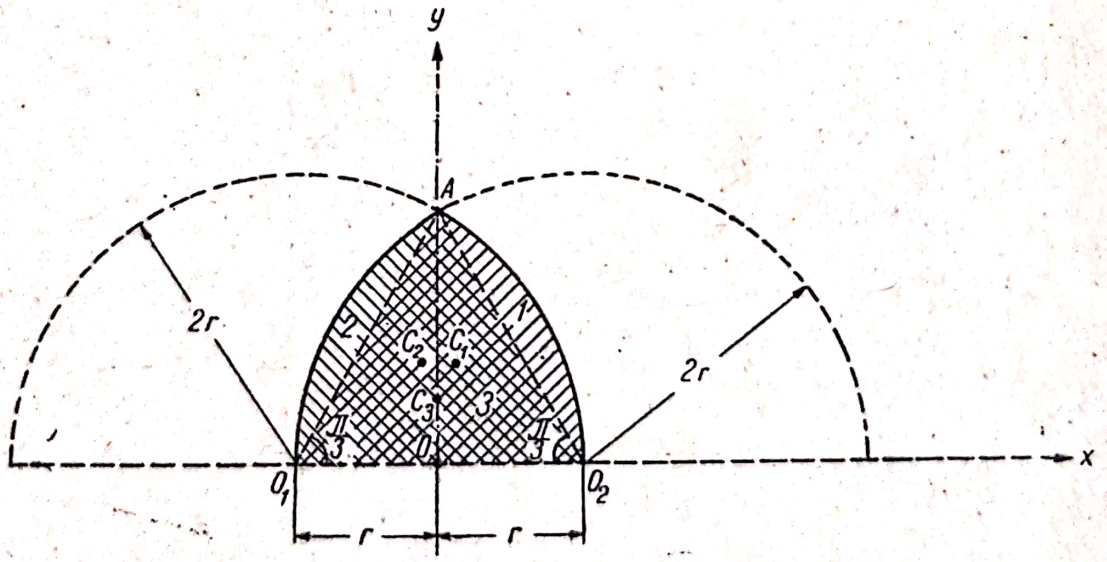


Fig. 5.11 *c*

Considerînd sistemul de axe din figura 5.11 *a*, coordonatele centrului maselor sînt:

$$\xi = \eta = -OC \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{4R}{9\pi}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Avem pentru sfertul de cerc conform tabelei 5.1 nr. 7:

$$OC_1 = \frac{2R}{3} \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} R$$

deci:

$$x_1 = y_1 = OC_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4R}{3\pi}, \quad \text{iar} \quad A_1 = -\frac{1}{4} \pi R^2.$$

Pentru placa pătrată:

$$x_2 = y_2 = \frac{R}{2} \quad \text{și} \quad A_2 = R^2.$$

Aplicînd formulele (5.6) coordonatele centrului maselor sînt:

$$\xi = \eta = \frac{-\frac{\pi R^2}{4} \frac{4R}{3\pi} + R^2 \cdot \frac{R}{2}}{-\frac{\pi R^2}{4} + R^2} = \frac{2R}{3(4-\pi)}.$$

Pentru rezolvarea acestei probleme puteam aplica teorema a II-a a lui Guldin (5.11). Rotind placa de exemplu în jurul axei Ox volumul de rotație era format dintr-un cilindru de rază R și înălțime R din care lipsea o emisferă de rază R adică:

$$V = \pi R^3 - \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{\pi R^3}{3}.$$

Aria suprafeței care se rotește este:

$$A = R^2 - \frac{\pi R^2}{4} = \frac{R^2}{4}(4 - \pi).$$

Însă din (5.11):

$$\eta = \frac{V}{2\pi A} = \frac{\frac{\pi R^3}{3}}{2\pi \frac{R^2}{4}(4-\pi)} = \frac{2R}{3(4-\pi)}.$$

Analog se determină și abscisa ξ a centrului maselor.

c) Suprafața poate fi considerată ca alcătuită din sectoarele circulare *1* limitat de razele O_1A, O_1O_2 și arcul AO_2 și *2* limitat de razele O_2A, O_2O_1 și arcul AO_1 din care se scade triunghiul echilateral *3*, O_1O_2A. Axa Oy fiind axă de simetrie:

$$\xi = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem:

$$A_1 = A_2 = \frac{\pi}{6}(2r)^2 = \frac{2\pi r^2}{3}$$

$$y_1 = y_2 = O_1C_1 \sin\frac{\pi}{6} \qquad \text{(v. fig. 5.11 } d\text{)}.$$

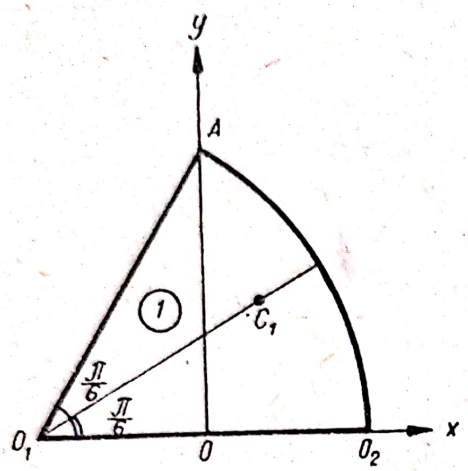


Fig. 5.11 *d*

Însă conform tabelei 5.1 nr. 7:

$$O_1C_1 = \frac{2}{3}\,2r\,\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{4r}{\pi}$$

$$y_1 = y_2 = O_1C_1 \sin\frac{\pi}{6} = \frac{2r}{\pi}.$$

Pentru triunghiul echilateral:

$$A_3 = -\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot\sqrt{3}\,r = -r^2\sqrt{3}$$

$$y_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}r$$

de unde:

$$\eta = \frac{2\cdot\frac{2\pi r^2}{3}\cdot\frac{2r}{\pi} - r^2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}r}{2\cdot\frac{2\pi r^2}{3} - \sqrt{3}\,r^2} = \frac{5r}{4\pi - 3\sqrt{3}}.$$

5.12. Un dreptunghi avînd dimensiunile $OA = a$, $OB = b$ este împărțit în două de arcul de parabolă OC tangent în O la latura OA. Să se determine pozițiile centrelor maselor ale părților componente.

Rezolvare. Cu sistemul de axe din figura 5.12 ecuația parabolei va fi de forma:

$$y = \alpha x^2$$

și cum parabola trece prin punctul $C\,(a, b)$:

$$b = \alpha a^2$$

deci ecuația parabolei este:

$$y = \frac{bx^2}{a^2}.$$

Centrul maselor al ariei *1* mărginită de dreptele OA, AC și arcul de

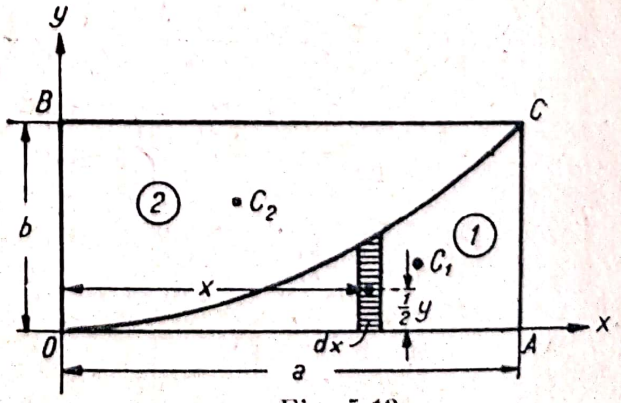


Fig. 5.12

parabolă OC se poate determina cu formulele (5.9). Împărțim suprafața *1* în suprafețe elementare prin paralele duse la axa Oy, în dreptunghiuri elementare de lățime dx de arie:

$$dA = y\ dx = \frac{bx^2}{a^2}\,dx.$$

Coordonatele centrului maselor al unui asemenea dreptunghi fiind x și $\frac{1}{2}\ y = \frac{bx^2}{2a^2}$, centrul maselor al suprafeței va avea coordonatele:

$$\xi_1 = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{\int_0^a \frac{bx^3}{a^2}\,dx}{\int_0^a \frac{bx^2}{a^2}\,dx} = \frac{\frac{1}{4}\,a^2 b}{\frac{1}{3}\,ab} = \frac{3}{4}\,a$$

$$\eta_1 = \frac{\int \frac{1}{2}\,y\,dA}{\int dA} = \frac{\int_0^a \frac{b^2 x^4}{2a^4}\,dx}{\frac{1}{3}\,a\,b} = \frac{\frac{1}{10}\,ab^2}{\frac{1}{3}\,ab} = \frac{3}{10}\,b$$

iar aria suprafeței *1* va fi:

$$A_1 = \int dA = \frac{1}{3}\,a\,b.$$

Aria suprafeței *2* este:

$$A_2 = A - A_1 = \frac{2}{3}\,ab$$

unde $A = ab$ este aria dreptunghiului. Coordonatele centrului maselor sînt:

$$\xi_2 = \frac{\xi A - \xi_1 A_1}{A - A_1} = \frac{\frac{a}{2}\cdot ab - \frac{3a}{4}\cdot\frac{1}{3}\,ab}{ab - \frac{1}{3}\,ab} = \frac{3}{8}\,a$$

$$\eta_2 = \frac{\eta A - \eta_1 A_1}{A - A_1} = \frac{\frac{b}{2}\cdot ab - \frac{3}{10}\,b\cdot\frac{1}{3}\,ab}{ab - \frac{1}{3}\,ab} = \frac{3}{5}\,b$$

5.13. Să se verifice expresiile coordonatelor centrului maselor ale ariei unui sfert de elipsă (tabela 5.1, nr. 8). Să se determine apoi poziția centrului maselor al figurii obținute prin tăierea dintr-un sfert de elipsă a unui sfert de cerc (fig. 5.13 *a*).

Rezolvare. Împărțim elipsa (fig. 5.13 *b*) în arii elementare prin paralele duse la axa Ox:

$$dA = x\ dy$$

unde x și y sînt coordonatele unui punct de pe elipsa:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Aria sfertului de elipsă va fi:

$$A_1 = \int dA = \int_0^b x\, dy.$$

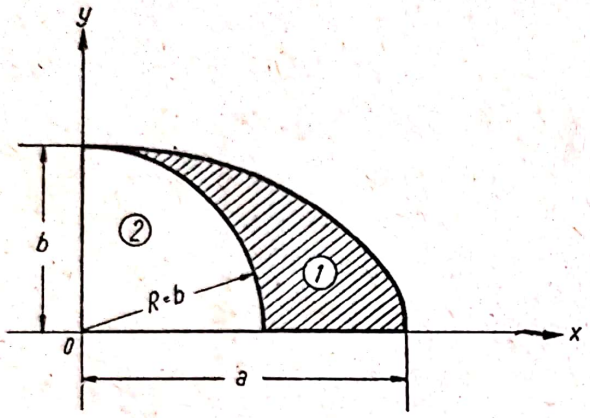


Fig. 5.13 *a*

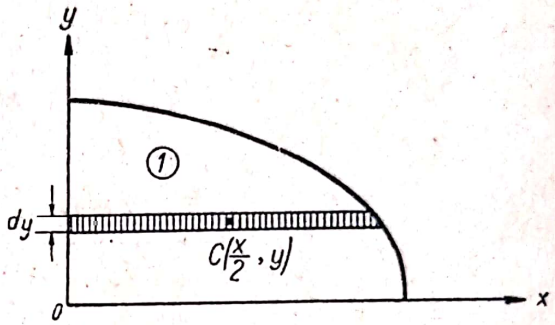


Fig. 5.13 *b*

Folosind ecuațiile parametrice ale elipsei:

$$x = a\cos\theta$$
$$y = b\sin\theta$$

integrala de mai sus devine:

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\cos^2\theta\, d\theta = \frac{\pi ab}{4}.$$

Coordonatele centrului maselor al ariei elementare sînt $\frac{x}{2}$ și y deci abscisa centrului maselor al sfertului de elipsă va fi:

$$\xi_1 = \frac{\int \frac{x}{2} dA}{\int dA} = \frac{\frac{1}{2}\int x^2\, dy}{A_1}.$$

Cum $x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$ momentul static față de axa Oy va fi:

$$\frac{1}{2}\int x^2\, dy = \frac{a^2}{2}\int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \frac{a^2 b}{3}$$

și deci:

$$\xi_1 = \frac{\frac{a^2 b}{3}}{\frac{\pi ab}{4}} = \frac{4a}{3\pi}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Analog:

$$\eta_1 = \frac{4b}{3\pi}$$

Pentru sfertul de cerc se pot folosi datele pentru sfertul de elipsă ținînd seama că raza cercului este b:

$$\xi_2 = \eta_2 = \frac{4b}{3\pi}$$

iar aria este:

$$A_2 = -\frac{\pi b^2}{4}.$$

Coordonatele centrului maselor al porțiunii haşurate din figura 5.13 *a* sînt:

$$\xi = \frac{\frac{4a}{3\pi}\frac{\pi ab}{4} - \frac{4b}{3\pi}\frac{\pi b^2}{4}}{\frac{\pi ab}{4} - \frac{\pi b^2}{4}} = \frac{4(a+b)}{3\pi}$$

$$\eta = \frac{\frac{4b}{3\pi}\frac{\pi ab}{4} - \frac{4b}{3\pi}\frac{\pi b^2}{4}}{\frac{\pi ab}{4} - \frac{\pi b^2}{4}} = \frac{4b}{3\pi}.$$

5.14. Să se determine poziția centrului de greutate al secțiunii grinzii din figura 5.14. Grinda este formată din platbandele *1* și *2*, cornierele *3* și *4* și este slăbită de găurile de nit *5*, *6* și *7*. Dimensiunile din figură sînt date în mm. Din tabele se cunoaște aria cornierei $100 \times 100 \times 10$, $A_3 = A_4 = 19{,}2$ cm² și poziția centrului de greutate indicată pe figură.

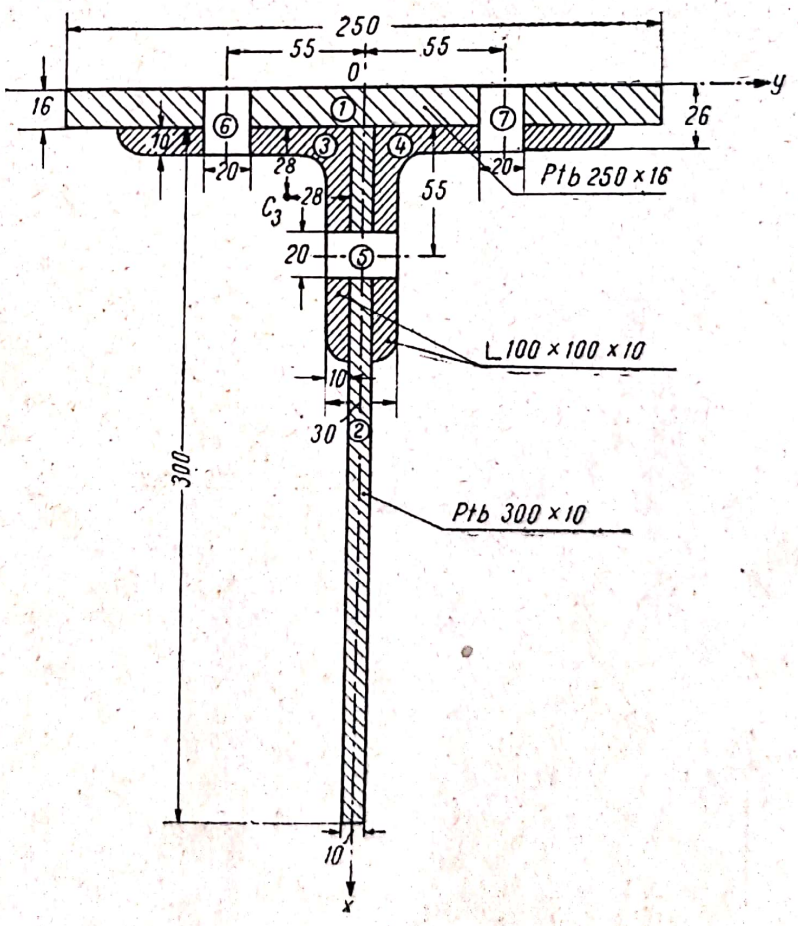


Fig. 5.14

Rezolvare. Secțiunea admite axa Ox ca axă de simetrie, deci:

$$\eta = 0.$$

Abscisele centrelor de greutate și ariile celor 7 părți componente ale secțiunii sînt trecute în tabela de la pag. 90.

Scanned with OKEN Scanner

	x_i în cm	A_i în cm²	$x_i A_i$ în cm³
1	0,8	40	32
2	16,6	30	498
3	4,4	19,2	84,48
4	4,4	19,2	84,48
5	7,1	−6	−42,6
6	1,3	−5,2	−6,76
7	1,3	−5,2	−6,76
Σ	—	92	642,84

Deducem:

$$\xi = \frac{\Sigma x_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{642{,}84}{92} = 6{,}988 \approx 7 \text{ cm}.$$

5.15. Să se determine centrul maselor al plăcii omogene din figura 5.15 *a* obținută prin îndoirea în unghi drept a plăcii din figura 5.15 *b* în lungul dreptelor *BD* și *EF*.

Rezolvare. Părțile componente ale plăcii sînt: *1* triunghiul isoscel *ABD*, *2* dreptunghiul *BEFD* și *3* trapezul *EFHG* avînd ariile:

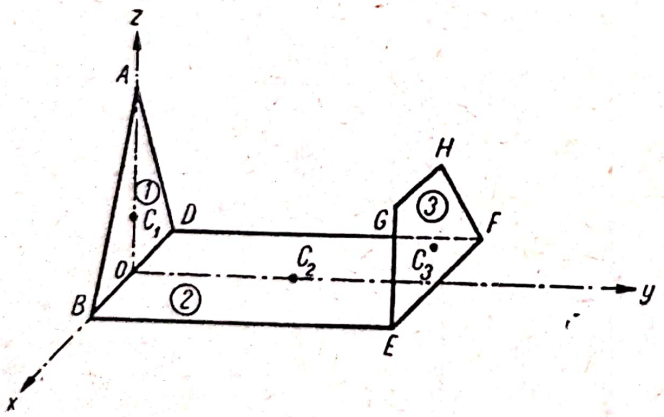


Fig. 5.15 *a*

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 3a = 3a^2,$$

$$A_2 = 5a \cdot 2a = 10a^2 \text{ și}$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(2a + a)\, 2a = 3a^2.$$

Cu sistemul de axe din figura 5.15 *a* coordonatele centrelor maselor C_1 și C_2 sînt:

$$x_1 = 0 \qquad y_1 = 0 \qquad z_1 = a$$

$$x_2 = 0 \qquad y_2 = \frac{5}{2}a \qquad z_2 = 0.$$

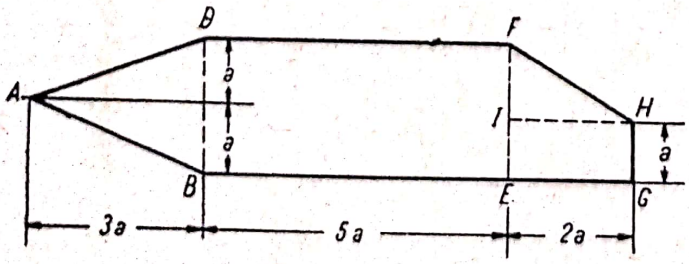


Fig. 5.15 *b*

Pentru placa trapezoidală avem $y_3 = 5a$ și conform tabelei 5.1 nr. 6:

$$z_3 = \frac{2a}{3}\,\frac{2a + 2a}{2a + a} = \frac{8}{9}a.$$

Scanned with OKEN Scanner

Centrul maselor se găseşte pe dreapta care uneşte mijloacele bazelor ale cărei ecuaţii sînt:

$$y = 5a \qquad z = 4x$$

deci:

$$x_3 = \frac{1}{4} z_3 = \frac{2}{9} a.$$

Aceste valori se puteau găsi dacă consideram de exemplu placa trapezoidală formată din reuniunea dreptunghiului *EGHI* şi triunghiului *FHI* (fig. 5.15 *b*).

Centrul maselor al plăcii va avea coordonatele:

$$\xi = \frac{x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{\frac{2}{3}a^3}{16a^2} = \frac{a}{24}$$

$$\eta = \frac{y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{25a^3 + 15a^3}{16a^2} = \frac{5}{2} a$$

$$\zeta = \frac{z_1A_1 + z_2A_2 + z_3A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{3a^3 + \frac{8}{3}a^3}{16a^2} = \frac{17}{48} a.$$

5.16. Un nit se compune dintr-o emisferă de rază R şi un cilindru de rază $\frac{R}{2}$ şi înălţime $h = kR$.

Să se determine coeficientul k astfel încît centrul de greutate al nitului să se afle la distanţa $\frac{3}{8} R$ de punctul O.

Rezolvare. Centrul de greutate C al nitului se găseşte pe axa de simetrie a nitului:

$$\eta = \zeta = 0.$$

Din tabela 5.1 nr. 9 şi 11 rezultă:

$$x_1 = -\frac{3}{8} R \qquad x_2 = \frac{h}{2}$$

şi cum:

$$V_1 = \frac{2}{3} \pi R^3 \qquad V_2 = \frac{\pi R^2}{4} h$$

rezultă:

$$\xi = \frac{\frac{2}{3} \pi R^3 \left(-\frac{3}{8} R \right) + \frac{\pi R^2}{4} h \cdot \frac{h}{2}}{\frac{2}{3} \pi R^3 + \frac{\pi R^2}{4} h} . \quad (1)$$

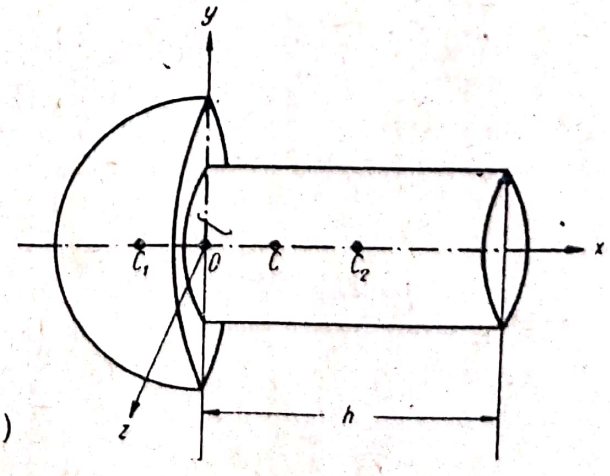


Fig. 5.16

Cum $h = k\,R$ și $\xi = \frac{3}{8}\,R$ (condiția problemei) înlocuind în (1) rezultă ecuația:

$$k^2 - \frac{3}{4}\,k - 4 = 0$$

și cum numai soluția pozitivă a lui k are sens:

$$k = \frac{3 + \sqrt{265}}{8} \approx 2{,}41\,.$$

5.17. Un corp omogen este alcătuit dintr-o emisferă și un con circular având raza bazei r, egală cu raza emisferei. Știind că centrul maselor al corpului se găsește în punctul O să se determine înălțimea h a conului.

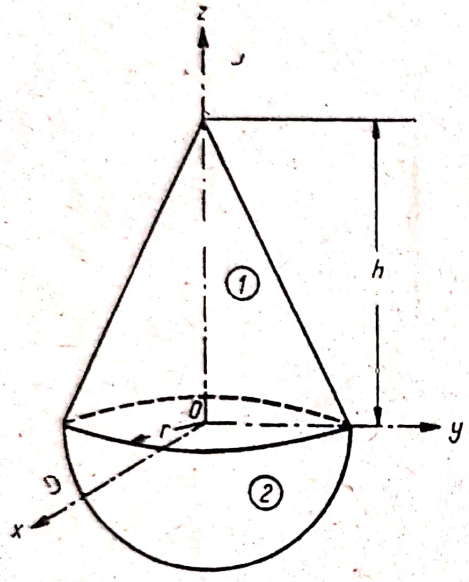


Fig. 5.17 *a*

Rezolvare. Axa Oz fiind axă de simetrie:

$$\xi = \eta = 0$$

deci trebuie pusă condiția:

$$\zeta = 0$$

adică momentul static față de planul xOy trebuie să fie nul:

$$V_1 z_1 + V_2 z_2 = 0.$$

Însă din tabela 5.1 nr. 10 și 11:

$$z_1 = \frac{h}{4} \qquad z_2 = -\frac{3}{8}\,r$$

și cum:

$$V_1 = \frac{\pi r^2 h}{3} \qquad V_2 = \frac{2\pi r^3}{3}$$

rezultă:

$$\frac{\pi r^2 h^2}{12} - \frac{\pi r^4}{4} = 0$$

adică:

$$h = r\sqrt{3}\,.$$

Condiția aceasta este tocmai condiția ca așezînd corpul cu suprafața convexă pe un plan orizontal, el să fie în echilibru indiferent, deoarece greutatea $\bar{G}$ și cu reacțiunea $\bar{N}$ a planului care sînt situate pe același suport se echilibrează. Dacă $h > r\sqrt{3}$, $\bar{G}$ și $\bar{N}$ se reduc la un cuplu care caută să răstoarne corpul, poziția de echilibru cu axa conului verticală ($\alpha = 0$) fiind nestabilă.

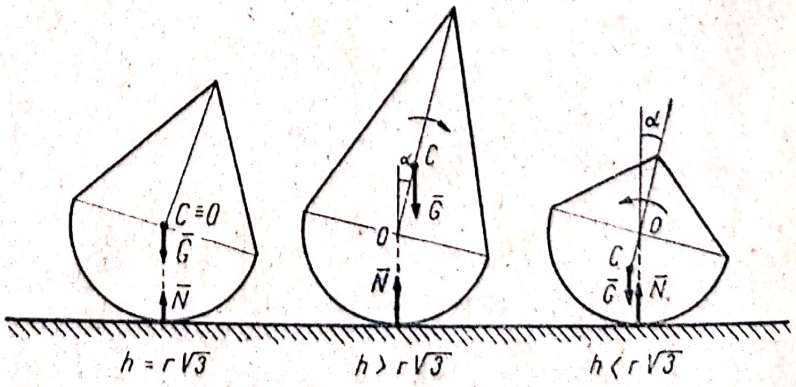


Fig. 5.17 *b*

Dacă $h < r\sqrt{3}$, $\vec{G}$ și $\vec{N}$ se reduc la un cuplu care caută să redreseze corpul, poziția de echilibru $\alpha = 0$ fiind stabilă (v. fig. 5.17 *b*).

5.18. Să se determine poziția centrului maselor al unui corp format dintr-un cub omogen *1* cu muchia egală cu $2a$ și cu masa specifică γ așezat peste un alt cub omogen *2* cu muchia egală cu $4a$ și cu masa specifică 2γ (fig. 5.18).

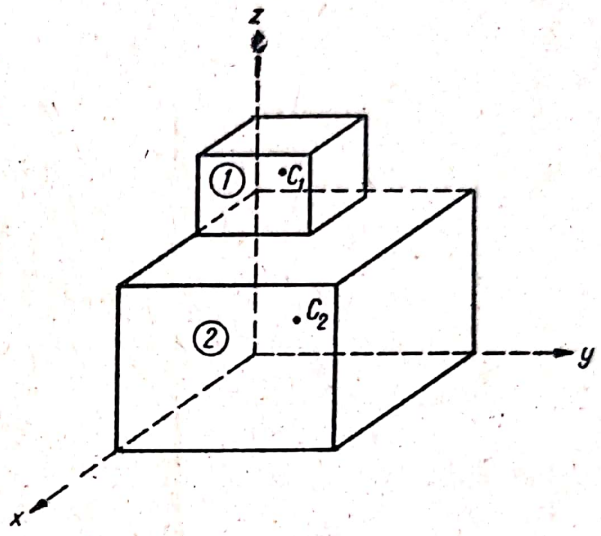


Fig.5.18

Rezolvare. Vom aplica formula (5.5) în care:

$$m_1 = \gamma V_1 = 8a^3\gamma$$
$$m_2 = 2\gamma V_2 = 128a^3\gamma \quad (1)$$

iar centrele maselor sînt:

$$C_1 \ (a, \ a, \ 5a)$$
$$C_2 \ (2a, \ 2a, \ 2a).$$

Deci vectorul de poziție al centrului maselor este:

$$\bar{\rho} = \frac{8a^3\gamma(a\bar{i} + a\bar{j} + 5a\bar{k}) + 128a^3\gamma(2a\bar{i} + 2a\bar{j} + 2a\bar{k})}{8a^3\gamma + 128a^3\gamma} = \frac{33}{17}a\bar{i} + \frac{33}{17}a\bar{j} + \frac{37}{17}a\bar{k}.$$

5.19. Să se determine poziția centrului maselor a unei plăci circulare de rază r știind că masa specifică a plăcii variază liniar în lungul diametrului A_1A_2 nevariind pe direcții perpendiculare pe acest diametru. Se dau masele specifice γ_0 și γ_1 din punctele O și A_1.

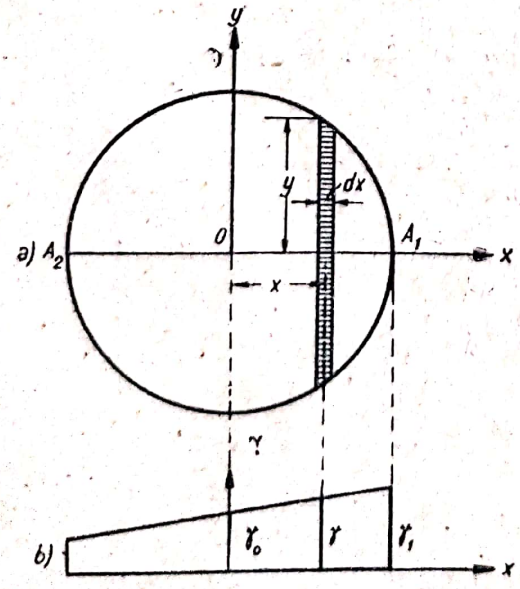


Fig. 5.19

Rezolvare. Cum masele sînt simetric dispuse față de axa Ox centrul maselor al plăcii se va găsi pe acea axă

$$\eta = 0.$$

Împărțim placa în fîșii prin paralele duse la axa Oy. Masa unei asemenea fîșii este:

$$dm = \gamma \, dA$$

unde (v. fig. 5.19 *b*):

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{r} x$$

este masa specifică în fîșia de arie:

$$dA = 2y \, dx.$$

Însă conform (5.9):

$$\xi = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int \gamma x dA}{\int \gamma dA} \tag{1}$$

$$\int_A \gamma dA = \gamma_0 \int_A dA + \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{r} \int_A x dA = \gamma_0 \pi r^2$$

deoarece integrala $\int_A dA = A = \pi r^2$ este egală cu aria cercului, iar integrala $\int_A x\, dA = 0$ reprezintă momentul static al suprafeței cercului în raport cu axa Oy ce trece prin centrul maselor al ariei cercului.

$$\int_A \gamma x\ dA = \gamma_0 \int_A x dA + \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{r} \int_A x^2\, dA = \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{r} I_y$$

unde integrala $I_y = \int_A x^2\, dA$ se numește momentul de inerție al ariei în raport cu axa Oy. Să efectuăm această integrală

$$I_y = \int_A x^2\ dA = \int_A 2x^2\, y\, dx$$

unde $-r \leqslant x \leqslant r$.

Prin schimbarea de variabilă:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad \pi \geqslant \theta \geqslant 0$$

obținem:

$$I_y = -\int_\pi^0 2\, r^4 \cos^2\theta\ \sin^2\theta\ d\theta = r^4 \int_0^\pi \frac{1 - \cos 4\theta}{4} d\theta = \frac{\pi r^4}{4}.$$

Înlocuind în expresia (1) rezultă:

$$\xi = \frac{\dfrac{\gamma_1 - \gamma_0}{r} \cdot \dfrac{\pi r^4}{4}}{\gamma_0 \cdot \pi r^2} = \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{4\gamma_0} r.$$

Dacă placa este omogenă $\gamma_1 = \gamma_0$ și $\xi = 0$.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

5.20. Pe o bară, în 5 puncte echidistante, sînt aplicate 5 forțe paralele de același sens, egale respectiv cu P, $2P$, $3P$, $4P$, $5P$; să se găsească rezultanta lor și centrul forțelor paralele. Să se generalizeze.

Scanned with OKEN Scanner

Răspuns.

$$R = \frac{n(n+1)}{2} P \text{ şi } \xi = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1)\, n}{1 + 2 + \ldots + n} a =$$

$$= \frac{\sum_{i=2}^{n} C_n^2}{\sum_{i=1}^{n} C_n^1} a = \frac{2C_{n+1}^3}{C_{n+1}^2} a = \frac{2}{3} (n-1)\, a$$

unde a este distanţa dintre suporturile forţelor.

5.21. Să se determine rezultanta şi centrul C al forţelor paralele pentru sistemele din figurile 5.21 *a* — 5.21 *d*. Punctele lor de aplicaţie sînt în acelaşi plan xOy.

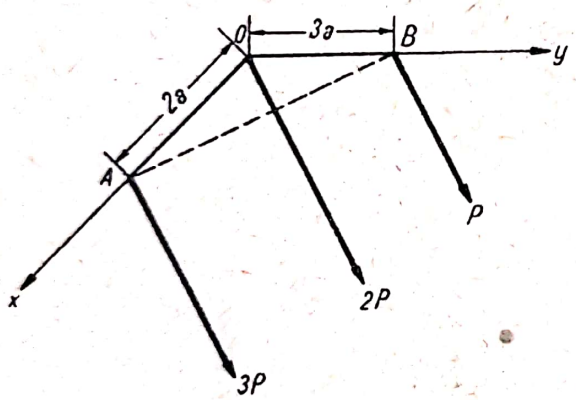


Fig. 5.21 *a*

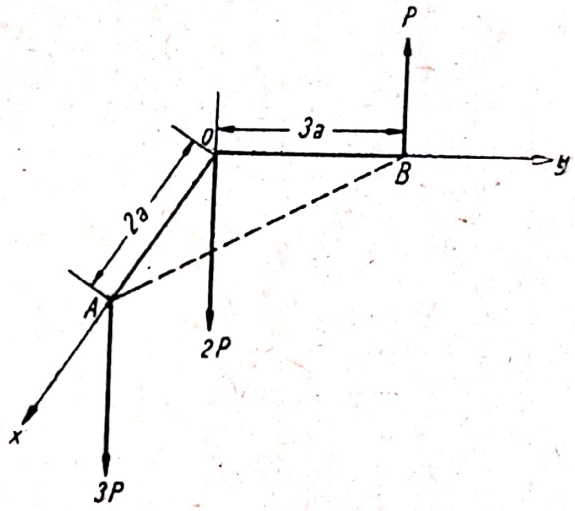


Fig. 5.21 *b*

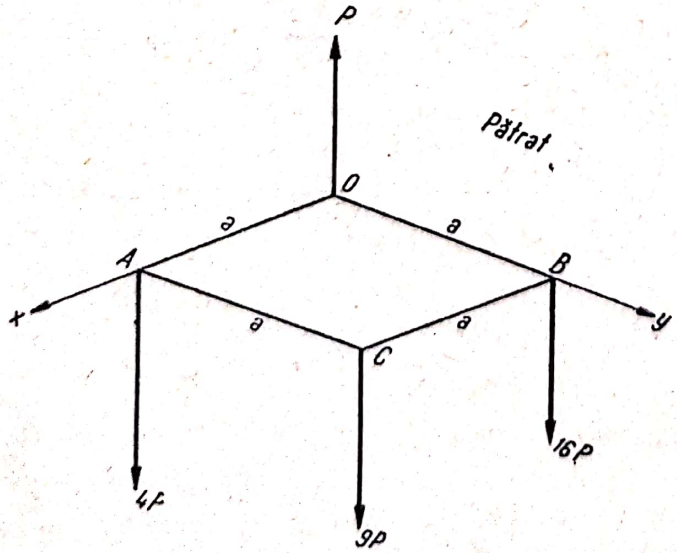


Fig. 5.21 *c*

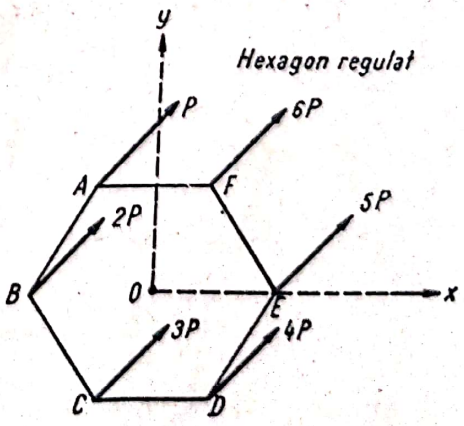


Fig. 5.21 *d*

Răspuns.

a) $R = 6P,\ \xi = a,\ \eta = \frac{a}{2}$,

b) $R = 4P,\ \xi = \frac{3a}{2},\ \eta = -\frac{3a}{4}$,

c) $R = 28P,\ \xi = \frac{13a}{28},\ \eta = \frac{25a}{28}$,

d) $R = 21P,\ \xi = \frac{2r}{7},\ \eta = 0.$

5.22. Să se descompună o forță $\bar{R}$ aplicată în vîrful O al cubului din figura 5.22 în trei forțe paralele de aceeași direcție aplicate în vîrfurile B, E, G ale cubului.

Răspuns.

$$F_1 = F_2 = R, \qquad F_3 = -R.$$

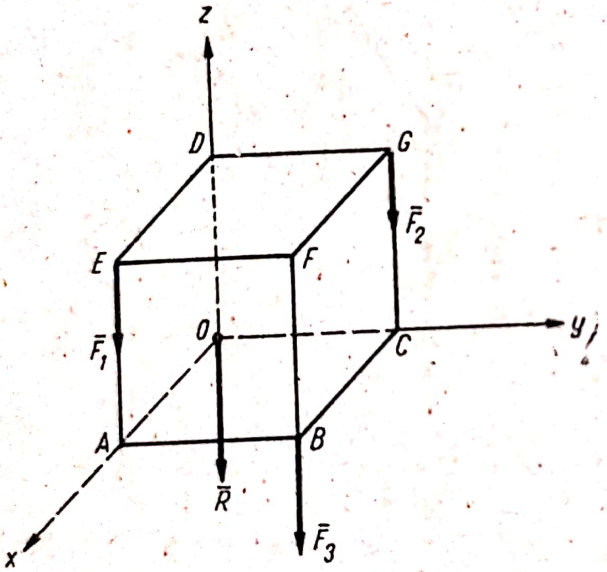


Fig. 5.22

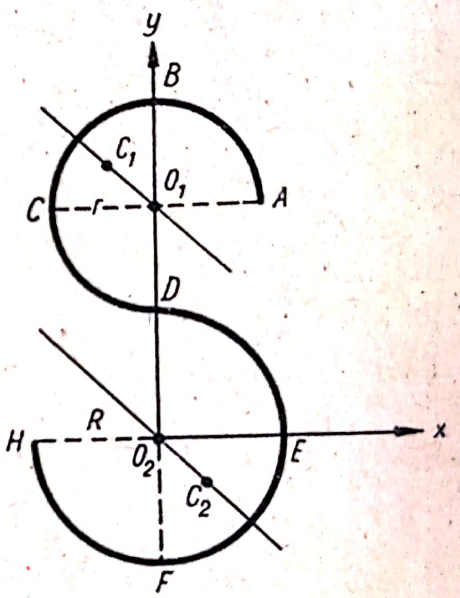


Fig. 5.23

5.23. Să se afle centrul maselor al curbei omogene din figura 5.23.

Indicație. Descompunem curba în arcele de cerc $ABCD$ și $DEFH$. Rezultă:

$$\xi = \frac{2(R-r)}{3\pi} \qquad \eta = r - \frac{2}{3\pi}(R-r).$$

5.24. Dintr-un cerc de rază R se taie un cerc tangent interior cu raza $\frac{R}{2}$. Să se afle poziția centrului maselor al porțiunii rămase.

Răspuns. $\xi = 0 \qquad \eta = -\frac{R}{6}$

Scanned with OKEN Scanner

5.25. Un corp omogen constă dintr-un cilindru cu raza bazei r și înălțimea $l = 6r$ și două sfere fixate de el cu razele $R = 3r$ și $R_1 = 2r$.

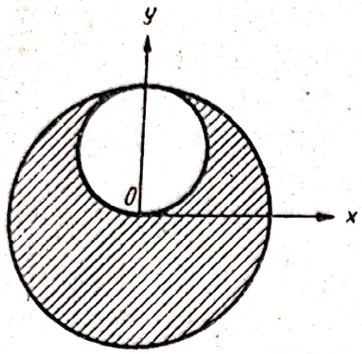


Fig. 5.24

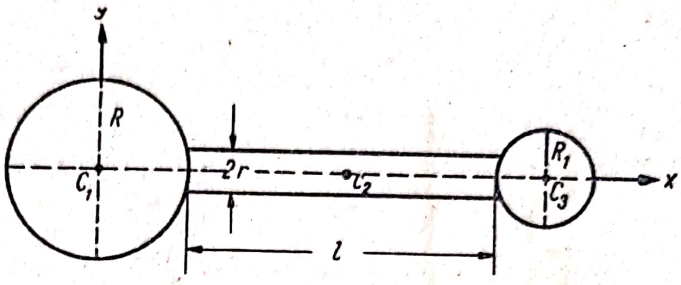


Fig. 5.25

Să se determine poziția centrului maselor al acestui corp.

Răspuns.

$$\xi = \frac{230}{79}\, r.$$

5.26. Să se determine suprafața laterală și volumul solidului obținut prin rotirea plăcii din figura 5.26 în jurul axei Ox.

Răspuns. $A = 3\sqrt{3}\,\pi r^2$, $V = \dfrac{\sqrt{3}\,\pi r^3}{2}$.

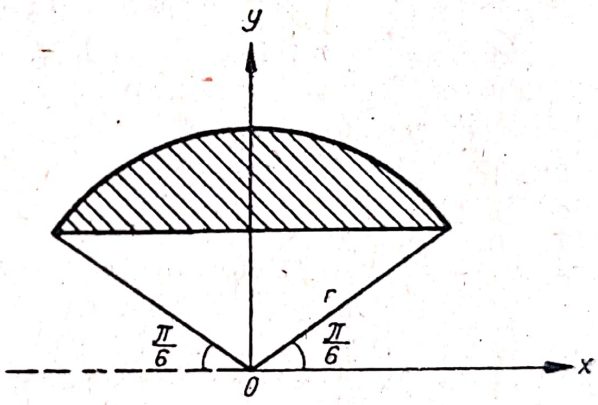


Fig. 5.26

CAPITOLUL VI

STATICA SOLIDULUI RIGID

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Condiția necesară și suficientă pentru ca un sistem de forțe $\bar{F}_i$ acționînd asupra unui solid rigid liber să-l mențină în repaus dacă se găsea în această stare, *este ca vectorul rezultant $\bar{R}$ și momentul rezultant $\bar{M}_0$* în raport cu un punct arbitrar O *să fie nuli*:

$$\left.\begin{aligned} \bar{R} &= \Sigma \bar{F}_i = 0 \\ \bar{M}_0 &= \Sigma \bar{r}_i \times \bar{F}_i = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.1)$$

Proiectînd ecuațiile (6.1) pe triedrul de referință $Oxyz$ obținem șase ecuații scalare:

$$\left.\begin{aligned} X &= \Sigma X_i = 0 & \qquad M_x &= \Sigma (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0 \\ Y &= \Sigma Y_i = 0 & \qquad M_y &= \Sigma (z_i X_i - x_i Z_i) = 0 \\ Z &= \Sigma Z_i = 0 & \qquad M_z &= \Sigma (x_i Y_i - y_i X_i) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (6.2)$$

Dacă forțele sistemului sînt în același plan (xOy) sistemul (6.2) se reduce la trei ecuații, două de proiecții și una de momente și anume:

$$X = \Sigma X_i = 0 \quad Y = \Sigma Y_i = 0 \quad M_z = M_0 = \Sigma (x_i Y_i - y_i X_i) = 0. \quad (6.3)$$

În particular un sistem format din trei forțe care se echilibrează este coplanar.

Dacă forțele sistemului sînt paralele (cu axa Oz) sistemul (6.2) se reduce la trei ecuații, una de proiecții și două de momente:

$$Z = \Sigma Z_i = 0 \quad M_x = \Sigma (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0 \quad M_y = \Sigma (z_i X_i - x_i Z_i) = 0. \quad (6.4)$$

Problema determinării poziției unui solid rigid liber în spațiu sau în plan este în general posibilă pentru că dispunem de șase, respectiv trei ecuații pentru determinarea celor șase (sau trei) parametri independenți ce definesc poziția solidului.

În cazul solidului rigid supus la legături se admite axioma legăturilor înlocuind legăturile geometrice cu forțe de legătură (reacțiuni). Sistemul format din forțele efectiv aplicate și din reacțiuni se echilibrează, condițiile de echilibru (6.1) ... (6.4) rămînînd aceleași. Se obține un sistem de șase (sau trei) ecuații care rezolvat ne permite să determinăm șase (sau trei) necunoscute, reacțiuni și parametri ce definesc poziția corpului. Dacă numărul de necunoscute este mai mare decît numărul de ecuații problema este nedeterminată.

Moduri de rezemare ale solidului rigid:

1. *Reazemul simplu* este modul de rezemare a două corpuri care se sprijină unul pe altul într-un punct A. Reacțiunea $\bar{N}$ are direcția normalei comune la suprafețele de contact cînd o asemenea normală există (fig. 6. *a*). Cînd numai la una dintre suprafețe se poate duce normala, reacțiunea $\bar{N}$ are direcția acestei normale (fig. 6. *b*).

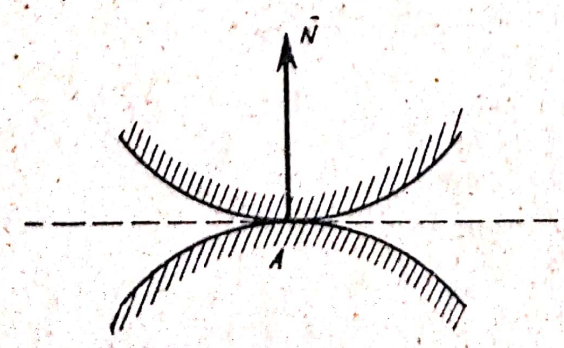


Fig. 6. *a*

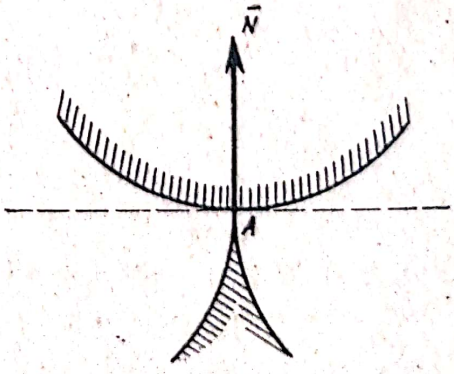


Fig. 6. *b*

Scanned with OKEN Scanner

O reacțiune într-un reazem simplu este echivalentă cu o necunoscută, scalarul ei, căci direcția și punctul ei de aplicație sînt cunoscute, reazemul simplu răpind un grad de libertate al solidului. Un solid poate fi fixat în spațiu cu ajutorul a șase reazeme simple, iar în plan cu ajutorul a trei reazeme simple (cu condiția ca suporturile reacțiunilor să nu fie paralele sau concurente). În cazul legăturilor unilaterale pentru ca corpul să nu părăsească legătura trebuie îndeplinită condiția:

$$N > 0 \tag{6.5}$$

N fiind scalarul reacțiunii presupusă orientată în sensul în care corpul poate părăsi legătura.

2. *Articulația* fixează un punct O al solidului permițînd numai rotația în jurul punctului O. Reacțiunea $\bar{R}$ este aplicată în O, are direcție necunoscută, componentele ei pe axele de coordonate sînt R_x, R_y, R_z în cazul unui genunchi sferic (fig. 6. *c*) și R_x, R_y în cazul unei articulații

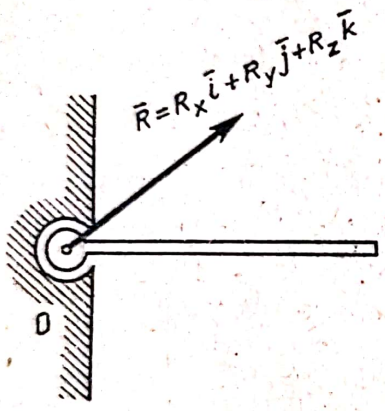


Fig. 6. *c*

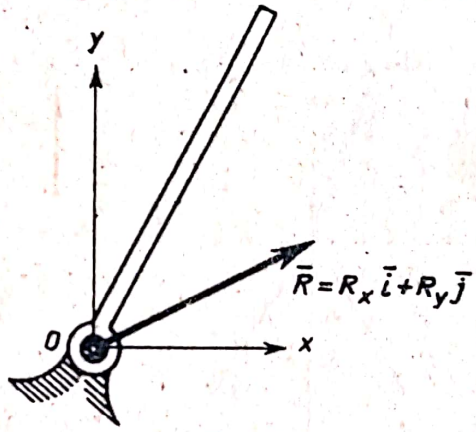


Fig. 6. *d*

realizate cu ajutorul unui bulon care permite rotația numai într-un plan xOy (fig. 6. *d*). Articulația răpește trei grade de libertate solidului (în plan, două).

3. *Încastrarea* (fig. 6. *e*) este reazemul care asigură solidului rigid un punct fix O și nu permite rotația în jurul acestuia răpindu-i toate gradele de libertate. Încastrarea poate fi înlocuită cu o reacțiune de direcție necunoscută $\bar{R} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{k}$ și un cuplu al cărui moment este necunoscut $\bar{M} = M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k}$. Dacă sistemul de forțe este plan, (xOy) $\bar{R} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j}$ iar $\bar{M} = M\bar{k}$.

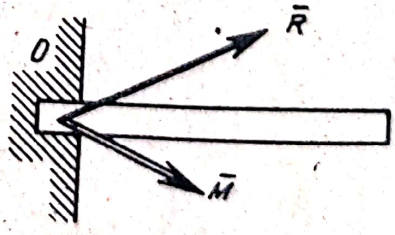


Fig. 6. *e*

La rezolvarea problemelor se ține seama în general de următoarele recomandații:

a) Se aleg acele axe de proiecție care simplifică în măsura cea mai mare ecuațiile de echilibru. În general una dintre axe se alege normală pe cît mai multe forțe necunoscute.

b) Punctul în raport cu care se calculează momentul rezultant putînd fi ales oriunde în spațiu, în general se alege acel punct în care se intersectează un număr mai mare de forțe necunoscute.

Scanned with OKEN Scanner

c) În cazul sistemelor de forțe coplanare condițiile de echilibru (6.3) pot fi înlocuite prin condiția ca momentele rezultante în raport cu trei puncte necoliniare, A, B și C să fie nule:

$$M_A = 0, \qquad M_B = 0, \qquad M_C = 0. \tag{6.6}$$

În cazul sistemelor de forțe paralele condițiile de echilibru (6.4) pot fi înlocuite prin condiția ca momentele rezultante în raport cu trei axe coplanare Δ_1, Δ_2 și Δ_3 neconcurente într-un punct și neparalele (nici între ele, nici cu forțele sistemului) să fie nule:

$$M_1 = 0, \qquad M_2 = 0, \qquad M_3 = 0. \tag{6.7}$$

B. PROBLEME REZOLVATE

6.1. Un solid rigid format din două bare omogene AC de lungime $2a$ și CB de lungime $2b$ formînd un unghi ω, este suspendat de un resort CO avînd constanta elastică k și lungimea în stare neîntinsă l_0. Cunoscînd greutatea P a solidului să se determine poziția lui de echilibru.

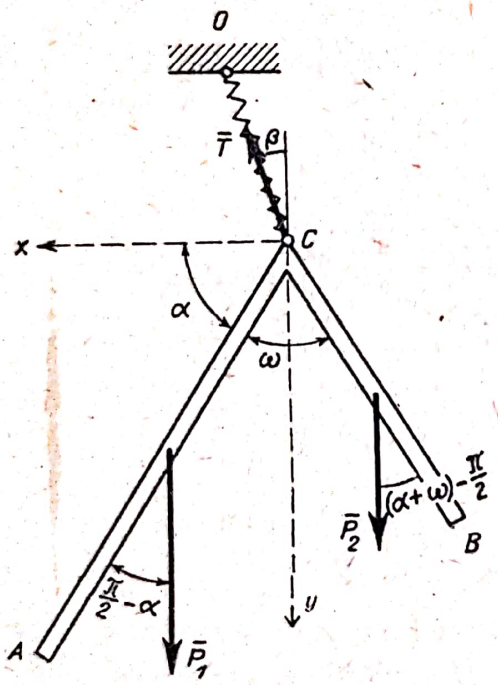


Fig. 6.1

Rezolvare. Avem de studiat echilibrul unui solid liber acționat de trei forțe, tensiunea $\overline{T}$ și greutățile $\overline{P}_1$ și $\overline{P}_2$ (fig. 6.1). În poziția de echilibru forțele sînt coplanare; cum două dintre ele sînt verticale, echilibrul va avea loc într-un plan vertical. Poziția corpului poate deci fi determinată cu ajutorul a trei parametri: $l = OC$ (lungimea resortului), α (unghiul format de AC cu orizontala) și β (unghiul format de resort cu verticala).

Tensiunea $\overline{T}$ din resort este:

$$T = k\,(l - l_0)$$

iar greutățile fiind proporționale cu lungimile barelor respective și $P_1 + P_2 = P$ rezultă:

$$P_1 = \frac{a}{a+b}\,P \qquad P_2 = \frac{b}{a+b}\,P.$$

Vom folosi ecuațiile de echilibru (6.3) cu sistemul de referință din fig. 6.1, originea fiind aleasă în punctul C pentru ca ecuația de momente să nu conțină ca necunoscută decît unghiul α:

$$X = T \sin \beta = 0$$

$$Y = P_1 + P_2 - T \cos \beta = 0$$

$$M_z = M_C = P_1 a \cos \alpha - P_2 b \sin\left[(\omega + \alpha) - \frac{\pi}{2}\right] = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind valorile forțelor T, P_1 și P_2 după simplificări rezultă:

$$\beta = 0 \qquad l = l_0 + \frac{P}{k} \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a^2 + b^2 \cos \omega}{b^2 \operatorname{sih} \omega}$$

deci în poziția de echilibru resortul este vertical. Se poate arăta că centrul de greutate al rigidului se găsește pe verticala punctului C, deoarece asupra solidului se poate considera că acționează forțele $\overline{T}$ și $\overline{P}$ greutatea aplicată în centrul de greutate; ca ele să se echilibreze trebuie să fie pe același suport, care este verticala punctului C.

6.2. Să se determine poziția de echilibru (unghiul φ) a plăcii omogene grele din fig. 6.2.

Rezolvare. Asupra plăcii acționează greutatea ei $\overline{G}$ și tensiunea din fir. Punînd condiția ca momentul

$$M_A = 0$$

rezultă că suportul greutății trece prin punctul A, adică centrul de greutate C se află pe verticala punctului A (v. problema 6.1).

Din tabela 5.1 nr. 7 avem:

$$OC = \frac{4r}{9\pi} \sqrt{2} .$$

Condiția ca C să se afle pe verticala punctului A este:

$$r \sin \varphi = OC \cos \alpha$$

unde

$$\alpha = \frac{3\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{\pi}{4} + \varphi$$

deci:

$$r \sin \varphi = \frac{4r}{9\pi} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right)$$

de unde rezultă:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{9\pi + 4}$$

$$\varphi \approx 7°5'.$$

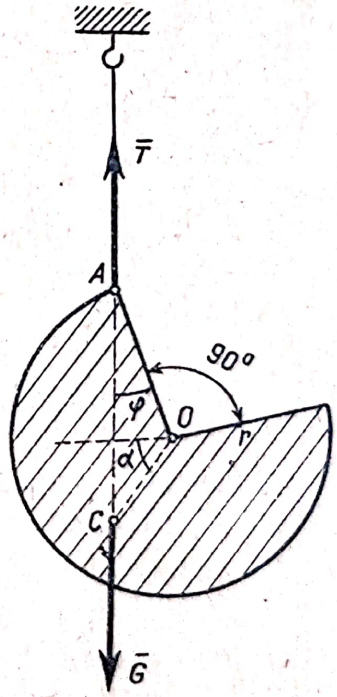


Fig. 6.2

6.3. O bară omogenă de lungime $2l$ și greutate P se reazemă în B de un perete vertical luciu iar în punctul A se sprijină pe muchia unui alt perete.

Să se afle unghiul α pentru poziția de echilibru și reacțiunile din A și B știind că punctul A se află la distanța a de primul perete.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Eliberăm bara de legături introducînd reacțiunile $\bar{N}_A$ și $\bar{N}_B$. Cu sistemul de referință din fig. 6.3 ecuațiile de echilibru (6.3) sînt:

$$X = N_B - N_A \sin \alpha = 0 \tag{1}$$

$$Y = -P + N_A \cos \alpha = 0 \tag{2}$$

$$M_z = M_B = N_A \cdot \frac{a}{\cos \alpha} - Pl \cos \alpha = 0. \tag{3}$$

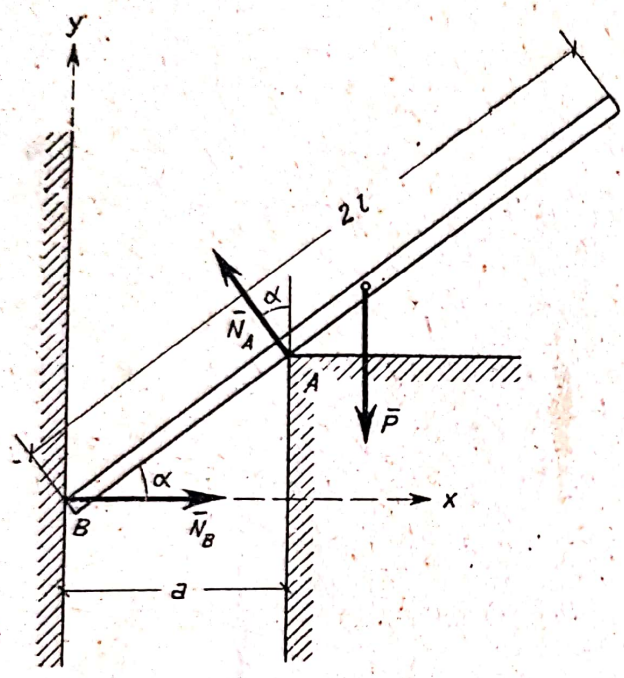


Fig. 6.3

Rezolvînd, din ecuațiile (1) și (2) rezultă:

$$N_A = \frac{P}{\cos \alpha} \qquad N_B = P \operatorname{tg} \alpha. \tag{4}$$

Introducînd pe N_A în (3) rezultă:

$$\cos \alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}. \tag{5}$$

Ca echilibrul să fie posibil $|\cos \alpha| \leqslant 1$ adică $a \leqslant l$ deci centrul de greutate al barei trebuie să fie în dreapta punctului A. În acest caz din (4) și (5):

$$N_A = P \sqrt[3]{\frac{l}{a}} \qquad N_B = P \frac{\sqrt{\sqrt[3]{l^2} - \sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a}}.$$

6.4. Într-un vas emisferic neted, de rază $OC = r$, este așezată o bară omogenă AB de lungime $2a$ și greutate P. Să se determine unghiul φ și reacțiunile în punctele A și C în poziția de echilibru.

Rezolvare. Eliberăm bara de legături introducînd reacțiunile normale $\bar{N}_A$ (normală pe emisferă deci avînd direcția razei OA) și $\bar{N}_C$ (normală pe bară). Cu sistemul de referință din fig. 6.4 ecuațiile de echilibru (6.3) sînt:

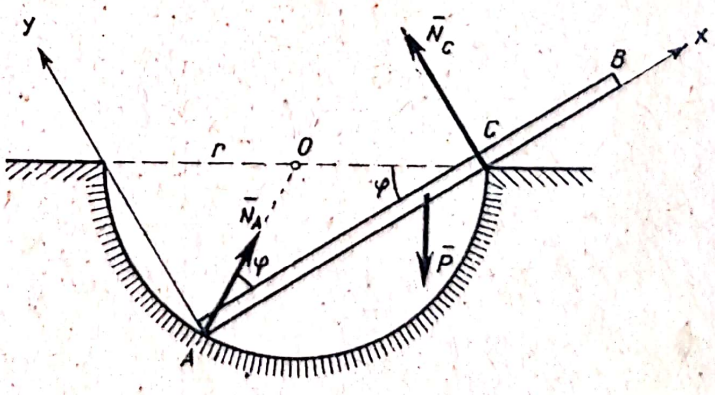


Fig. 6.4

$$X = N_A \cos \varphi - P \sin \varphi = 0 \tag{1}$$

$$Y = N_A \sin \varphi - P \cos \varphi + N_C = 0 \tag{2}$$

$$M_z = M_A = N_C 2r \cos \varphi - Pa \cos \varphi = 0. \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din ecuația (3) rezultă:

$$N_C = \frac{a}{2r} P. \tag{4}$$

Din ecuația (1):

$$N_A = P \operatorname{tg} \varphi. \tag{5}$$

Ecuația (2) în care s-a înlocuit (4) și (5) devine:

$$4r \cos^2 \varphi - a \cos \varphi - 2r = 0$$

care rezolvată dă:

$$\cos \varphi = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 32r^2}}{8r}.$$

Problemei nu convine decît soluția pozitivă, unghiul φ neputînd fi obtuz. Echilibrul este posibil pentru $\cos \varphi \leqslant 1$ deci pentru:

$$\frac{a + \sqrt{a^2 + 32r^2}}{8r} \leqslant 1$$

de unde, făcînd calculele, rezultă condiția:

$$a \leqslant 2r$$

deci centrul de greutate al barei trebuie să se găsească, pentru a fi posibil echilibrul, în stînga punctului C.

6.5. O bară omogenă AB, de lungime $2a$ și greutate P se sprijină cu capătul A pe o podea orizontală, netedă și pe două role C și D. Distanța între role este $CD = b$. Rola D este situată cu distanța h mai sus decît rola C. Să se determine presiunea barei pe podea și pe cele două role.

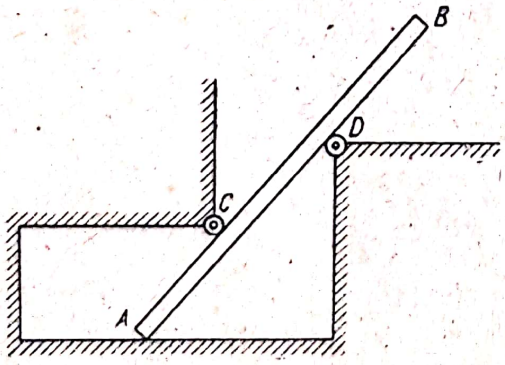


Fig. 6.5 *a*

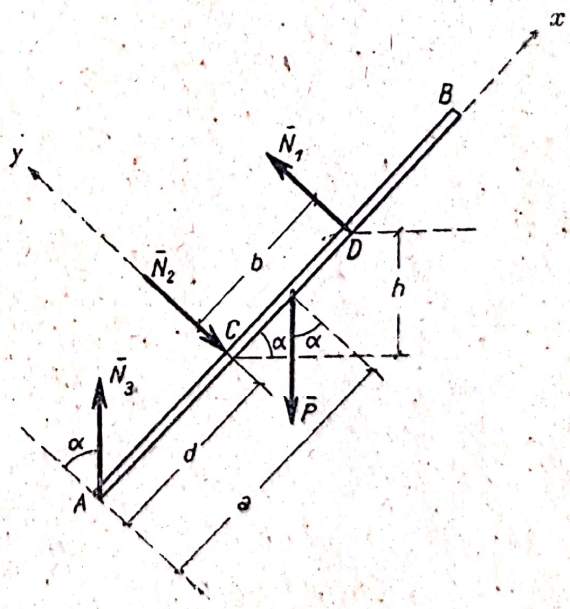


Fig. 6.5 *b*

Rezolvare. Eliberăm bara de legături introducînd reacțiunile normale $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$ și $\bar{N}_3$. Notînd distanța AC cu d, ecuațiile de echilibru (6.3) sînt:

$$X = N_3 \sin \alpha - P \sin \alpha = 0$$

$$Y = N_3 \cos \alpha - P \cos \alpha - N_2 + N_1 = 0$$

$$M_z = M_C = -N_3 \cos \alpha \cdot d - P \cos \alpha \cdot (a - d) + N_1 \cdot b = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd sistemul rezultă:

$$N_3 = P$$

$$N_1 = N_2 = P\frac{a}{b}\cos\alpha = P\frac{a\sqrt{b^2 - h^2}}{b^2}.$$

6.6. O bară omogenă AB de lungime $2l$ și greutate P se sprijină pe două plane lucii, unul orizontal și unul înclinat sub unghiul β față de orizontală. Bara este menținută în echilibru cu ajutorul unui fir fixat de capătul ei superior B și trecut peste scripetele C, de capătul firului atîrnînd greutatea Q. Să se determine condițiile de echilibru ale barei și reacțiunile din punctele A și B.

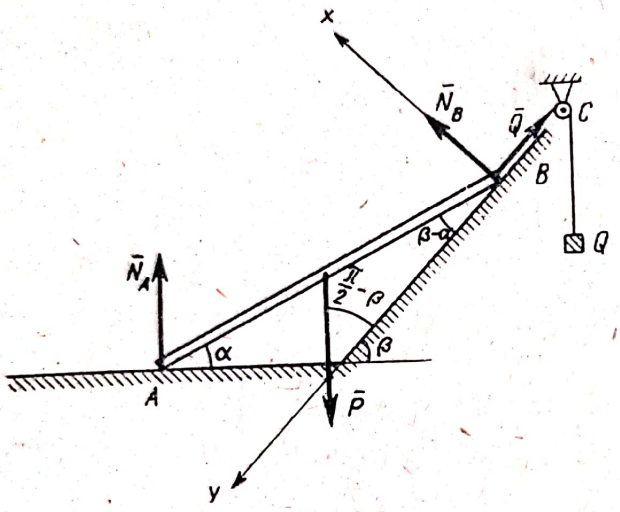


Fig. 6.6

Rezolvare. Eliberînd bara de legături asupra ei acționează forțele $\bar{P}$, $\bar{Q}$ (tensiunea din fir) și reacțiunile $\bar{N}_A$ și $\bar{N}_B$. Dacă α este unghiul de înclinare al barei, ecuațiile de echilibru (6.3) sînt:

$$X = -P\cos\beta + N_A\cos\beta + N_B = 0 \tag{1}$$

$$Y = P\sin\beta - Q - N_A\sin\beta = 0 \tag{2}$$

$$M_z = M_B = Pl\cos\alpha - N_A \cdot 2l\cos\alpha = 0. \tag{3}$$

Din ecuația (3) rezultă:

$$N_A = \frac{P}{2}$$

și înlocuind în ecuațiile (1) și (2) rezultă:

$$N_B = \frac{P}{2}\cos\beta$$

$$Q = \frac{P}{2}\sin\beta. \tag{4}$$

Deci pentru ca echilibrul să fie posibil între forțele P și Q trebuie să existe relația (4), în care caz echilibrul este indiferent (nu depinde de unghiul α).

6.7. O grindă simplu rezemată AB de lungime l și greutate neglijabilă este solicitată ca în figura 6.7. Dîndu-se P, p, q, M, a, b, c să se determine reacțiunile din reazemele A și B.

Aplicație numerică. $P = 10$ tf, $p = 2$ tf/m, $q = 1{,}6$ tf/m, $a = 1$ m, $b = 1{,}5$ m, $c = 1{,}6$ m, $l = 4$ m iar pentru M se vor lua valorile $M_1 = 10$ tfm și $M_2 = 30$ tfm.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Încărcarea uniform repartizată p poate fi înlocuită cu forța rezultantă $P_1 = pa$ aplicată în centrul forțelor paralele la distanța $\frac{a}{2}$ de reazemul A. Încărcarea triunghiulară poate fi înlocuită cu forța rezultantă $P_2 = \frac{1}{2} qb$ aplicată în centrul forțelor paralele la distanța $\frac{2}{3} b$ de reazemul B (v. problema 5.4). Pentru determinarea reacțiunilor putem folosi ecuațiile de echilibru (6.3) sau mai bine ecuațiile (6.6), deoarece scriind ecuațiile de momente în raport cu punctele A și B obținem ecuații cu cîte o singură necunoscută N_B respectiv N_A. Într-adevăr:

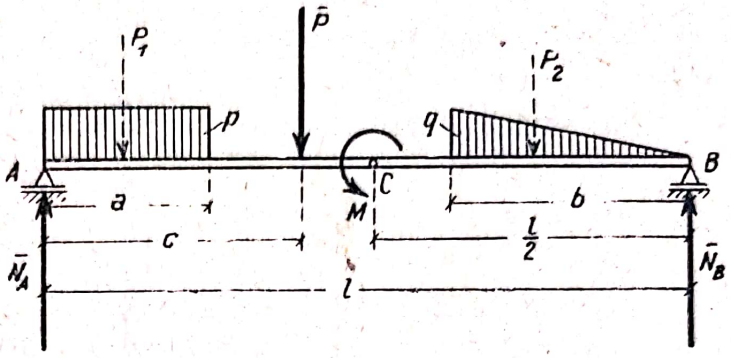


Fig. 6.7

$$M_A = N_B l - P_1 \frac{a}{2} - Pc - P_2 \left(l - \frac{2}{3} b \right) + M = 0$$

$$M_B = -N_A l + P_1 \left(l - \frac{a}{2} \right) + P \left(l - c \right) + P_2 \cdot \frac{2}{3} b + M = 0$$

de unde:

$$N_A = \frac{pa \left(l - \frac{a}{2} \right) + P(l - c) + \frac{1}{3} qb^2 + M}{l}$$

$$N_B = \frac{\frac{pa^2}{2} + Pc + \frac{1}{2} qb \left(l - \frac{2}{3} b \right) - M}{l}.$$

Efectuînd înlocuirile numerice în primul caz se obține:

$$N_A = 10{,}55 \text{ tf} \qquad N_B = 2{,}65 \text{ tf}$$

și în cazul al doilea:

$$N_A = 15{,}55 \text{ tf} \qquad N_B = -2{,}35 \text{ tf}.$$

Cum $N_B < 0$ condiția (6.5) nu este îndeplinită și grinda se ridică de pe reazemul B (afară de cazul cînd ar fi ancorată de reazem deci legătura ar fi bilaterală).

6.8. Pe trei arcuri elicoidale verticale A_1B_1, A_2B_2 și A_3B_3 avînd constantele elastice k_1, k_2, k_3 și extremitățile A_1, A_2, A_3 la același nivel se așază o bară omogenă de greutate P și lungime $2l$. Știind că tasarea Δl

Scanned with OKEN Scanner

a unui arc este proporțională cu forța F care o comprimă $\left(\Delta l = \frac{F}{k}\right)$ să se găsească poziția pe care trebuie să o ocupe resortul A_2B_2 $(A_1A_2 = x)$ astfel ca bara să rămînă orizontală după așezare.

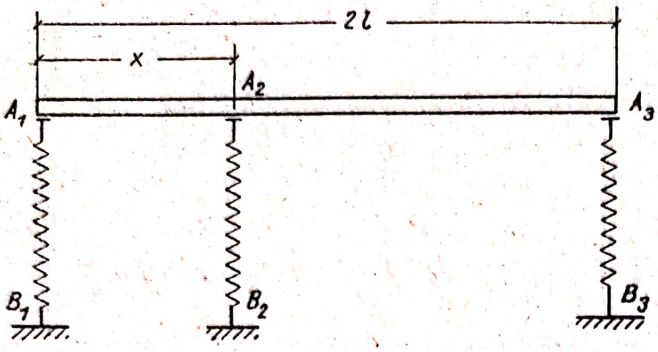


Fig. 6.8 *a*

Rezolvare. Vom nota cu N_1, N_2, N_3 forțele de compresiune din cele trei resoarte.

Pentru ca bara să fie orizontală este necesar:

a) Să fie îndeplinite condițiile de echilibru (6.3) pentru poziția orizontală adică:

$$Y = N_1 + N_2 + N_3 - P = 0 \tag{1}$$

$$M_{A_1} = N_2 x + 2N_3 l - Pl = 0. \tag{2}$$

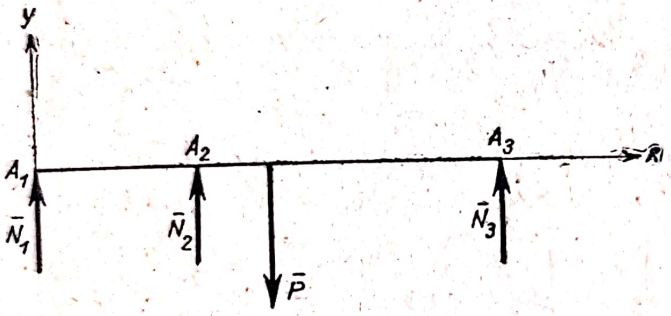


Fig. 6.8 *b*

b) Tasările celor trei resoarte fiind egale:

$$\Delta l = \frac{N_1}{k_1} = \frac{N_2}{k_2} = \frac{N_3}{k_3}. \tag{3}$$

Din sistemul de patru ecuații (1), (2), (3) putem determina forțele necunoscute N_1, N_2, N_3 și distanța x. Avem:

$$\Delta l = \frac{N_1 + N_2 + N_3}{k_1 + k_2 + k_3} = \frac{P}{k_1 + k_2 + k_3}$$

deci:

$$N_1 = \frac{Pk_1}{k_1 + k_2 + k_3} \qquad N_2 = \frac{Pk_2}{k_1 + k_2 + k_3} \qquad N_3 = \frac{Pk_3}{k_1 + k_2 + k_3}$$

iar:

$$x = \frac{(P - 2N_3)\, l}{N_2} = \frac{k_1 + k_2 - k_3}{k_2}\, l.$$

Ca problema să aibă sens trebuie ca $0 < x < 2l$ adică:

$$k_1 + k_2 > k_3$$

și

$$k_3 + k_2 > k_1.$$

6.9. Un vagonet de greutate P este menținut pe un plan înclinat cu unghiul α printr-un cablu trecut peste scripetele O și paralel cu planul.

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine presiunea roților vagonului pe plan în punctele A și B și tensiunea T a cablului, dacă $AD = DB = a$ (D este proiecția centrului de greutate C al vagonetului pe planul înclinat) $CE = b$.

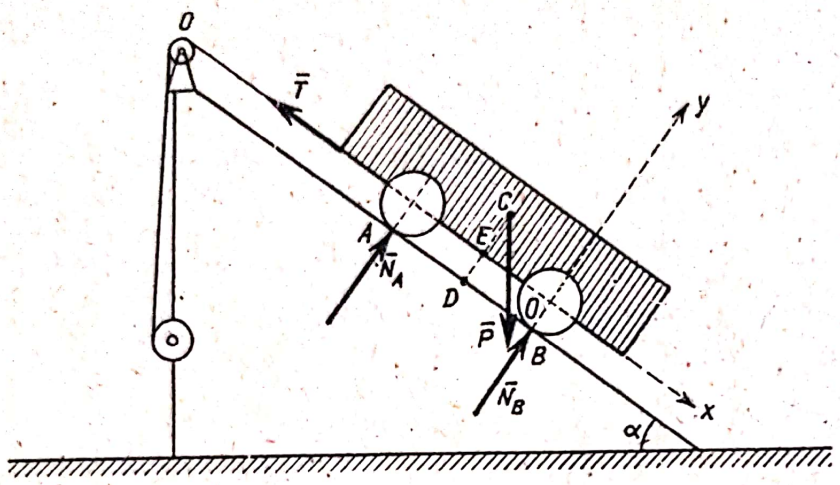


Fig. 6.9 *a*

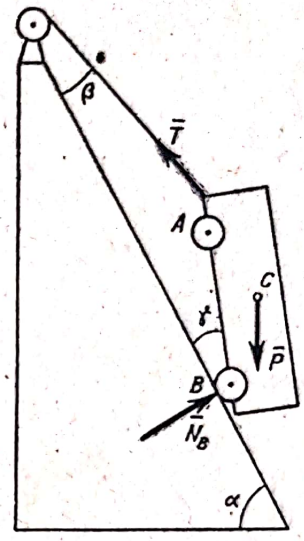


Fig. 6.9 *b*

Rezolvare. Eliberînd căruciorul de legături (fig. 6.9 *a*) ecuațiile de echilibru (6.3) sînt:

$$X = -T + P \sin \alpha = 0 \tag{1}$$

$$Y = N_A - P \cos \alpha + N_B = 0 \tag{2}$$

$$M_0 = -N_A \cdot 2a + P \cos \alpha \cdot a - P \sin \alpha \cdot b = 0. \tag{3}$$

Rezolvînd sistemul rezultă:

$$N_A = \frac{a \cos \alpha - b \sin \alpha}{2a} P$$

$$N_B = \frac{a \cos \alpha + b \sin \alpha}{2a} P$$

$$T = P \sin \alpha.$$

Pentru ca roata A să nu se desprindă de pe plan conform (6.5) trebuie ca:

$$N_A > 0 \qquad \operatorname{tg} \alpha < \frac{a}{b}.$$

Dacă $\operatorname{tg} \alpha > \frac{a}{b}$ forțele care acționează asupra căruciorului sînt cele din fig. 6.9 *b*. Cu ajutorul ecuațiilor de echilibru (6.3) cititorul poate determina poziția de echilibru a căruciorului (unghiul β sau γ) precum și forțele $\bar{T}$ și $\bar{N}_B$.

6.10. O placă pătrată $ABCD$, de greutate $\bar{P}$ este atîrnată de firul BE; cu vîrful A ea se sprijină pe un plan vertical neted EA. Să se deter-

mine reacțiunea planului în punctul A, tensiunea T a firului și unghiul φ dacă $AB = BE = a$.

Rezolvare. Eliberînd placa de legături, asupra ei acționează forțele $\bar{P}$, $\bar{T}$ și $\bar{N}_A$ reacțiunea planului. Cu sistemul de referință din fig. 6.10 ecuațiile de echilibru (6.3) sînt:

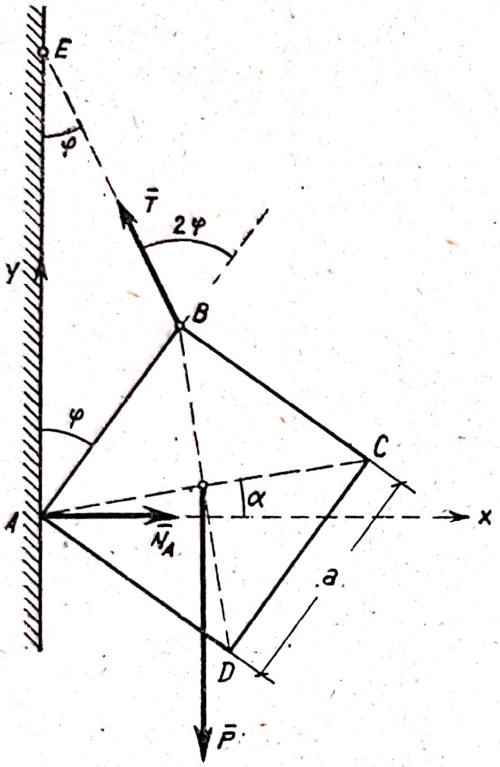


Fig. 6.10

$$X = N_A - T\sin\varphi = 0 \qquad (1)$$

$$Y = -P + T\cos\varphi = 0 \qquad (2)$$

$$M_A = Ta\sin 2\varphi - Pa\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = 0 \qquad (3)$$

deoarece

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \varphi.$$

Rezolvînd sistemul, din (2) rezultă:

$$T = \frac{P}{\cos\varphi} \qquad (4)$$

din (1) și (4):

$$N_A = P\,\mathrm{tg}\varphi.$$

Introducînd (4) în (3) și făcînd calculele rezultă:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{3} \quad \text{și deci} \quad T = \frac{\sqrt{10}}{3}P;\ N_A = \frac{1}{3}P.$$

6.11. Un rigid este format din două bare omogene AC și CB, unite solidar în punctul C și formînd un unghi drept. Rigidul se află în echilibru într-un plan vertical sprijinindu-se pe un cilindru fix, absolut neted, cu raza r, a cărui axă este orizontală. Să se afle poziția de echilibru (unghiul α dintre latura AC și verticală) $AC = 2a$, $CB = 2b$.

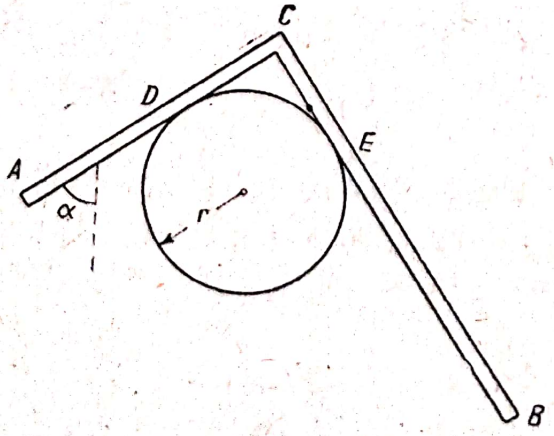


Fig. 6.11 *a*

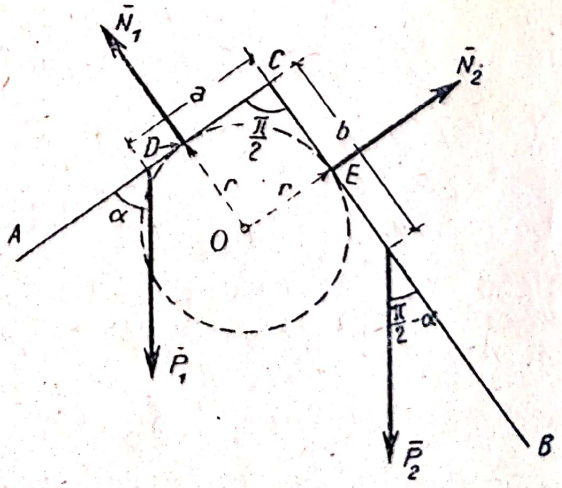


Fig. 6.11 *b*

Rezolvare. Asupra rigidului acționează forțele $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ (greutățile barelor) și reacțiunile normale $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$. Scriind ecuația de momente în raport cu punctul O (prin care trec suporturile ambelor reacțiuni $\overline{N}_1$ și $\overline{N}_2$), singura necunoscută va fi unghiul α:

$$P_1 [r \cos\alpha + (a - r) \sin\alpha] - P_2 [r \sin\alpha + (b - r) \cos\alpha] = 0. \qquad (1)$$

Barele fiind omogene, notînd cu γ greutatea pe unitatea de lungime, rezultă:

$$P_1 = 2a\gamma; \qquad P_2 = 2b\gamma.$$

Înlocuind în ecuația (1) pe P_1 și P_2 după simplificări rezultă:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(a + b) r - b^2}{(a + b) r - a^2}.$$

6.12. O bară AB omogenă de greutate G și lungime $2l$ se sprijină în punctele A și B pe interiorul unui cerc rigid luciu de rază R ($2l < 2R$).

Se cere să se determine forța $\overline{F}$ normală pe bară la distanța a de capătul A al barei, pentru ca bara să rămînă în repaus cu capătul A în punctul cel mai de jos al cercului.

Rezolvare. Necunoscutele problemei sînt: $\overline{F}$, $\overline{N}_A$, $\overline{N}_B$ deoarece poziția de echilibru definită de unghiul α dintre bară și diametrul vertical este cunoscută

$$2l = 2R \cos\alpha. \qquad (1)$$

Scriind numai ecuația de momente în raport cu punctul O prin care trec suporturile reacțiunilor necunoscute $\overline{N}_A$ și $\overline{N}_B$ putem determina forța $\overline{F}$

$$M_0 = G \cos\alpha \cdot R \sin\alpha - F(R \cos\alpha - a) = 0. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă:

$$F = \frac{l\sqrt{R^2 - l^2}}{R(l - a)} G.$$

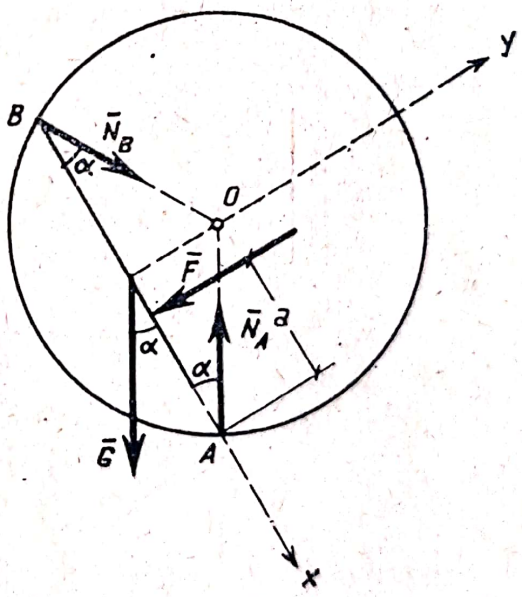


Fig. 6.12

6.13. Greutatea Q este atîrnată la marginea unei emisfere omogene de rază r și greutate P, așezată cu partea convexă pe un plan orizontal, luciu. Să se afle unghiul φ, dintre axa de simetrie a emisferei și verticală, în poziția de echilibru.

Rezolvare. Introducînd reacțiunea $\overline{N}$ din punctul de reazem (fig. 6.13), sistemul format din emisferă și greutatea $\overline{Q}$ poate fi considerat liber și deci i se pot aplica condițiile de echilibru (6.3). Vom scrie numai ecuația de

Scanned with OKEN Scanner

momente în raport cu punctul A pentru ca reacțiunea $\bar{N}$ să nu apară în ecuație. $\left(\text{Din tabela 5.1 nr. 11 se știe că } OC = \frac{3}{8} r\right)$.

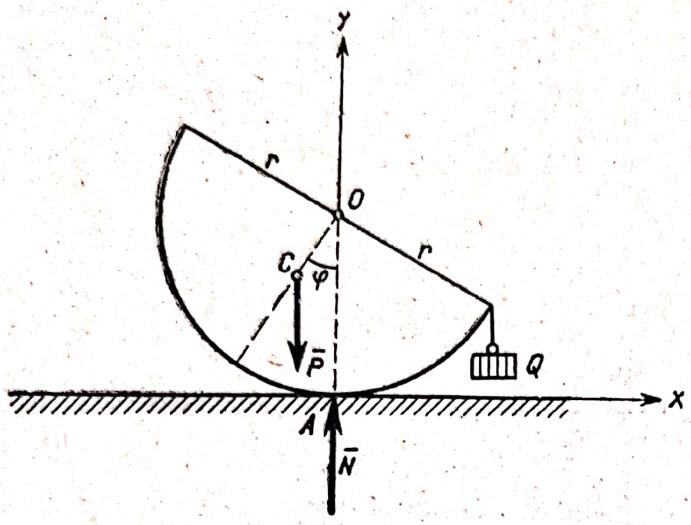


Fig. 6.13

$$M_A = P \cdot \frac{3}{8} r \sin\varphi - Q\, r \cos\varphi = 0$$

de unde:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{8\,Q}{3\,P}.$$

6.14. O placă omogenă orizontală de greutate P având dimensiunile din fig. 6.14 este rezemată în punctele A, C și E. Să se determine reacțiunile din reazeme.

Rezolvare. Cu sistemul de referință din fig. 6.14 descompunînd placa în două plăci pătrate $ABCH$ (de arie $A_1 = 4\,a^2$) și $DEFH$ (de arie $A_2 = a^2$) coordonatele centrului maselor G (5.6) sînt:

$$\xi = \frac{4a^2 \cdot 2a + a^2 \cdot \frac{a}{2}}{4a^2 + a^2} = \frac{17}{10}\, a$$

$$\eta = \frac{4a^2 \cdot a + a^2 \cdot \frac{3a}{2}}{4a^2 + a^2} = \frac{11}{10}\, a.$$

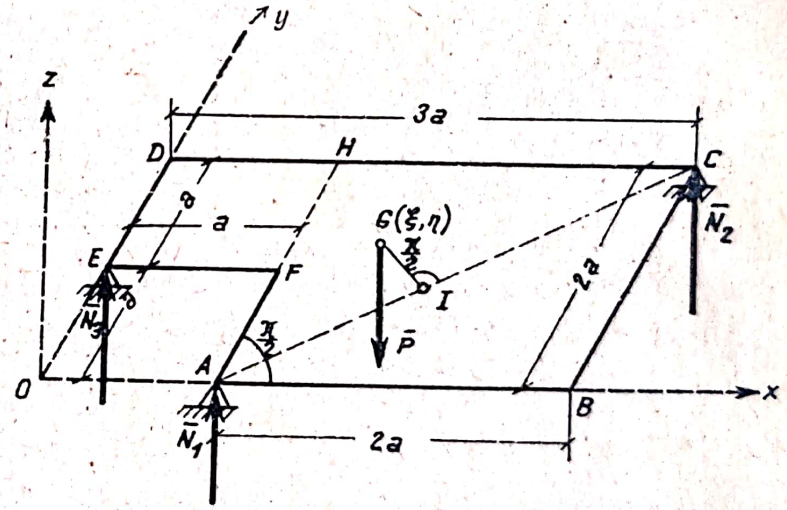


Fig. 6.14

Eliberînd placa de legături, asupra ei acționează greutatea $\bar{P}$ aplicată în G și reacțiunile normale din punctele A, C și E, $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$, $\bar{N}_3$. Toate aceste forțe fiind paralele cu axa Oz folosim condițiile de echilibru (6.4):

$$Z = -P + N_1 + N_2 + N_3 = 0$$

$$M_x = -P\,\frac{11}{10}\, a + N_2 \cdot 2a + N_3 \cdot a = 0$$

$$M_y = P\,\frac{17}{10}\, a - N_1 a - N_2 \cdot 3a = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd sistemul se obţine:

$$N_1 = 0{,}35P \qquad N_2 = 0{,}45P \qquad N_3 = 0{,}2P.$$

În locul ecuaţiilor (6.4) puteam scrie ecuaţiile (6.7) în raport cu axele definite de dreptele AC, CE şi EA obţinînd trei ecuaţii cu cîte o singură necunoscută N_3, N_1 şi N_2. Astfel:

$$M_{AC} = N_3\, a\sqrt{2} - P \cdot GI = 0.$$

însă $GI = \frac{a}{5}\sqrt{2}$ de unde:

$$N_3 = \frac{P}{5} = 0{,}2\ P.$$

6.15. O masă rotundă de rază r are trei picioare egale ca lungime, ale căror capete formează un triunghi echilateral ABC cu latura a. Greutatea

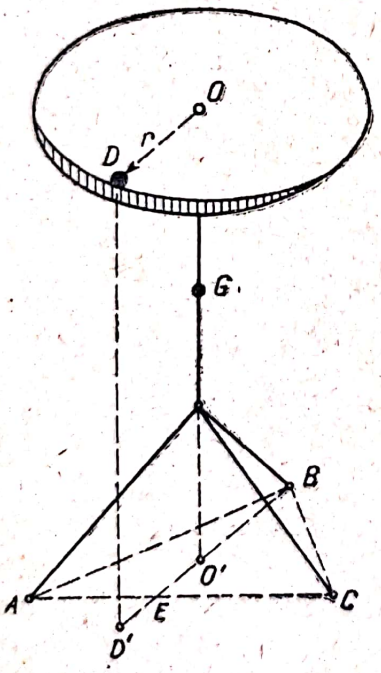


Fig. 6.15 *a*

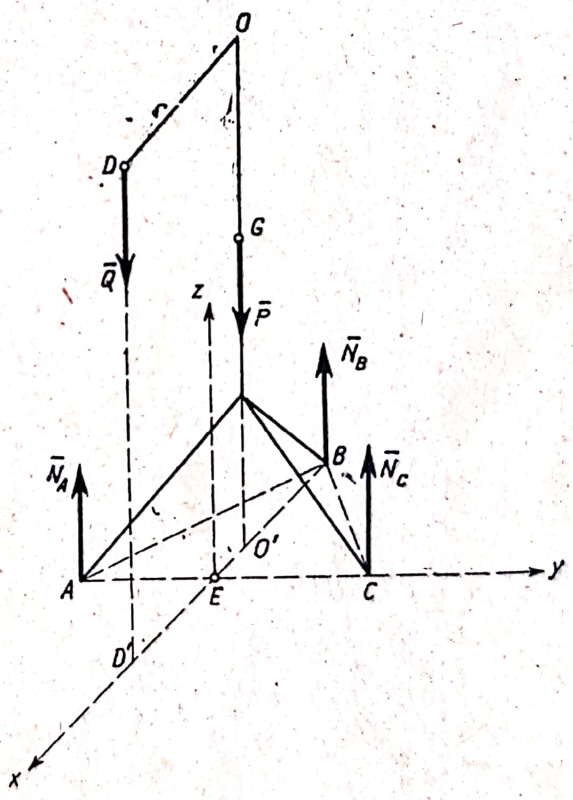


Fig. 6.15 *b*

mesei este egală cu P şi aplicată în punctul G aflat pe axa mesei. Pe marginea din faţă a mesei, în punctul D se află greutatea Q ($OD \parallel O'D'$ fiind perpendicular pe AC).

Să se afle reacţiunile podelei în punctele A, B şi C. Pentru ce valoare Q se va răsturna masa?

Rezolvare. Eliberînd masa de legături se obţine schema din figura 6.15 *b* în care placa rotundă a mesei nejucînd nici un rol n-a mai fost desenată.

S-a ales punctul E ca origine a axelor de coordonate. Ecuațiile de echilibru (6.4) sînt:

$$Z = N_A + N_B + N_C - P - Q = 0 \qquad (1)$$

$$M_x = -N_A \cdot EA + N_C \cdot CE = 0 \qquad (2)$$

$$M_y = Q \cdot (r - O'E) + N_B \cdot BE - P \cdot O'E = 0, \qquad (3)$$

O' fiind centrul de greutate al triunghiului echilateral $O'E = \frac{1}{3} \cdot a \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BE = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, $AE = CE = \frac{a}{2}$. Înlocuind în ecuația (1), (2) și (3) rezultă:

$$N_A = N_C = \frac{P+Q}{3} + \frac{Qr}{a\sqrt{3}}; \qquad N_B = \frac{P+Q}{3} - \frac{2Qr}{a\sqrt{3}}.$$

Aceste reacțiuni se puteau determina și cu ajutorul condițiilor (6.7) scriind ecuații de momente față de axele definite de dreptele AB, BC și CA, ecuații cu cîte o singură forță necunoscută.

Dacă va fi pericol de răsturnare, răsturnarea se va face în jurul axei Oy, piciorul B desprinzîndu-se de pe podea, deci conform (6.5) masa se va răsturna dacă $N_B < 0$, adică:

$$\frac{P+Q}{3} - \frac{2Qr}{a\sqrt{3}} < 0$$

sau:

$$Q > P \frac{a}{2\sqrt{3}r - a}$$

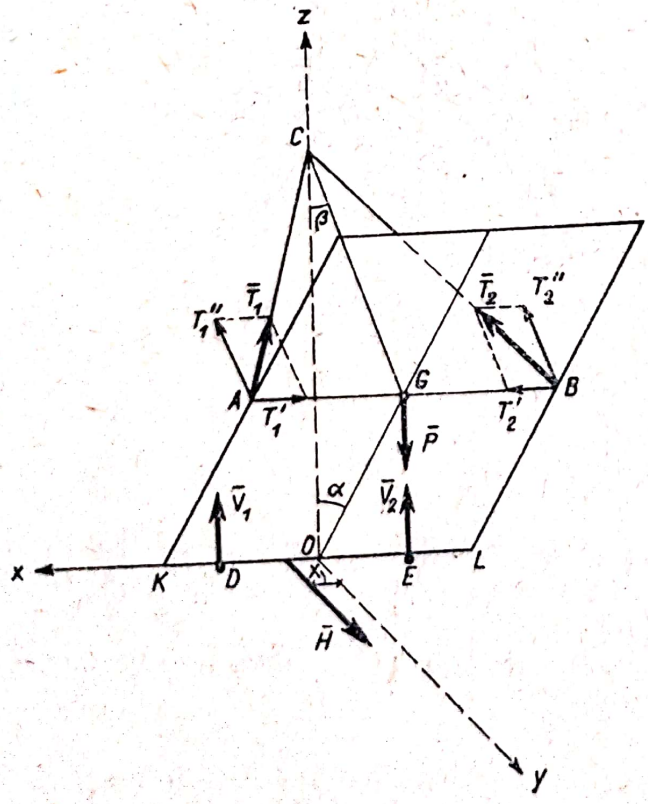


Fig. 6.16 *a*

cu condiția $2\sqrt{3}\, r - a > 0$ sau $r > \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Dacă $r \leqslant \frac{a}{2\sqrt{3}}$ atunci întotdeauna $N_B > 0$ și masa nu se răstoarnă oricît de mare ar fi Q.

6.16. Un tablou de greutate P în formă de dreptunghi cu laturile $2a$ și $2b$ este atîrnat de două fire AC și BC și se sprijină cu muchia KL de perete precum și pe doi opritori rotunzi și netezi D și E. Să se afle tensiunea firelor și presiunea verticală a tabloului asupra fiecărui opritor dacă

$AK = BL = b$, $KO = OL = a$, $OC = c$, $AC = BC = l$ și $DO = OE = d$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Izolînd tabloul, asupra lui acționează forțele: $\bar{P}$ greutatea tabloului, $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$ tensiunile din fire, $\bar{V}_1$, $\bar{V}_2$ reacțiunile normale din opritor și $\bar{H}$ reacțiunea peretelui, care este rezultanta presiunilor exercitate de perete, reacțiune care se aplică la o distanță necunoscută x de punctul O.

Scriind condițiile de echilibru (6.2) vom obține un sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute (T_1, T_2, V_1, V_2, H, x). Pentru a ușura scrierea ecuațiilor de proiecție și de momente descompunem forțele $\bar{T}_1$ și $\bar{T}_2$ în planul firelor (planul CAB) pe direcțiile AB (Ox) și CG (fig. 6.16 *b*). Componentele acestor forțe sînt:

$$T_1' = T_1 \cos\varphi \qquad T_1'' = T_1 \sin\varphi \qquad (1)$$

$$T_2' = T_2 \cos\varphi \qquad T_2'' = T_2 \sin\varphi \qquad (2)$$

unde:

$$\cos\varphi = \frac{a}{l}. \qquad (3)$$

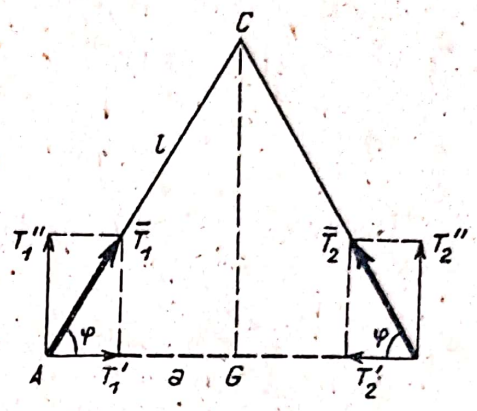


Fig. 6.16 *b*

Notînd α unghiul format de tablou cu peretele și β unghiul format de planul firelor cu peretele, ecuațiile de proiecții sînt:

$$X = -T_1' + T_2' = 0 \qquad (4)$$

$$Y = H - T_1'' \sin\beta - T_2'' \sin\beta = 0 \qquad (5)$$

$$Z = -P + V_1 + V_2 + T_1'' \cos\beta + T_2'' \cos\beta = 0. \qquad (6)$$

Pentru scrierea ecuațiilor de momente în raport cu axele Ox și Oy proiectăm forțele pe planul yOz (fig. 6.16 *c*) și pe planul zOx (fig. 6.16 *d*)

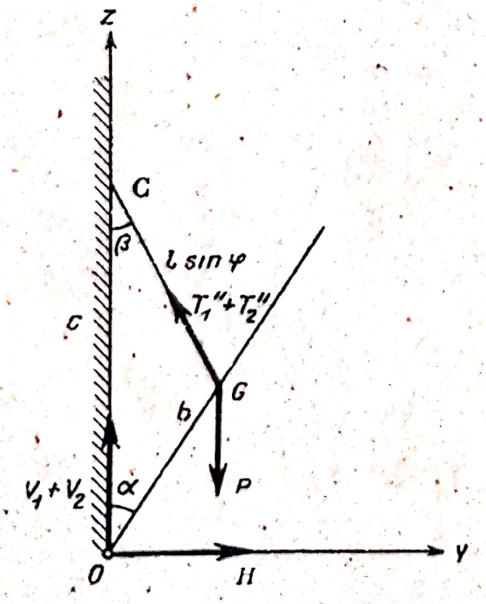


Fig. 6.16 *c*

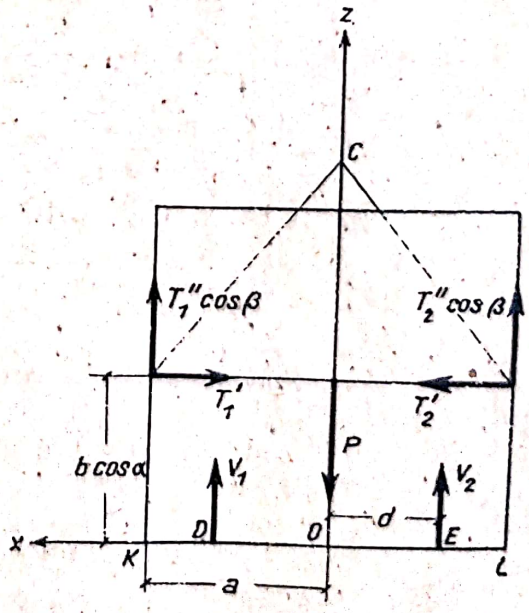


Fig. 6.16 *d*

și calculăm momentele proiecțiilor forțelor în raport cu punctul O. Ecuația de momente în raport cu axa Oz se scrie foarte ușor deoarece singura forță care are moment nenul față de Oz este $\overline{H}$ celelalte forțe întîlnind axa ($\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$) sau fiind paralele cu ea ($\overline{P}$, $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$). Obținem astfel:

$$M_x = (T_1'' + T_2'')\, c \sin \beta - Pb \sin \alpha = 0 \tag{7}$$

$$M_y = V_2 d - V_1 d + T_2'' \cos \beta \cdot a - T_1'' \cos \beta \cdot a + T_2' b \cos \alpha - T_1' b \cos \alpha = 0 \tag{8}$$

$$M_z = Hx = 0\,. \tag{9}$$

Rezolvînd sistemul ecuațiilor (4) ... (9) și ținînd seama de relațiile (1) ... (3) rezultă:

$$T_1 = T_2 = \frac{Pb \sin \alpha}{2c \sin \beta \sin \varphi} \tag{10}$$

$$V_1 = V_2 = \frac{P(c \sin \beta - b \sin \alpha \cos \beta)}{2c \sin \beta} \tag{11}$$

$$H = \frac{Pb \sin \alpha}{c} \tag{12}$$

$$x = 0.$$

Însă din fig. 6.16 *c* aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul OGC avem:

$$\frac{l \sin \varphi}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin (\alpha + \beta)}$$

și înlocuind valorile unghiurilor α, β și φ în relațiile (10)—(12) obținem:

$$T_1 = T_2 = \frac{Pl}{2c} \tag{13}$$

$$V_1 = V_2 = \frac{Pb \cos \alpha}{2c} = \frac{P(a^2 + b^2 + c^2 - l^2)}{4c^2} \tag{14}$$

deoarece $\cos \alpha = \dfrac{b^2 + c^2 + a^2 - l^2}{2bc}$ (se aplică teorema lui Pitagora generalizată în triunghiul OGC, (fig. 6.16 *c*):

$$H = \frac{P}{2c^2} \sqrt{4b^2c^2 - (a^2 + b^2 + c^2 - l^2)^2} \tag{15}$$

Observație. Existînd simetrie din punct de vedere geometric și mecanic se putea afirma de la început că $T_1 = T_2$, $V_1 = V_2$ și $x = 0$. În acest caz forțele V_1 și V_2 se puteau reduce la o forță egală cu $2V_1$ avînd ca suport axa de simetrie Oz, forțele T_1 și T_2 aveau rezultanta $2T_1'' = 2T_1 \sin \varphi$ aplicată pe dreapta CG (fig. 6.16 *b*) iar forța H avea ca suport axa Oy. Sistemul format din forțele P, $2V_1$, $2T_1 \sin\varphi$ și H acționau în planul de simetrie yOz al tabloului și astfel problema era redusă la o problemă în plan (v. fig. 6.16 *c*).

Scanned with OKEN Scanner

6.17. O bară omogenă AB de lungime $2a$ și greutate $\bar{P}$ este fixată la capătul ei inferior printr-o articulație, de un perete în A. De capătul ei superior este prins un fir, trecut peste un scripete mic C, așezat pe aceeași verticală cu punctul A. Firul poartă la extremitatea lui liberă greutatea $\bar{Q}$. Să se afle unghiul $\alpha = \sphericalangle CAB$ și reacțiunea articulației în poziția de echilibru știind că $CA = BA$.

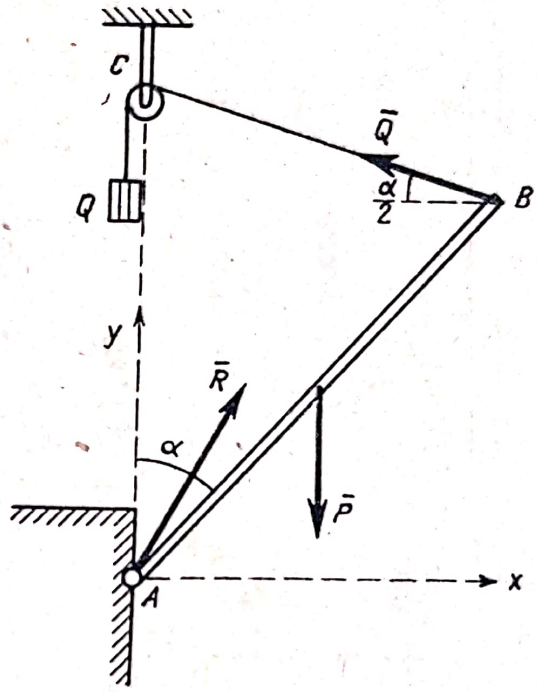


Fig. 6.17

Rezolvare. Eliberăm bara de legături; asupra ei acționează greutatea $\bar{P}$, tensiunea din fir egală cu Q și reacțiunea $\bar{R}$ din articulație. Notînd R_x, R_y componentele necunoscute ale forței $\bar{R}$ pe axele sistemului de referință din fig. 6.17 ecuațiile de echilibru (6.3) sînt:

$$X = R_x - Q\cos\frac{\alpha}{2} = 0 \qquad (1)$$

$$Y = R_y + Q\sin\frac{\alpha}{2} - P = 0 \qquad (2)$$

$$M_A = -Pa\sin\alpha + Q\cdot 2a\cos\frac{\alpha}{2} = 0. \qquad (3)$$

Ecuația (3) se mai poate scrie:

$$\cos\frac{\alpha}{2}\left(Q - P\sin\frac{\alpha}{2}\right) = 0$$

ecuație care are soluțiile:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = 0 \qquad \alpha_1 = \pi$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{Q}{P} \qquad \alpha_2 = 2\arcsin\frac{Q}{P} \qquad \text{dacă } Q \leqslant P.$$

Pentru $\alpha_1 = \pi$: $\quad R_x = 0; \quad R_y = P - Q; \quad R = |Q - P|$

Pentru $\alpha_2 = 2\arcsin\frac{Q}{P}$: $\quad R_x = \frac{Q}{P}\sqrt{P^2 - Q^2}; \quad R_y = \frac{P^2 - Q^2}{P};$

$$R = \sqrt{P^2 - Q^2}.$$

6.18. De capătul A al unei bare $OA = 2l$ de greutate P este atîrnată o greutate Q. Un resort este fixat într-un punct B situat la distanța $2l$ pe verticala lui O și prinde capătul A al barei, tensiunea din resort fiind proporțională cu lungimea lui, coeficientul de proporționalitate fiind k. Se cer pozițiile de echilibru.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Eliberăm bara de legături; asupra ei acționează forțele $\bar{P}$, $\bar{Q}$, tensiunea $\bar{T} = k\,\overline{AB}$ din resort și reacțiunea $\bar{R} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j}$ din articulație. Cum $OA = OB = 2l$ triunghiul OAB este isoscel. Notînd cu $\alpha = \sphericalangle AOB$, avem:

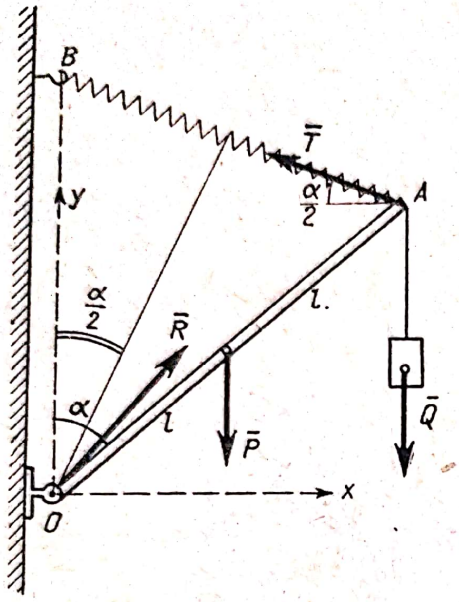


Fig. 6.18

$$T = k\left(4l\sin\frac{\alpha}{2}\right). \qquad (1)$$

Necunoscutele problemei sînt R_x, R_y și α, pentru determinarea lor dispunem de cele trei ecuații (6.3):

$$X = R_x - T\cos\frac{\alpha}{2} = 0 \qquad (2)$$

$$Y = R_y + T\sin\frac{\alpha}{2} - P - Q = 0 \qquad (3)$$

$$M_A = -Pl\sin\alpha - Q\cdot 2l\sin\alpha + T\cdot 2l\cos\frac{\alpha}{2} = 0. \qquad (4)$$

Înlocuind în ecuația (4) pe T din ecuația (1) se obține:

$$\sin\alpha\,(4kl - P - 2Q) = 0$$

ecuație care are soluțiile:

$$\sin\alpha = 0 \qquad \alpha = 0 \qquad \alpha = \pi \qquad (5)$$

și

$$4kl = P + 2Q. \qquad (6)$$

Dacă relația (6) este îndeplinită, echilibrul este posibil pentru orice poziție, (echilibru indiferent). În caz contrar pozițiile de echilibru sînt date de (5). Componentele reacțiunii sînt:

$$R_x = 2kl\sin\alpha$$

$$R_y = P + Q - 4kl\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

6.19. O bară omogenă, de lungime $2l$ și greutate P, este fixată prin articulația O de un perete, iar în punctul A ea se sprijină pe un cilindru circular, fix, de rază r, al cărui centru B se află la distanța d de perete. Să se afle reacțiunile în punctele A și B fiind cunoscut unghiul α, dintre bară și orizontală. Să se analizeze cazurile particulare: 1) cînd bara atinge cilindrul la mijlocul ei; 2) cînd $\alpha = 0$; 3) cînd punctele B și O se află la același nivel.

Rezolvare. Eliberînd bara de legături, cum:

$$OA = \frac{d - r\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Scanned with OKEN Scanner

ecuațiile de echilibru (6.3) sînt:

$$X = R_x - N \sin \alpha = 0$$

$$Y = R_y + N \cos \alpha - P = 0$$

$$M_0 = N \cdot \frac{d - r \sin \alpha}{\cos \alpha} - Pl \cos \alpha = 0.$$

Rezolvînd sistemul se obține:

$$N = P \frac{l \cos^2 \alpha}{d - r \sin \alpha}, \quad R_x = P \frac{l \cos^2 \alpha \sin \alpha}{d - r \sin \alpha},$$

$$R_y = P\left(1 - \frac{l \cos^3 \alpha}{d - r \sin \alpha}\right). \quad (1)$$

Cazurile particulare:

1. În acest caz $l = \frac{d - r \sin \alpha}{\cos \alpha}$ de unde rezultă: $d = l \cos \alpha + r \sin \alpha$; înlocuind pe d din expresiile reacțiunilor cu această valoare rezultă: $N = P \cos \alpha$, $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = P \sin \alpha$ iar unghiul φ format de $\overline{R}$ cu axa Ox este dat de ecuația:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R_y}{R_x} = \frac{P \sin^2 \alpha}{P \cos \alpha \sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha,$$

adică $\overline{R}$ este orientată în direcția OA.

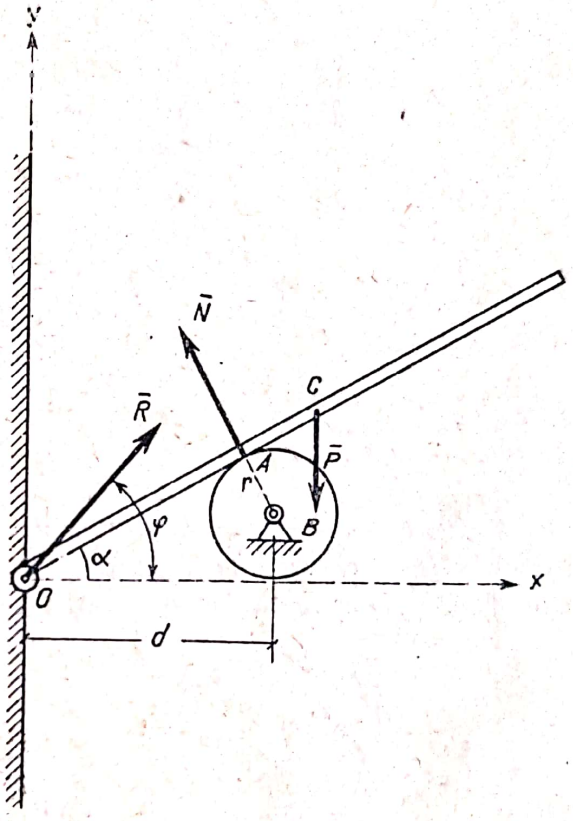


Fig. 6.19

2. Dacă $\alpha = 0$ expresiile (1) devin:

$$N = P \frac{l}{d}, \qquad R_x = 0, \qquad R_y = P \frac{d - l}{d}.$$

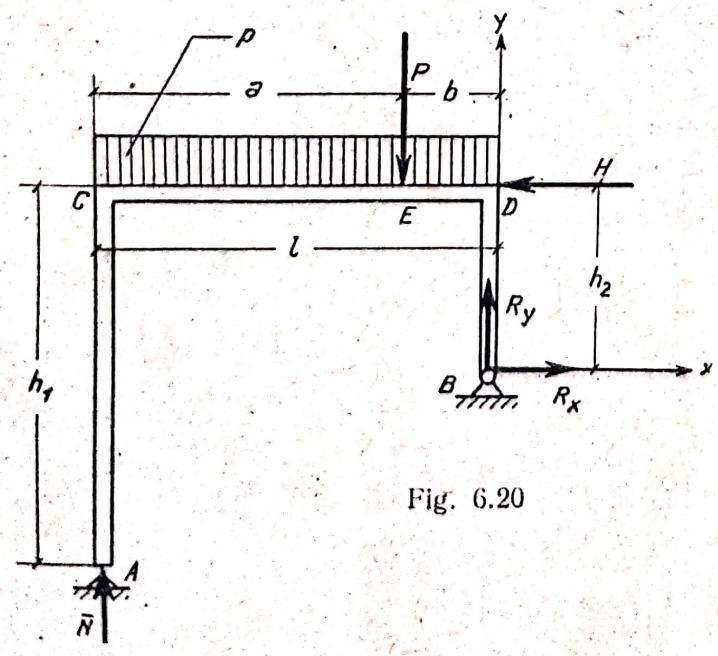


Fig. 6.20

3. În acest caz $r = d \sin \alpha$ iar expresiile (1) devin:

$$N = P \frac{l}{d}, \quad R_x = P \frac{lr}{d^2},$$

$$R_y = \frac{P}{d^2}\left(d^2 - l\sqrt{d^2 - r^2}\right).$$

6.20. Un cadru $ACDB$ articulat în B și rezemat în A este încărcat cu o sarcină uniform distribuită p pe unitatea de lungime și cu două forțe, una verticală $\overline{P}$ și alta orizontală $\overline{H}$ aplicate în punc-

tele D și E (fig. 6.20). Să se afle reacțiunile din A și B, neglijînd greutatea proprie a cadrului.

Rezolvare. Eliberînd cadrul de legături, condițiile de echilibru (6.3) sînt:

$$X = R_x - H = 0$$
$$Y = R_y + N - P - pl = 0$$
$$M_B = -Nl + pl \cdot \frac{l}{2} + P \cdot b + H \cdot h_2 = 0$$

de unde:

$$R_x = H$$
$$R_y = p\frac{l}{2} + P\frac{a}{l} - H\frac{h_2}{l}$$
$$N = p\frac{l}{2} + P\frac{b}{l} + H\frac{h_2}{l}.$$

6.21. O bară omogenă OA de lungime l, greutate G și greutate specifică γ articulată în O este cufundată cu capătul a într-un lichid avînd greutatea specifică γ_0, suprafața lichidului fiind la distanța h de articulația O ($h < l$). Știind că rezultanta F a presiunilor lichidului asupra barei este egală cu greutatea volumului de bară cufundat și că presiunea este proporțională cu adîncimea, să se determine poziția de echilibru a barei definită de unghiul θ format de bară cu verticala.

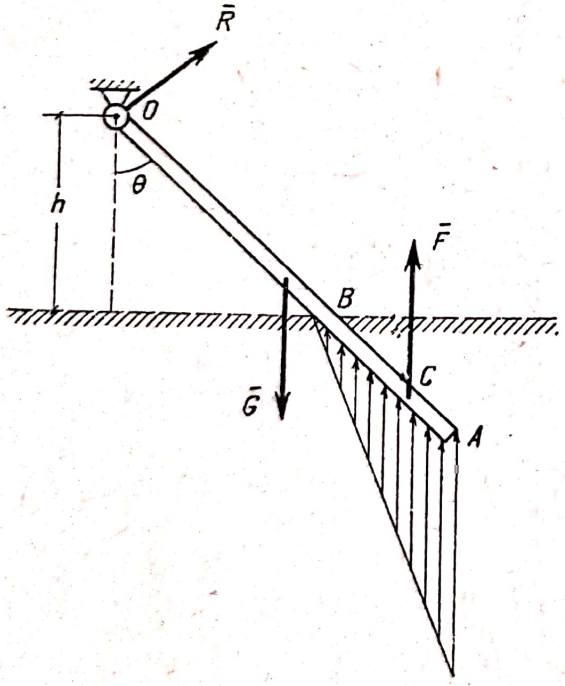


Fig. 6.21 *a*

Rezolvare. Eliberînd bara de legături, asupra ei acționează reacțiunea $\bar{R}$ din articulația O, greutatea $\bar{G}$ și presiunea verticală a lichidului:

$$F = \gamma_0 V$$

unde V este volumul de bară cufundat în lichid. Cum:

$$V = \frac{G}{\gamma}\frac{l_1}{l} \qquad (1)$$

unde:

$$l_1 = AB = l - \frac{h}{\cos\theta} \qquad (1)$$

$$F = \frac{\gamma_0}{\gamma}\left(1 - \frac{h}{l\cos\theta}\right)G. \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum presiunile variază după o lege de repartiție triunghiulară (proporționale cu adîncimea) forța ascensională F se aplică în centrul forțelor paralele C unde:

$$AC = \frac{l_1}{3} = \frac{1}{3}\left(l - \frac{h}{\cos\theta} \right).$$

Deoarece ne interesează numai poziția de echilibru a barei pentru a elimina reacțiunea necunoscută $\bar{R}$ scriem ecuația de momente în raport cu punctul O:

$$M_0 = -C\frac{l}{2}\sin\theta + F\left(l - \frac{l_1}{3} \right)\sin\theta = 0. \tag{3}$$

Înlocuind valorile lui F și l_1 după simplificări rezultă:

$$\sin\theta\,[(4\gamma_0 - 3\gamma)\,l^2\cos^2\theta - 2\gamma_0 hl\cos\theta - 2\gamma_0 h^2] = 0. \tag{4}$$

Rezolvînd ecuația (3) obținem soluțiile:

$$\sin\theta = 0 \qquad \theta = 0$$

$$\cos\theta = \frac{h(\gamma_0 \pm \sqrt{9\gamma_0^2 - 6\gamma_0\gamma})}{l(4\gamma_0 - 3\gamma)}. \tag{5}$$

Cum unghiul θ este ascuțit numai soluția:

$$\cos\theta = \frac{h(\gamma_0 + \sqrt{9\gamma_0^2 - 6\gamma_0\gamma})}{l(4\gamma_0 - 3\gamma)} \quad \text{și} \quad \gamma < \frac{4}{3}\gamma_0 \tag{6}$$

are sens. Cum $\cos\theta \leqslant 1$ se obține condiția suplimentară:

$$\gamma \leqslant \frac{4l^2 - 2lh - 2h^2}{3l^2}\gamma_0 < \frac{4}{3}\gamma_0. \tag{7}$$

Dacă condiția (7) nu este îndeplinită singura poziție de echilibru este $\theta = 0$. Dacă condiția (7) este îndeplinită, există două poziții de echilibru, cea dată de relația (6) și poziția $\theta = 0$ care însă este o poziție de echilibru nestabilă. Într-adevăr să presupunem că bara s-a îndepărtat de poziția de echilibru formînd un unghi foarte mic $\theta = \varepsilon$ cu verticala (fig. 6.21 *b*). Dacă momentul forței $\bar{G}$ față de articulația O este mai mare decît momentul forței $\bar{F}$ bara caută să revină în poziția de echilibru $\theta = 0$ deci această poziție este stabilă:

$$M_0(\bar{G}) = G\frac{l}{2}\sin\theta \approx \frac{Gl\varepsilon}{2}$$

$$M_0(\bar{F}) = F\left(l - \frac{l_1}{3} \right)\sin\theta \approx G\frac{\gamma_0}{\gamma}\left(1 - \frac{h}{l} \right)\left(\frac{2l + h}{3} \right)\varepsilon$$

iar:

$$M_0(\bar{G}) > M_0(\bar{F})$$

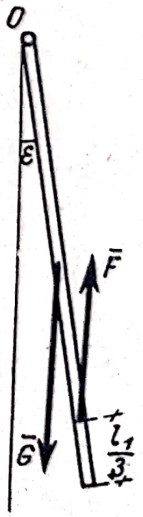


Fig. 6.21 *b*

Scanned with OKEN Scanner

implică

$$\gamma > \frac{4l^2 - 2hl - 2h^2}{3l^2}\gamma_0$$

condiție ce contrazice relația (7).

Dacă bara este grea avînd greutatea specifică γ mai mare ca $\frac{4}{3}\gamma_0$ atunci pentru orice valori ale lui h singura poziție de echilibru posibilă este cea verticală $\theta = 0$.

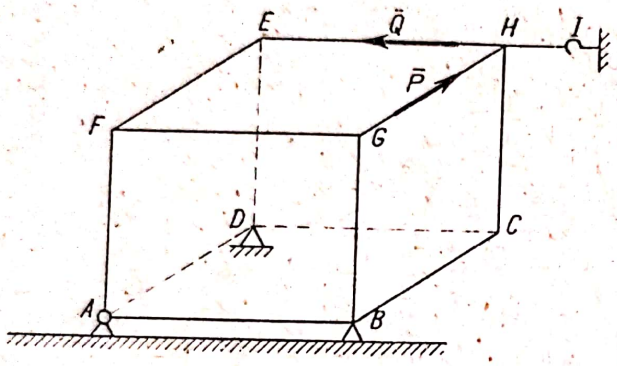


Fig. 6.22 *a*

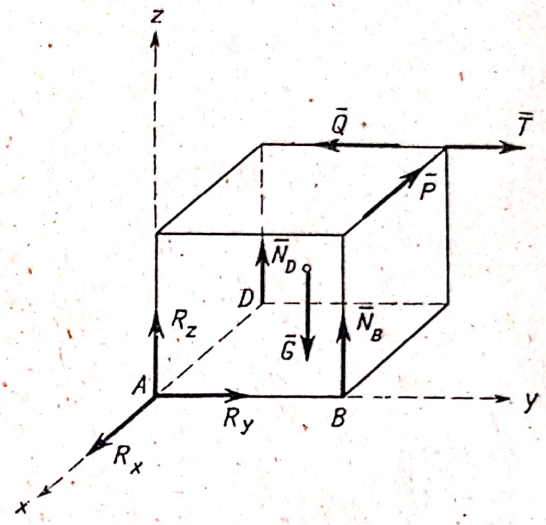


Fig. 6.22 *b*

6.22. Un cub de greutate G articulat în A, simplu rezemat în B și D ($ABCD$ în planul orizontal) și prins cu firul HI în prelungirea laturii EH este supus forțelor P și Q aplicate respectiv după GH și HE. Să se determine reacțiunile din A, B, D și tensiunea în firul HI.

Rezolvare. Izolînd cubul asupra lui acționează forțele din fig. 6.22 *b*. Ecuațiile de echilibru (6.2) sînt:

$$X = R_x - P = 0$$

$$Y = R_y + T - Q = 0$$

$$Z = R_z + N_B + N_D - G = 0$$

$$M_x = N_B \cdot a + Q \cdot a - T \cdot a - G \cdot \frac{a}{2} = 0$$

$$M_y = N_D \cdot a - G \cdot \frac{a}{2} - P \cdot a = 0$$

$$M_z = Q \cdot a + P \cdot a - T \cdot a = 0.$$

Rezolvînd sistemul rezultă:

$$R_x = P,\ R_y = -P,\ R_z = -2P,\ N_B = P + \frac{G}{2},\ N_D = P + \frac{G}{2},\ T = P + Q.$$

Scanned with OKEN Scanner

6.23. O placă de greutate P, avînd forma unui triunghi echilateral ABC cu latura a este fixată printr-o articulație A de planul xOy și se sprijină cu vîrfurile B și C pe planele perpendiculare yOz și zOx. Știind că $OA = l$ și că OA împarte unghiul xOy în două părți egale și că în poziția de echilibru cotele punctelor B și C sînt egale, să se afle reacțiunile în punctele A, B și C.

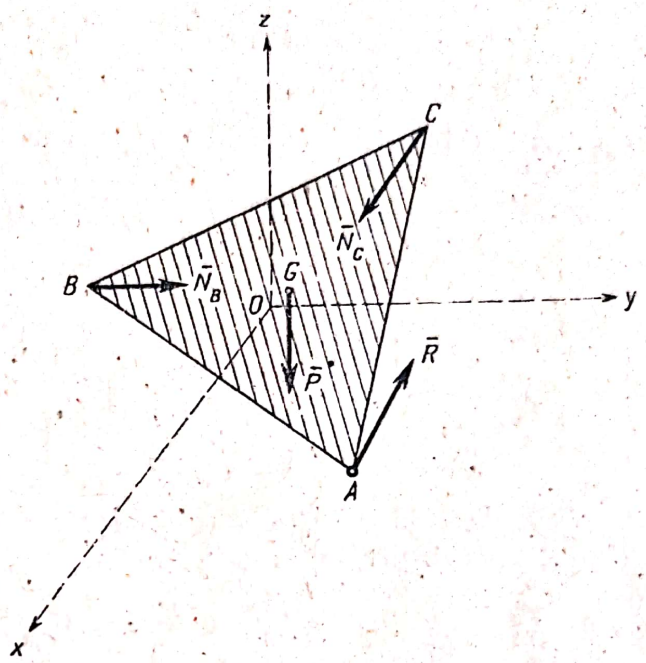


Fig. 6.23

Rezolvare. Pentru a se putea scrie condițiile de echilibru sînt necesare coordonatele punctelor A, B și C. Coordonatele acestor puncte sînt:

$A(x_1, y_1, 0)$; $B(x_2, 0, z_2)$; $C(0, y_3, z_3)$. Scriind că lungimile:

$$(x_2 - x_1)^2 + y_1^2 + z_2^2 = a^2 \quad (1)$$

$$x_1^2 + (y_1 - y_3)^2 + z_3^2 = a^2 \quad (2)$$

$$x_2^2 + y_3^2 + (z_3 - z_2)^2 = a^2 \quad (3)$$

iar pe de altă parte:

$$x_1 = y_1 = l\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

obținem 5 ecuații cu șase necunoscute, deci coordonatele punctelor plăcii se pot exprima în funcție de un parametru, placa avînd un grad de libertate.

Din condiția suplimentară:

$$z_2 = z_3 \quad (5)$$

din ecuațiile (1) ... (5) obținem:

$$x_2 = y_3 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$z_2 = z_3 = \sqrt{\frac{a^2 + 2al - 2l^2}{2}}.$$

Centrul maselor al plăcii este $G\left(\frac{\sqrt{2}}{6}(a + l), \frac{\sqrt{2}}{6}(a + l), \frac{2}{3}\sqrt{\frac{a^2 + 2al - 2l^2}{2}}\right)$.

Eliberînd placa de legături asupra ei acționează reacțiunea $\bar{R}$ din articulația A, reacțiunile normale $\bar{N}_B$, $\bar{N}_C$ și greutatea $\bar{P}$. Dispunem de șase ecuații de echilibru (6.2) pentru determinarea a cinci necunoscute scalare R_x, R_y, R_z, N_B și N_C deoarece a șasea necunoscută parametrul

ce definește poziția de echilibru a plăcii este cunoscut (poziția de echilibru fiind dată). Ecuațiile de proiecții sînt:

$$X = N_C + R_x = 0 \tag{6}$$

$$Y = N_B + R_y = 0 \tag{7}$$

$$Z = R_z - P = 0. \tag{8}$$

Ecuațiile de momente față de un sistem de axe cu originea în A sînt:

$$M_{Ax} = -N_B \sqrt{\frac{a^2 + 2al - 2l^2}{2}} + P\left[\frac{l\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}(a + l)\right] = 0 \tag{9}$$

$$M_{Ay} = N_C \sqrt{\frac{a^2 + 2al - 2l^2}{2}} - P\left[\frac{l\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}(a + l)\right] = 0 \tag{10}$$

$$M_{Az} = -N_B\left(\frac{l\sqrt{2}}{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + N_C\left(\frac{l\sqrt{2}}{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = 0. \tag{11}$$

Ecuația (11) rezultă din celelalte cinci ecuații.
Rezolvînd sistemul rezultă:

$$N_B = N_C = P\frac{2l - a}{3\sqrt{a^2 + 2al - 2l^2}}$$

$$R_x = R_y = -P\frac{2l - a}{3\sqrt{a^2 + 2al - 2l^2}} \qquad R_z = P.$$

Legătura în punctele B și C fiind unilaterală conform (6.5) $N_B > 0$, $N_C > 0$ deci:

$$l > \frac{a}{2}.$$

Pe de altă parte ca valorile lui N_B și N_C să fie reale trebuie ca $a^2 + 2al - 2l^2 > 0$ deci:

$$l < \frac{a}{2}(1 + \sqrt{3}).$$

6.24. O bară omogenă AB de lungime l și greutate P este suspendată de două fire CA și DB unde $CA = DB = CD = AB = l$. Se aplică barei un cuplu orizontal de forțe de moment $\overline{M}$. Să se determine noua poziție de echilibru a barei $A'B'$ definită prin unghiul θ de rotire al barei (v. fig. 6.24 *a*).

Rezolvare. Unghiul α sub care s-au înclinat firele se poate determina exprimînd lungimea segmentului AA'' (A'' este proiecția lui A' pe planul orizontal în care se găsea la început bara):

$$AA'' = 2\frac{l}{2}\sin\frac{\theta}{2} = l\sin\alpha$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde:

$$\alpha = \frac{\theta}{2}. \qquad (1)$$

Din ecuațiile de echilibru (6.2) cu sistemul de referință din fig. 6.24 *a*, ecuația $M_y = 0$ este identic satisfăcută, iar ecuațiile $X = 0$, $Y = 0$, $M_x = 0$ ne duc la același rezultat $T_1 = T_2$, rezultat ce poate fi ușor verificat de cititor.

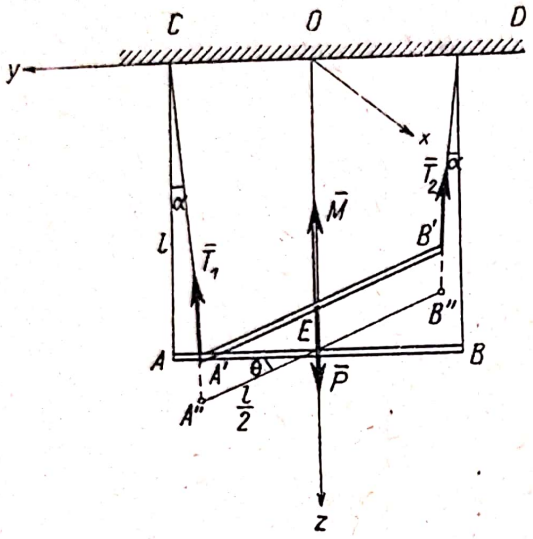


Fig. 6.24 *a*

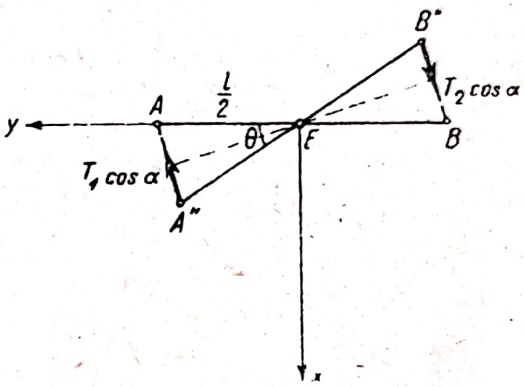


Fig. 6.24 *b*

Ne rămîn ecuațiile $Z = 0$ și $M_z = 0$ pentru determinarea tensiunilor $T_1 = T_2$ și a unghiului θ:

$$Z = P - T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \alpha = 0 \qquad (2)$$

$$M_z = -M + T_1 \sin \alpha \cdot \frac{l}{2} \cos \frac{\theta}{2} + T_2 \sin \alpha \cdot \frac{l}{2} \sin \frac{\theta}{2} = 0. \qquad (3)$$

Pentru scrierea acestei ecuații s-au proiectat forțele pe planul $AA''BB'' \perp Oz$ și s-au calculat momentele forțelor în raport cu punctul E unde axa Oz înțeapă planul (v. fig. 6.24 *b*).

Rezolvînd ecuațiile (2) și (3) și ținînd seama de (1) rezultă:

$$T_1 = T_2 = \frac{P}{2 \cos \frac{\theta}{2}}$$

unde:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{2M}{Pl}.$$

6.25. Să se determine reacțiunile încastrării din A ale grinzii de balcon AB din fig. 6.25. Greutatea proprie a grinzii este înglobată în sarcina uniform repartizată de 0,5 tf/m.

Rezolvare. Eliberînd bara de legături în A se introduc elementele mecanice corespunzătoare, o reacțiune $\bar{R}$ cu componentele R_x, R_y și un cuplu de moment M. Sarcina uniform repartizată se înlocuiește cu o forță concentrată $P_1 = pl$ aplicată în centrul C al forțelor paralele $\left(AC = \frac{l}{2}\right)$.

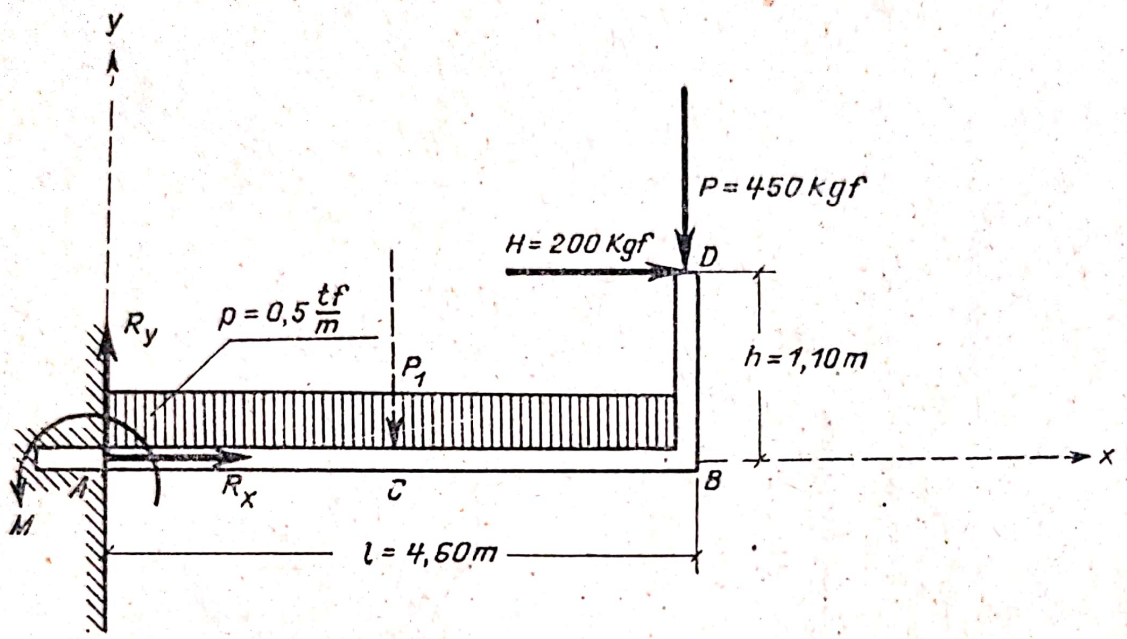


Fig. 6.25

Ecuațiile de echilibru (6.3) sînt:

$$X = R_x + H = 0$$

$$Y = R_y - pl - P = 0$$

$$M_A = M - \frac{pl^2}{2} - Pl - Hh = 0$$

de unde făcînd înlocuirile numerice rezultă:

$$R_x = -200 \text{ kgf} \qquad R_y = 2\,750 \text{ kgf} \qquad M = 7\,580 \text{ kgfm}.$$

6.26. Bara cotită $OABC$ încastrată în O este formată din barele orizontale OA și AB perpendiculare între ele și din bara verticală BC, unde $OA = AB = BC = l$. Știind că greutatea fiecărei bare este G și că asupra barei $OABC$ acționează forțele $|\bar{P}_1| = G$, $|\bar{P}_2| = G\sqrt{2}$, $|\bar{P}_3| = 2G$ ca în fig. 6.26. Să se determine reacțiunile din încastrarea O.

Rezolvare. Forțele de legătură din încastrare se reduc la o reacțiune $\bar{R}$ și la un cuplu de moment $\bar{\mathcal{M}}$. Ecuațiile de echilibru (6.2) sînt:

$$X = R_x + P_2\frac{\sqrt{2}}{2} + P_1 = 0$$

$$Y = R_y + P_3 = 0$$

$$Z = R_z + 3G + P\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

$$M_x = \mathcal{M}_x + \frac{Gl}{2} + Gl + Gl + P_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot l = 0$$

$$M_y = \mathcal{M}_y - \frac{Gl}{2} - Gl + P_1 l = 0$$

$$M_z = \mathcal{M}_z - P_2 \frac{\sqrt{2}}{2} l + P_3 l - P_1 l = 0$$

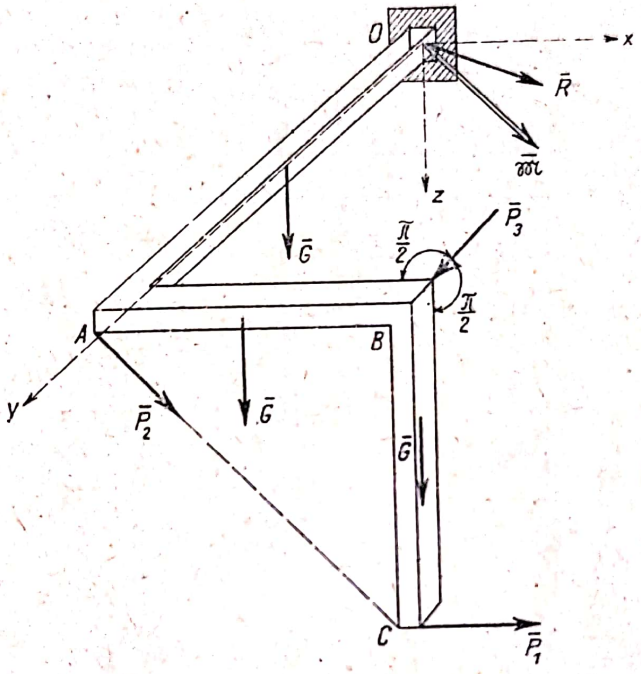


Fig. 6.26

de unde:

$$R_x = -2G \qquad R_y = -2G \qquad R_z = -4G \qquad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 2\sqrt{6}\,G$$

$$\mathcal{M}_x = -\frac{7}{2} Gl \qquad \mathcal{M}_y = \frac{1}{2} Gl \qquad \mathcal{M}_z = 0$$

$$\mathcal{M} = \sqrt{\mathcal{M}_x^2 + \mathcal{M}_y^2 + \mathcal{M}_z^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} Gl.$$

6.27. Asupra cheii fixe din fig. 6.27 *a* acționează forța $\overline{P}$ normală pe cheie și la distanța l de axul piuliței. Să se determine reacțiunea piuliței A asupra cheii considerînd că ea rămîne în repaus.

Rezolvare. Deși cheia sub acțiunea altor forțe decît forța $\overline{P}$ ar putea părăsi piulița, totuși sub acțiunea numai a forței P punctul O rămîne fix și cheia rămînînd în repaus nici rotația nu este posibilă. Prin urmare în cazul problemei date legătura dintre cheie și piuliță poate fi asimilată cu o încastrare (v. fig. 6.27 *b*).

Scanned with OKEN Scanner

Condițiile de echilibru sînt:

$$X = R_x = 0$$
$$Y = R_y - P = 0$$
$$M_0 = M - Pl = 0.$$

Prin urmare asupra cheii acționează un sistem echivalent în punctul O cu o forță $R = P$ și un cuplu $M = Pl$. Practic se constată că datorită jocului dintre cheie și piuliță vor fi două regiuni foarte mici de contact, asimilabile cu două puncte A și C unde se vor dezvolta forțe, care se pot calcula (fig. 6.27 *c*).

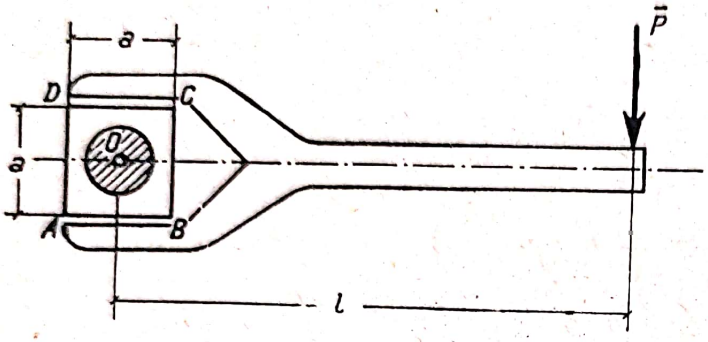


Fig. 6.27 *a*

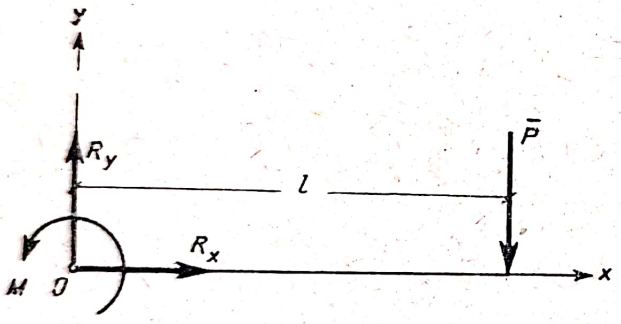


Fig. 6.27 *b*

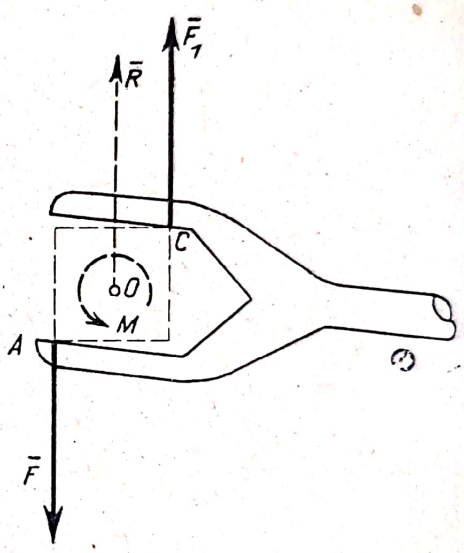


Fig. 6.27 *c*

Reducînd sistemul de forțe $\overline{F}$, $\overline{F}_1$ în O torsorul lor trebuie să fie egal cu torsorul $(\overline{R}, \overline{M})$; prin urmare:

$$F_1 - F = P$$
$$F_1 \cdot \frac{a}{2} + F \cdot \frac{a}{2} = M = Pl,$$

de unde rezultă:

$$F = \frac{l}{a} P - \frac{P}{2}; \qquad F_1 = \frac{l}{a} P + \frac{P}{2}.$$

6.28. Partea de sus a unei ferestre dreptunghiulare $ABCD$ de greutate P este deschisă și ținută într-o poziție oarecare cu un resort CE a cărei constantă elastică este $k = \frac{P}{b}$ și a cărui lungime în poziție neîntinsă este $l_0 = \frac{b}{2}$, a și b fiind laturile ferestrei.

Se cer pozițiile de echilibru ale ferestrei (unghiul α dintre planul ferestrei și cel al peretelui) și reacțiunile balamalelor A și B.

Rezolvare. Eliberîndu-se fereastra de legături, asupra ei acționează forțele efectiv aplicate, greutatea $\overline{P}$ și tensiunea $\overline{F}$ din resort și reacțiunile $\overline{R}$ și $\overline{R}'$ din lagărele A și B, care sînt normale pe axa AB: $R_z = R'_z = 0$. Ținînd seama că triunghiul BCE este isoscel (fig. 6.28) unghiul dintre $\overline{F}$ și axa Bx este $\frac{\alpha}{2}$. Ecuațiile de echilibru (6.2) sînt:

$$X = R_x + R'_x - F \cos \frac{\alpha}{2} = 0 \tag{1}$$

$$Y = R_y + R'_y + F \sin \frac{\alpha}{2} - P = 0 \tag{2}$$

$$Z = 0$$

$$M_x = P \frac{a}{2} - R'_y \cdot a = 0 \tag{3}$$

$$M_y = R'_x \cdot a = 0 \tag{4}$$

$$M_z = - P \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin \alpha + F\, b \cos \frac{\alpha}{2} = 0. \tag{5}$$

Din sistemul de ecuații se determină în primul rînd pozițiile de echilibru și după aceea pentru fiecare poziție (dacă sînt mai multe) se determină reacțiunile.

Ținînd seama că tensiunea din resort este proporțională cu lungirea resortului, rezultă:

$$F = k\,(l - l_0)$$

unde: $l = CE = 2b \sin \frac{\alpha}{2}$

iar $l_0 = \frac{b}{2}$ și $k = \frac{P}{b}$.

Rezultă:

$$F = \frac{P}{2}\left(4 \sin \frac{\alpha}{2} - 1\right) \tag{6}$$

Înlocuind (6) în (5) rezultă ecuația:

$$\left(4 \sin \frac{\alpha}{2} - 1\right) \cos \frac{\alpha}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 0$$

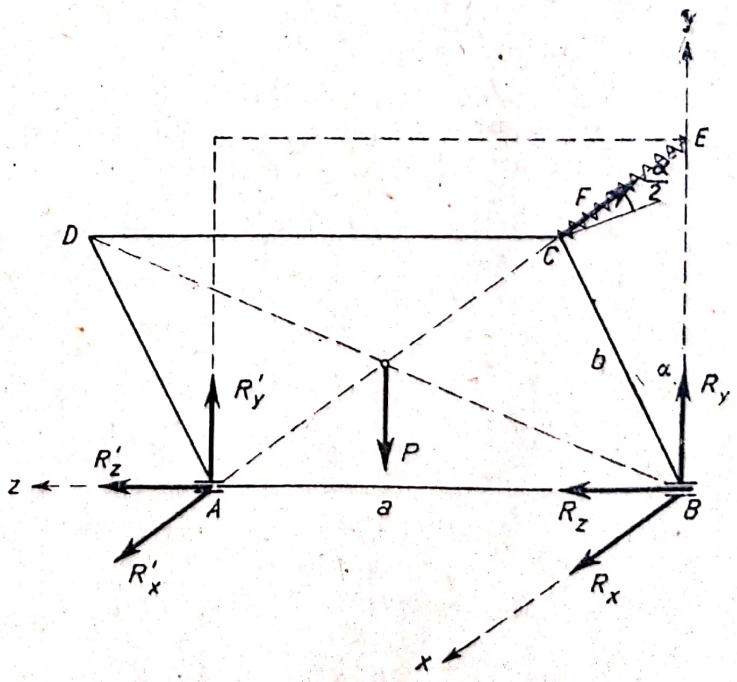


Fig. 6.28

care are soluțiile:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=0 \qquad \alpha_1=\pi$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2} \qquad \alpha_2=\frac{\pi}{3}.$$

Înlocuind aceste valori în (6) rezultă:

$$F_1=\frac{3}{2}P$$

$$F_2=\frac{1}{2}P;$$

din ecuația (4) rezultă: $R'_x=0$

din ecuația (3) rezultă: $R'_y=\frac{P}{2}$

ambele valori fiind valabile atît pentru F_1 cît și pentru F_2;

din ecuația (1): $R_x=F\cos\frac{\alpha}{2}$; $R_{1x}=0$ $R_{2x}=P\frac{\sqrt{3}}{4}$

din ecuația (2): $R_y=\frac{P}{2}-F\sin\frac{\alpha}{2}$; $R_{1y}=-P$; $R_{2y}=\frac{P}{4}$.

6.29. Prin intermediul troliului din fig. 6.29 *a* un motor M ridică o sarcină $Q=1$ tf. Se dă raza tobei de curea $R=20$ cm, raza $r=10$ cm, unghiurile $\alpha=\frac{\pi}{6}$ dintre cele două părți ale curelei cu paralele duse la O_1x_1 (O_1x_1 paralel cu Ax). Se cere să se determine reacțiunile din lagărele A și B ale troliului și tensiunile T_1 și T_2 în curea știind că $T_1=2T_2$.

Rezolvare. Reacțiunile din lagăre sînt forțe situate într-un plan normal pe axa troliului. Forțele care acționează asupra troliului sînt figurate schematic în fig. 6.29 *b*.

Ecuațiile de echilibru (6.2) sînt:

$$X=R_x+R'_x+T_1\cos\frac{\pi}{6}+T_2\cos\frac{\pi}{6}=0$$

$$Y=0$$

$$Z=R_z+R'_z-Q+T_1\sin\frac{\pi}{6}-T_2\sin\frac{\pi}{6}=0$$

$$M_x=R'_z\cdot AB-Q\cdot AC+T_1\sin\frac{\pi}{6}AO_1-T_2\sin\frac{\pi}{6}AO_1=0$$

$$M_y=Q\cdot r-T_1R+T_2R=0$$

$$M_z=-R'_x\cdot AB-T_1\cos\frac{\pi}{6}\cdot AO_1-T_2\cos\frac{\pi}{6}\cdot AO_1=0$$

Scanned with OKEN Scanner

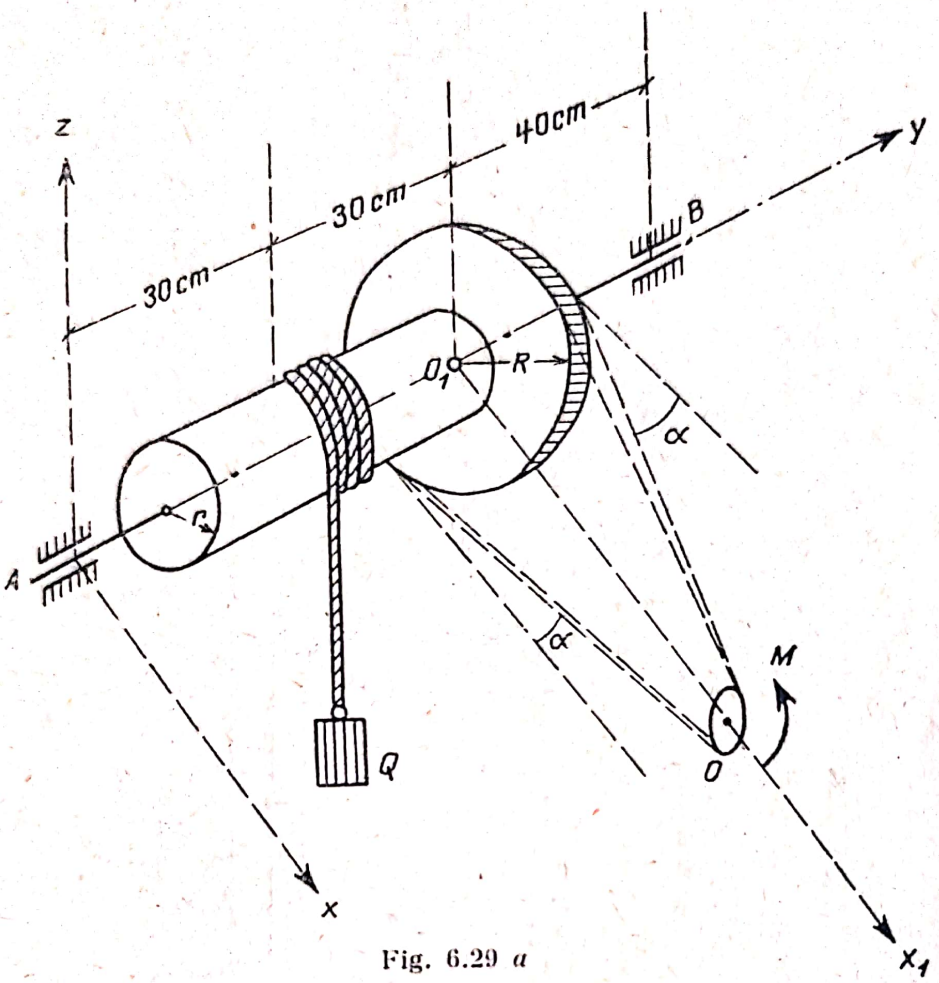


Fig. 6.29 *a*

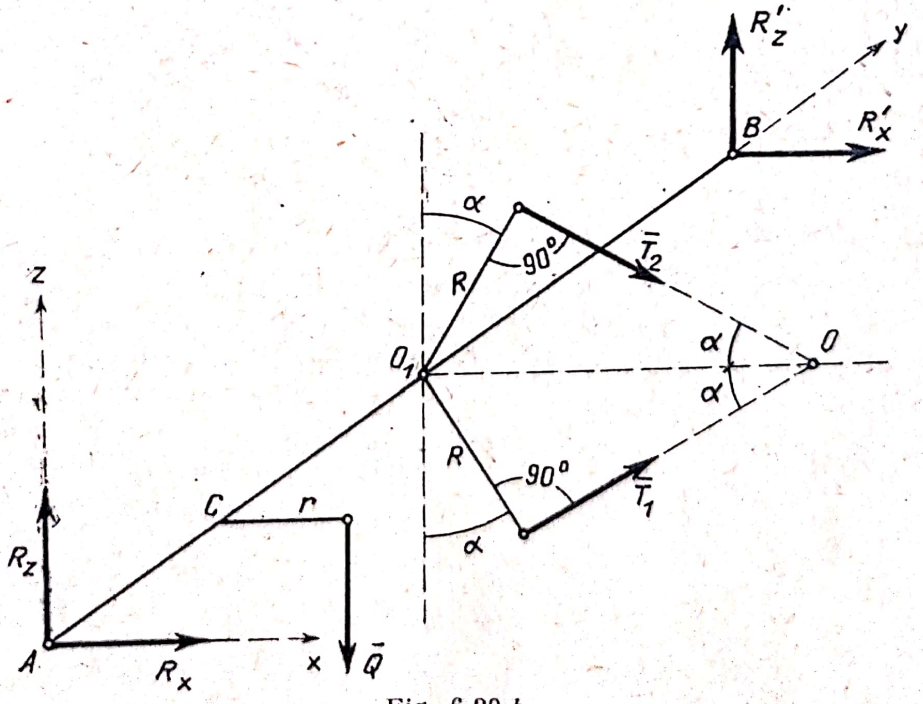


Fig. 6.29 *b*

în plus:

$$T_1 = 2\,T_2.$$

Rezolvînd sistemul cu datele numerice ale problemei rezultă:

$T_1 = 1$ tf $\quad T_2 = 0{,}5$ tf $\quad R_x \approx -0{,}52$ tf $\quad R_z = 0{,}6$ tf.

$R'_x \approx -0{,}78$ tf $\quad R'_z = 0{,}15$ tf.

6.30. Axa AB a unei macarale, a cărei greutate este $P = 1\,500$ kgf, se rotește în pivotul B și în lagărul A. De macara este atîrnată în punctul C, o greutate $Q = 800$ kgf (fig. 6.30 *a*). Să se determine reacțiunile în A și B.

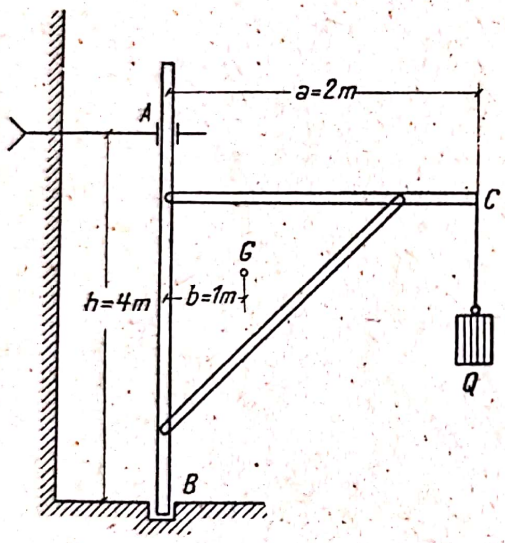


Fig. 6.30 *a*

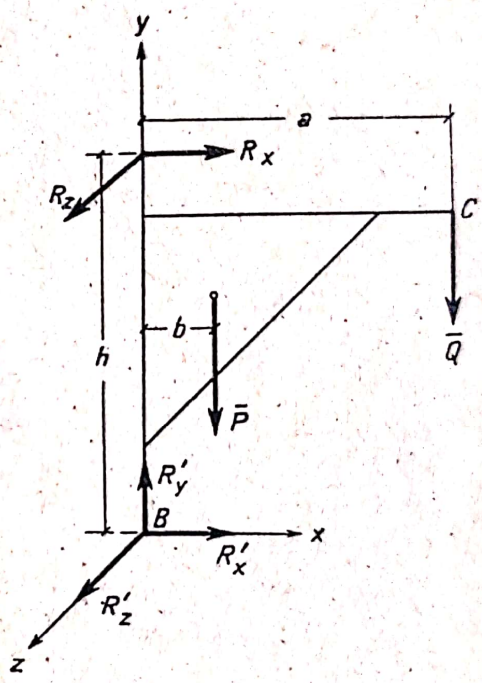


Fig. 6.30 *b*

Rezolvare. Eliberăm macaraua de legături. Asupra ei acționează forțele $\overline{P}$ și $\overline{Q}$ reacțiunea $\overline{R}$ din lagărul A normal pe bara AB, deoarece lagărul A permite deplasarea barei AB în lungul ei și reacțiunea $\overline{R'}$ din lagărul B de direcție necunoscută. Ecuațiile de echilibru (6.2) sînt:

$$X = R_x + R'_x = 0$$

$$Y = R'_y - P - Q = 0$$

$$Z = R_z + R'_z = 0$$

$$M_x = h\,R_z = 0$$

$$M_y = 0$$

$$M_z = -hR_x - Pb - Qa = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde:

$$R_x = -\frac{Pb + Qa}{h} = -775 \text{ kgf}$$

$$R_z = 0$$

$$R'_x = \frac{Pb + Qa}{h} = 775 \text{ kgf}$$

$$R'_y = P + Q = 2\,300 \text{ kgf}$$

$$R'_z = 0.$$

Cum $R_z = R'_z = 0$ reacțiunile $\overline{R}$ și $\overline{R}'$ se găsesc în planul xOy, care este planul forțelor efectiv aplicate $\overline{P}$ și $\overline{Q}$.

6.31. Poliția $ABCD$, care se poate roti în jurul axei AB, este menținută în poziție orizontală de bara ED, fixată cu ajutorul articulațiilor D și E de poliță și de peretele vertical BAE. Greutatea poliței și a sarcinii care stă pe ea P este aplicată în punctul de intersecție al diagonalelor dreptunghiului $ABCD$ (fig. 6.31 *a*). Să se determine efortul $\overline{S}$ în bara ED, și reacțiunile balamalelor K și H, știind că greutatea barei este neglijabilă.

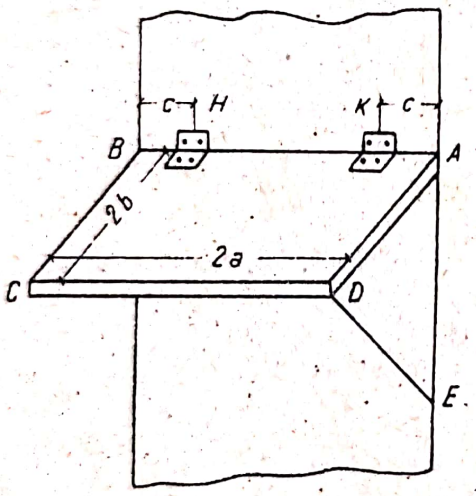


Fig. 6.31 *a*

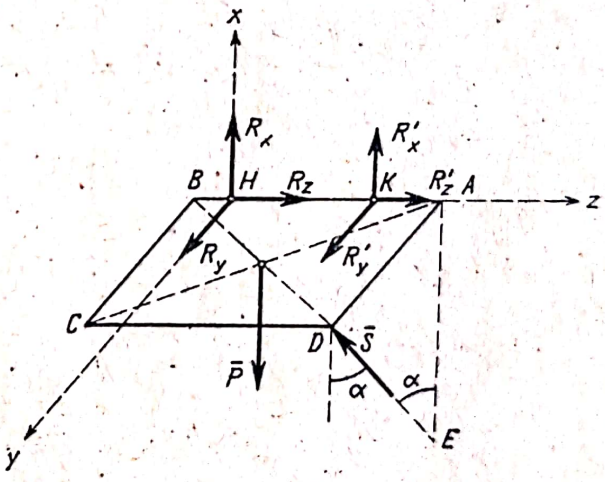


Fig. 6.31 *b*

Rezolvare. Eliberăm poliția de legături. Cum balamalele fac ca punctele H și K să fie fixe reacțiunile $\overline{R}$ și $\overline{R}'$ din aceste puncte au direcții necunoscute. Efortul $\overline{S}$ din bara ED are direcția barei (bara este articulată la ambele capete și acționată numai la capete).

Ecuațiile de echilibru (6.2) sînt:

$$X = R_x + R'_x + S\cos\alpha - P = 0$$

$$Y = R_y + R'_y + S\sin\alpha = 0$$

$$Z = R_z + R'_z = 0$$

$$M_x = -2(a - c)R'_y - (2a - c)S\sin\alpha = 0$$

$$M_y = 2(a - c)R'_x - P(a - c) + (2a - c)S\cos\alpha = 0$$

$$M_z = bP - 2bS\cos\alpha = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde:

$$S = \frac{P}{2\cos\alpha}$$

$$R_x = \frac{P(2a - c)}{4(a - c)} \qquad R_y = \frac{Pc\ \mathrm{tg}\ \alpha}{4(a - c)}$$

$$R'_x = -\frac{Pc}{4(a - c)} \qquad R'_y = -\frac{P(2a - c)\ \mathrm{tg}\ \alpha}{4(a - c)}.$$

Ecuația $R_z + R'_z = 0$ n-a fost utilizată. În general în cazul solidului cu axă fixă aceste reacțiuni sînt nedeterminate.

6.32. Să se figureze forțele de legătură și să se indice dacă problema este determinată pentru corpurile din fig. 6.32 *a*, *1* ... *6*.

Rezolvare. În fig. 6.32 *b*, *1* ... *6* sînt figurate forțele de legătură. Problema *1* este determinată deoarece dispunem de 3 ecuații pentru determinarea a trei necunoscute N_A, N_B și φ, unghiul care definește poziția de echilibru. Problemele *2* și *5* sînt de asemenea determinate avînd cîte 3 ecuații pentru același număr de necunoscute. Problema *3* este nedeterminată cu toate

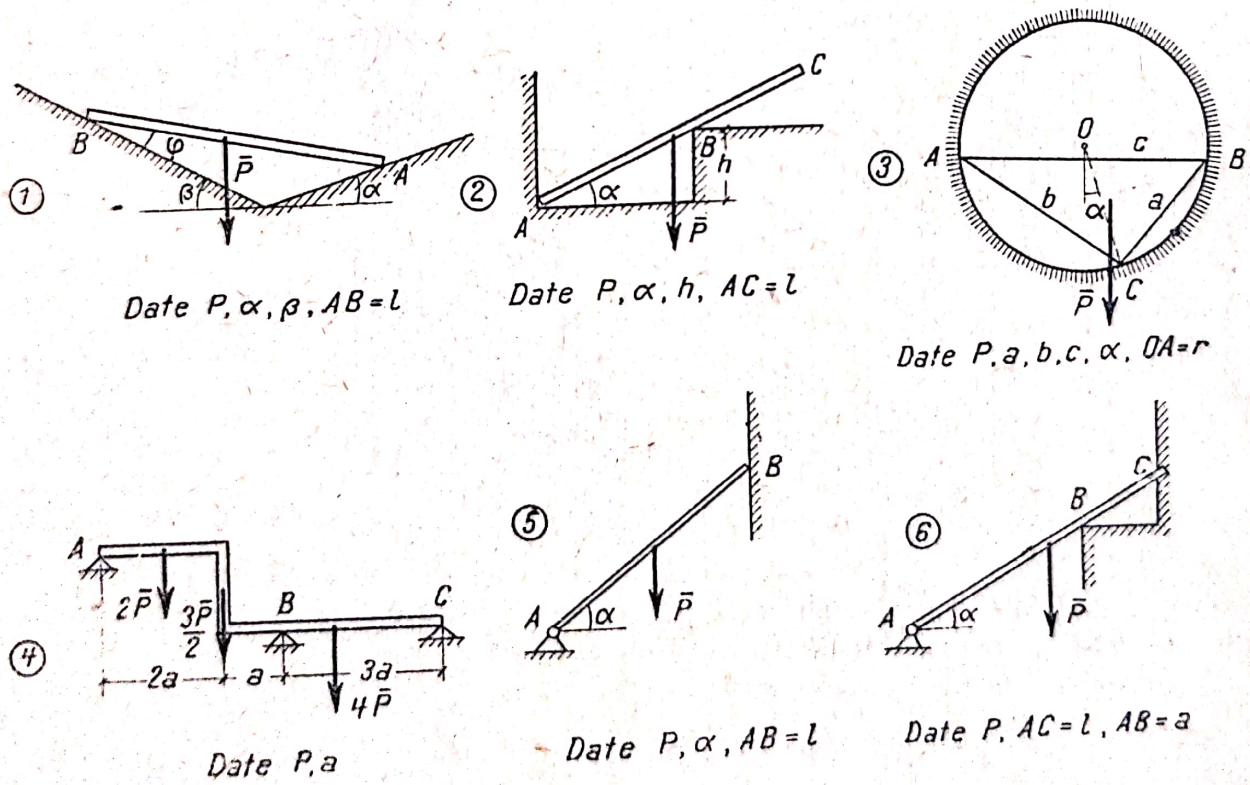


Fig. 6.32 *a*

că apar numai trei necunoscute scalare: reacțiunile N_A, N_B, N_C. Cum suporturile acestor reacțiuni sînt concurente în punctul O dispunem numai de două ecuații (ecuațiile de proiecții) pentru determinarea reacțiunilor. Problema *4* este de asemenea nedeterminată căci suporturile celor trei

Scanned with OKEN Scanner

reacțiuni N_A, N_B, N_C sînt paralele și deci nu dispunem decît de două ecuații (una de proiecții și una de momente). În sfîrșit problema *6* este și

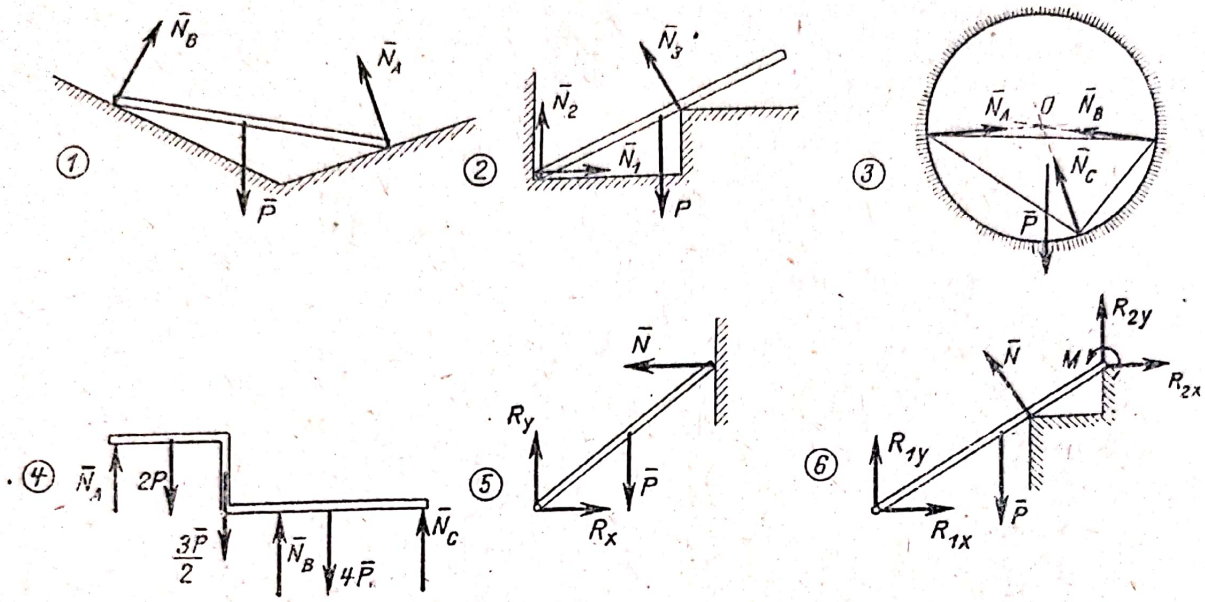


Fig. 6.32 *b*

ea nedeterminată, deoarece avem 3 ecuații pentru determinarea a 6 necunoscute scalare R_{1x}, R_{1y} (articulația 1), N (reazemul simplu B), R_{2x}, R_{2y}, M (încastrarea C).

C. PROBLEME NEREZOLVATE

6.33. Două bare omogene AB și BC, $\left[AB = \frac{1}{2}\, BC = l\right]$ sînt unite solidar între ele, formînd un unghi $\varphi = 60°$. Sistemul obținut este suspendat de un fir la extremitatea A. Să se determine unghiul α dintre bara CB și orizontală în poziția de echilibru.

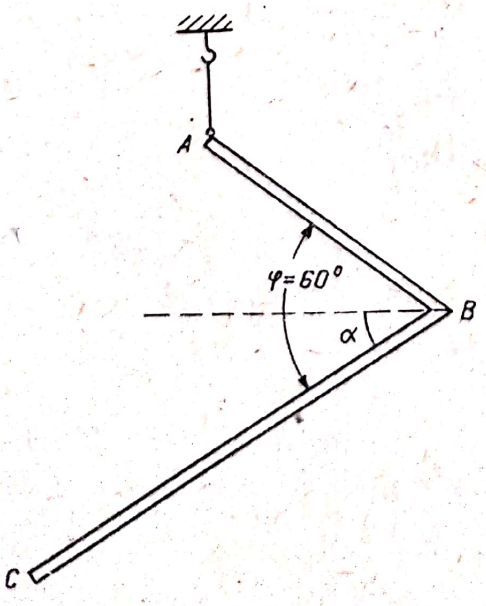


Fig. 6.33

Răspuns. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4 - 5\cos\varphi}{5\sin\varphi} = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

6.34. Să se rezolve problemele 6.32 cazurile *1*, *2* și *5*.

Răspuns.

1) $N_A = \dfrac{P\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $N_B = \dfrac{P\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)} - \operatorname{ctg}\beta$$

2) $N_1 = \dfrac{Pl\sin^2\alpha\cos\alpha}{2h}$, $N_2 = \dfrac{P(2h - l\sin\alpha\cos^2\alpha)}{2h}$,

$$N_3 = \frac{Pl\sin 2\alpha}{4h}$$

5) $R_x = \dfrac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha$, $R_y = P$, $N = \dfrac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha$

6.35. O grindă omogenă de greutate P și lungime l se reazemă cu un capăt pe o podea netedă iar în punctul intermediar B se reazemă pe o coloană de înălțime h. Grinda formează cu verticala un unghi α. În poziția aceasta este susținută datorită firului AC. Neglijînd frecarea, să se determine tensiunea T a firului și reacțiunile N_B și N_C.

Răspuns.

$$T = \frac{Pl \sin\alpha \cos^2\alpha}{2h} \qquad N_B = \frac{Pl \sin 2\alpha}{4h} \qquad N_C = P\left(1 - \frac{l \sin^2\alpha \cos\alpha}{2h}\right).$$

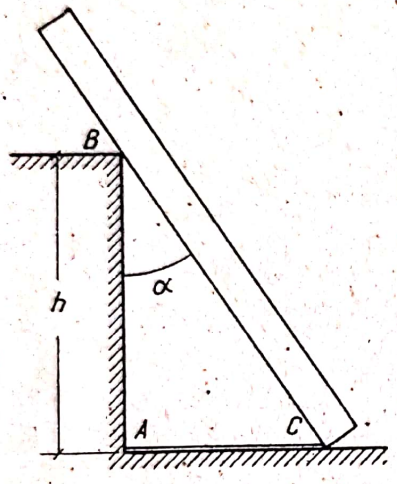


Fig. 6.35

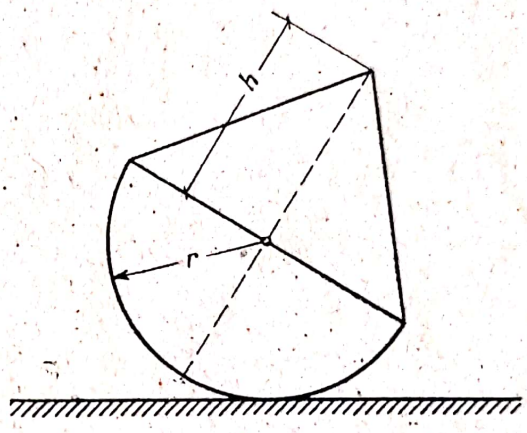


Fig. 6.36

6.36. Care trebuie să fie înălțimea unui con lipit de o jumătate de sferă pentru ca echilibrul să fie indiferent. Conul și sfera sînt omogene și construite din același material.

Răspuns. $h = r\sqrt{3}$ (v. problema 5.17).

6.37. Să se determine reacțiunile încastrării A pentru grinda AB din fig. 6.37. Grinda este încărcată cu două sarcini concentrate verticale aplicate în punctele C și D, o sarcină concentrată orizontală aplicată în B, un cuplu de momente $C = 10{,}8$ tfm, acționînd în B și o sarcină distribuită triunghiular. Greutatea proprie a grinzii se neglijează.

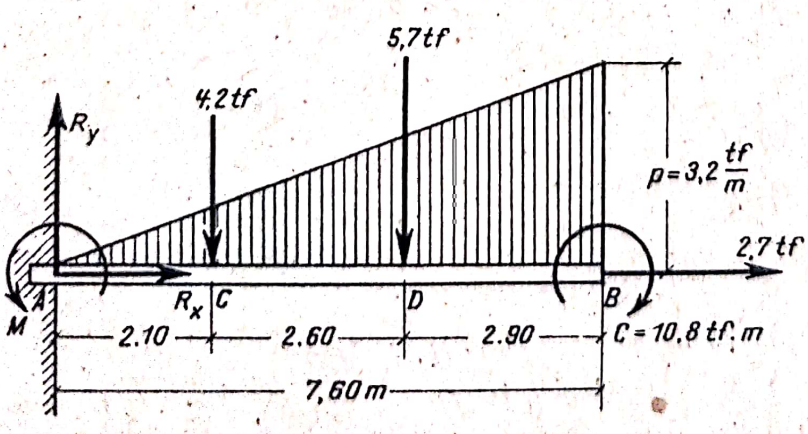


Fig. 6.37

Răspuns.

$R_x = -2{,}7$ tf,

$R_y = 22{,}06$ tf,

$M = 108{,}021$ tfm.

6.38. Trei arcuri elicoidale AA_1, BB_1 și CC_1 în poziție de repaus au capetele A, B, C pe aceeași orizontală. Aceste capete se leagă cu o bară ori-

zontală ABC de greutate neglijabilă. În punctul B se aplică o forță de 350 kgf și se constată că în noua poziție de echilibru bara rămîne tot orizontală.

Să se determine forțele din cele trei arcuri și distanțele AB și BC știind că $AC = 2{,}25$ m și că sub acțiunea unei forțe de 400 kgf arcurile se întind: AA_1 cu 1,6 cm, BB_1 cu 0,8 cm, CC_1 cu 2 cm (deformațiile lor sînt proporționale cu forțele aplicate).

Răspuns. $AB = 1$ m, $BC = 1{,}25$ m, $F_A = 92{,}1$ kgf, $F_B = 184{,}2$ kgf, $F_C = 73{,}7$ kgf. Grinda coboară cu $\Delta l = 0{,}368$ cm.

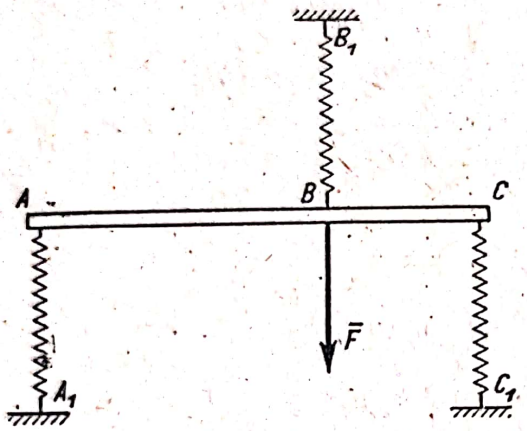


Fig. 6,38

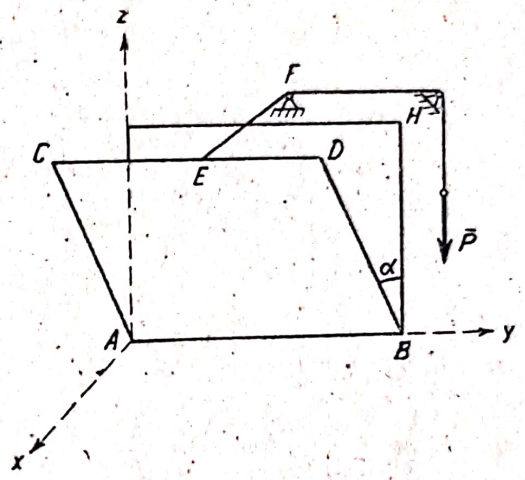


Fig. 6.39

6.39. Partea de sus a unei ferestre $ABCD$ de greutate Q, este deschisă sub un unghi α. Se dă $BD = BH$; $CE = ED$; firul EF este paralel cu dreapta DH. Să se determine efortul P necesar pentru menținerea ferestrei în repaus, și reacțiunile balamalelor A și B.

Răspuns. $P = Q \sin \frac{\alpha}{2}$ $R_{Ax} = R_{Bx} = \frac{Q}{4} \sin \alpha$ $R_{Az} = R_{Bz} = \frac{Q \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2}$

CAPITOLUL VII

ECHILIBRUL CU FRECARE

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Cînd două corpuri se reazemă reducînd forțele de legătură în punctul teoretic de contact A, obținem o forță rezultantă $\overline{R}$, care se poate descompune într-o componentă $\overline{N}$ avînd direcția normalei comune și una situată în planul tangent: forța de frecare $\overline{T}$ și un moment rezultant $\overline{M}$ care se poate descompune într-o componentă normală $\overline{M}_p$ momentul de pivotare și una situată în planul tangent $\overline{M}_r$ momentul de rostogolire. Forța de frecare se opune tendinței de alunecare a celor două corpuri; pentru ca să nu apară lunecarea trebuie ca:

$$T \leqslant fN \qquad (7.1)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde f este coeficientul de frecare la lunecare, iar T și N modulele forțelor $\overline{T}$ și $\overline{N}$. Cum:

$$f = \operatorname{tg} \varphi \tag{7.2}$$

unde φ este unghiul de frecare, geometric relația (7.1) se poate pune sub forma:

$$\alpha \leqslant \varphi \tag{7.3}$$

unde α este unghiul dintre $\overline{R}$ și normala comună la suprafața de contact (fig. 7. *a*).

În cazul unui solid supus la forțe situate în același plan și rezemat în două puncte P_1 și P_2 (fig. 7. *b*), din (7.3) reiese că suportul rezultantei $\overline{F}$ a forțelor efectiv aplicate solidului intersectează patrulaterul frecărilor

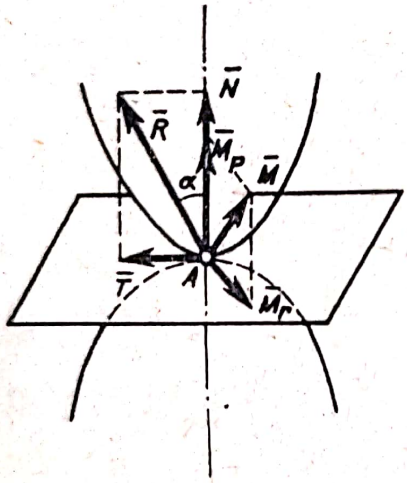


Fig. 7. *a*

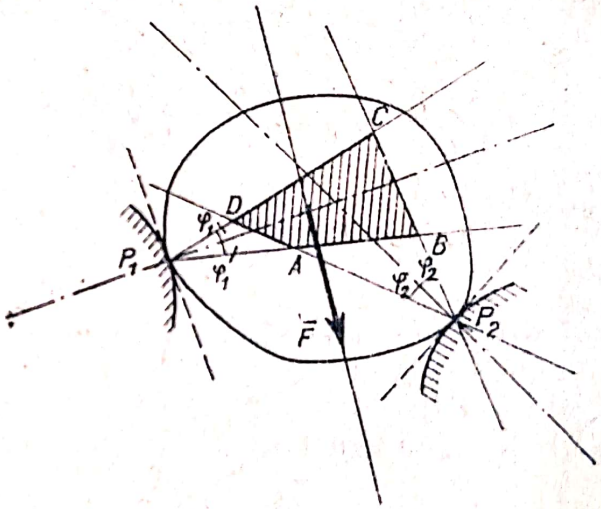


Fig. 7. *b*

ABCD. Patrulaterul frecărilor este intersecția (partea comună) a triunghiurilor de frecare P_1BC și P_2DC corespunzătoare punctelor P_1 și P_2, unghiurile dintre laturile triunghiurilor de frecare și normalele la curba de contact în punctele de rezemare fiind unghiurile de frecare φ_1 respectiv φ_2.

Momentul de frecare de rostogolire $\overline{M}_r$ se opune tendinței de rostogolire a corpului. În cazul unui disc plan supus la forțe în planul său (fig. 7. *c*), vectorul $\overline{M}_r$ este normal pe plan și ca să nu apară rostogolirea trebuie ca:

$$M_r \leqslant s\,N \tag{7.4}$$

unde s coeficientul de frecare de rostogolire are dimensiunea unei lungimi. În cazul cînd apare rostogolirea pură, fără lunecare vom avea:

$$M_r = s\,N \qquad \text{și} \qquad T \leqslant fN. \tag{7.5}$$

Momentul de frecare de pivotare $\overline{M_p}$ se opune tendinței de rotire a corpului în jurul normalei la suprafața de contact. În cazul unui arbore avînd

secțiunea transversală o coroană circulară de raze R și r (fig. 7. *d*) presupunînd că presiunea pe suprafața de sprijin normală pe axa arborelui este uniformă, pentru echilibru trebuie ca:

$$M_p \leqslant \frac{2}{3} f N \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \qquad (7.6)$$

unde f este coeficientul de frecare iar N modulul reacțiunii normale. Dacă secțiunea transversală este circulară, $r = 0$, din (7.6) rezultă:

$$M_p \leqslant \frac{2}{3} f N R. \qquad (7.7)$$

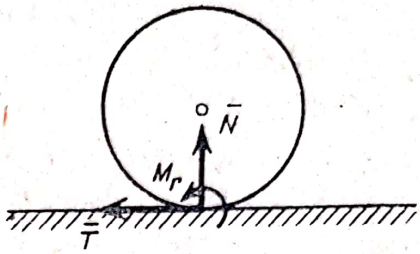


Fig. 7. *c*

În cazul legăturilor unilaterale pentru ca corpul să nu părăsească legătura trebuie ca:

$$N > 0 \qquad (7.8)$$

N fiind scalarul reacțiunii orientate în sensul în care corpul poate părăsi legătura.

Frecarea în articulații sau lagăre se manifestă ca un cuplu care se opune tendinței de rotație și al cărui moment $\overline{M}_f$ verifică în cazul echilibrului condiția:

$$M_f \leqslant \mu r R \qquad (7.9)$$

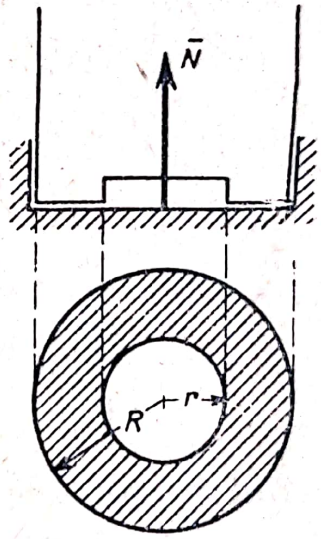


Fig. 7. *d*

unde μ este un coeficient care se determină experimental,

r — raza fusului articulației (lagărului) și

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad (7.10)$$

este modulul reacțiunii din articulație (lagăr).

În rezolvarea problemelor de echilibru cu frecare introducem toate forțele, inclusiv forțele de legătură, punem condițiile de frecare (7.1), (7.4), (7.6) sau (7.9) precum și condițiile ca sistemul de forțe să se echilibreze adică rezultanta și momentul rezultant al tuturor forțelor să fie nule:

$$\overline{R} = 0 \quad \text{și} \quad \overline{M}_0 = 0 \qquad (7.11)$$

Condițiile de frecare (7.1), (7.4), (7.6), (7.7) și (7.9) se pot folosi și la determinarea pozițiilor de echilibru limită cînd în locul inegalităților vom folosi egalitățile corespunzătoare:

$$T = fN \qquad (7.1')$$

$$M_r = sN. \qquad (7.4')$$

.....

Scanned with OKEN Scanner

7.1. O bară omogenă AB, de greutate P, este așezată între două reazeme fixe D și C. Coeficientul de frecare între bară și reazeme este f. Care va fi lungimea l a barei pentru a fi în echilibru, cînd unghiul dintre bară și orizontală este egal cu α; se dă $DC = a$, $BC = b$ iar grosimea barei poate fi neglijată.

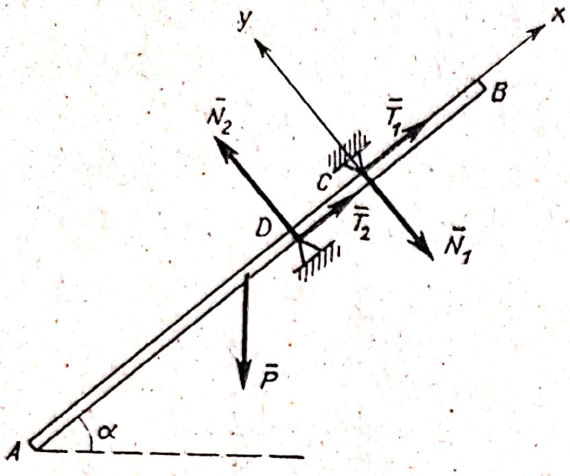


Fig. 7.1 *a*

Rezolvare. Izolînd bara, asupra ei acționează greutatea $\bar{P}$, reacțiunile normale $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$ și forțele de frecare $\bar{T}_1$ și $\bar{T}_2$ care se opun lunecării barei în jos (fig. 7.1 *a*). Dispunem de cinci relații, trei ecuații de echilibru (7.11) și două inecuații (7.1) pentru determinarea a cinci necunoscute N_1, N_2, T_1, T_2 și α. Ecuațiile de echilibru (7.11) sînt:

$$X = T_1 + T_2 - P \sin \alpha = 0 \tag{1}$$

$$Y = -N_1 + N_2 - P \cos \alpha = 0 \tag{2}$$

$$M_C = -N_2 a + P \left(\frac{l}{2} - b\right) \cos \alpha = 0. \tag{3}$$

Ca să nu apară lunecarea conform (7.1) trebuie ca:

$$T_1 \leqslant f N_1 \tag{4}$$

$$T_2 \leqslant f N_2. \tag{5}$$

Rezolvînd ecuațiile (1)—(3) avem:

$$N_1 = \frac{P \cos \alpha \left(\frac{l}{2} - a - b\right)}{a}, \quad N_2 = \frac{P \cos \alpha \left(\frac{l}{2} - b\right)}{a}, \quad T_1 + T_2 = P \sin \alpha$$

iar din (4) și (5) rezultă:

$$T_1 + T_2 \leqslant f (N_1 + N_2)$$

adică:

$$P \sin \alpha \leqslant \frac{f P \cos \alpha (l - a - 2b)}{a}$$

de unde rezultă condiția ca bara să nu lunece:

$$l \geqslant a + 2b + \frac{a}{f} \operatorname{tg} \alpha \tag{6}$$

Într-o poziție oarecare de echilibru presupunînd lungimea $2l$ a barei cunoscută, nu putem determina complet reacțiunile. În poziția de echilibru limită însă reacțiunile sînt complet determinate $T_1 = fN_1$ iar $T_2 = fN_2$.

Scanned with OKEN Scanner

Legăturile fiind unilaterale, conform (7.8) $N_1 > 0$ și $N_2 > 0$ deci

$$l > 2\,(a + b) \tag{7}$$

$$l > 2b. \tag{8}$$

Cum (7) implică (8), pentru echilibru trebuie îndeplinite condițiile (6) și (7). Comparînd inegalitățile (6) și (7) reiese că pentru $f \leqslant \operatorname{tg}\alpha$, $a + 2b + \frac{a \operatorname{tg}\alpha}{f} > 2\,(a + b)$ deci pentru echilibru trebuie să fie îndeplinită condiția (6) adică nu trebuie să apară lunecarea [condiția (7) fiind în orice caz îndeplinită]; iar pentru $f \geqslant \operatorname{tg}\alpha$ trebuie să fie îndeplinită condiția (7) adică nu trebuie să apară desprinderea [condiția (6) fiind în orice caz îndeplinită].

Problema admite și o soluție grafică. Construim triunghiurile de frecare Δ_1 și Δ_2 corespunzătoare punctelor D și C (fig. 7.1 *b*). Suportul forței efectiv aplicate $\bar{P}$ trebuie să treacă prin domeniul hașurat din fig. 7.1 *b* partea comună a lui Δ_1 și Δ_2. În poziția de echilibru limită suportul lui P trece prin punctul F. $FG = \frac{a}{2} \operatorname{ctg}\varphi$, fiind înălțimea triunghiului DCF avem:

$$\frac{l}{2} = b + \frac{a}{2} + EG$$

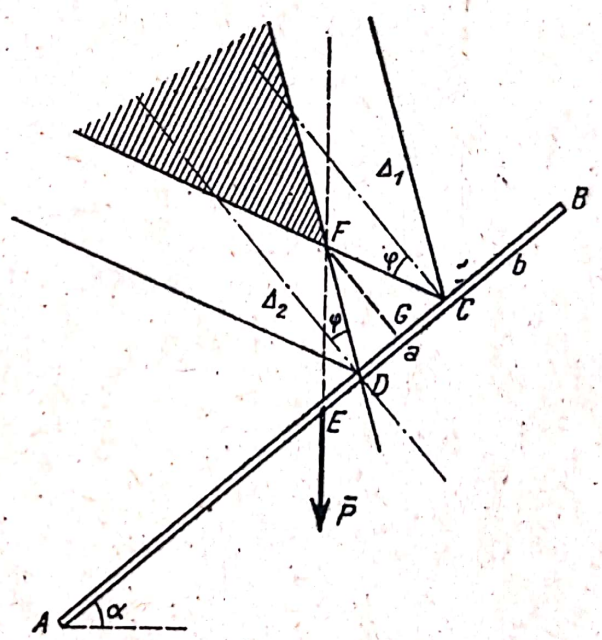


Fig. 7.1 *b*

unde:

$$EG = FG \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2} \operatorname{ctg}\varphi \operatorname{tg}\alpha$$

și cum $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{f}$:

$$l = 2b + a + \frac{a \operatorname{tg}\alpha}{f}.$$

Pentru o poziție de echilibru oarecare:

$$l \geqslant 2b + a + a \frac{\operatorname{tg}\alpha}{f}. \tag{6}$$

7.2. O bară omogenă de lungime $2l$ și greutate P reazemă pe un plan orizontal aspru în punctul A, unghiul de frecare fiind φ_1 și pe muchia unui zid în punctul B, unghiul de frecare fiind φ_2. Cunoscînd înălțimea zidului $CB = h$ să se studieze echilibrul barei. Cazuri particulare $\varphi_1 = \varphi_2$ și $\varphi_1 = 0$

Rezolvare. Ecuațiile de echilibru (7.11) sînt:

$$X = -T_1 - T_2 \cos\alpha + N_2 \sin\alpha = 0 \tag{1}$$

$$Y = N_1 + N_2 \cos\alpha + T_2 \sin\alpha - P = 0 \tag{2}$$

$$M_A = Pl \cos\alpha - N_2 \frac{h}{\sin\alpha} = 0. \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ca bara să lunece și să nu se desprindă de pe reazemul A, din (7.1) și (7.8) rezultă:

$$0 \leqslant T_1 \leqslant N_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \tag{4}$$

$$T_2 \leqslant N_2 \operatorname{tg} \varphi_2. \tag{5}$$

Rezolvînd ecuațiile (1)...(3) putem exprima cele cinci necunoscute ale problemei N_1, T_1, N_2, T_2, α în funcție de două dintre ele, de exemplu N_1 și α. Obținem astfel:

$$N_2 = \frac{Pl \cos \alpha \sin \alpha}{h}; \qquad T_1 = \frac{Pl \cos \alpha}{h} + (N_1 - P) \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$T_2 = \frac{P - N_1}{\sin \alpha} - \frac{Pl \cos^2 \alpha}{h}.$$

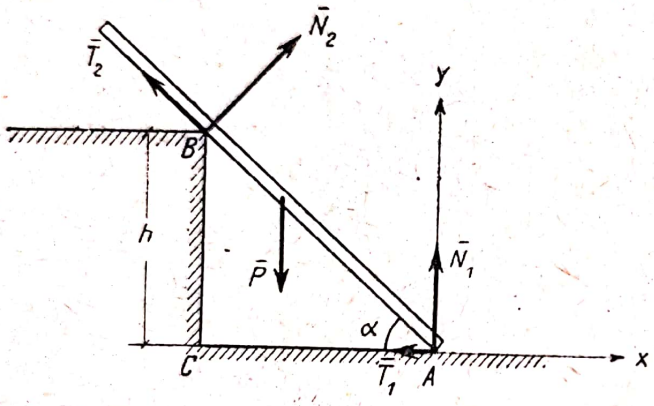


Fig. 7.2

Înlocuind în inegalitățile (4) și (5) după un șir de calcule elementare obținem:

$$P\left(1 - \frac{l \sin \alpha}{h}\right) \leqslant N_1 \tag{6}$$

$$N_1 \leqslant \frac{P\left(1 - \frac{l \sin \alpha}{h}\right)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi_1} \tag{7}$$

dacă $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2} - \varphi_1$

$$P - \frac{Pl}{h} \sin \alpha \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi_2) \leqslant N_1. \tag{8}$$

Din inegalitățile (6) și (7) rezultă:

$$\sin \alpha \leqslant \frac{h}{l} \tag{9}$$

adică centrul de greutate al barei trebuie să se găsească în dreapta punctului B, iar din (7) și (8) rezultă:

$$\frac{h}{l} \sin^2 \alpha \cos \alpha (1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2) [1 + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} (\varphi_1 - \varphi_2)] - \operatorname{tg} \varphi_1 \leqslant 0 \tag{10}$$

inecuație cu ajutorul căreia se determină pozițiile de echilibru ale barei (unghiul α). Reacțiunile se pot determina numai în poziția de echilibru limită cînd dispunem de cinci ecuații pentru determinarea celor cinci necunoscute.

În cazul $\varphi_1 = \varphi_2$ inecuația (10) se simplifică, ea devine:

$$\frac{h}{l} \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1) - \operatorname{tg} \varphi_1 \leqslant 0, \tag{11}$$

care se poate rezolva în raport cu $\cos \alpha$.

Pentru $\varphi_1 = 0$ (10) devine:

$$\frac{h}{l} \sin^2 \alpha \cos \alpha (1 - \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \varphi_2) \leqslant 0$$

deci în acest caz condiția de echilibru este:

$$\alpha \leqslant \varphi_2 \tag{12}$$

rezultat ce se poate obține direct din condiția ca unghiul dintre reacțiunea din B și normala la suprafața de contact să fie mai mic ca unghiul de frecare φ_2.

7.3. O bară omogenă de lungime $2l$ și greutate P se sprijină pe un plan orizontal și pe un cilindru de rază r. Coeficientul de frecare al barei cu cilindrul și cu planul este f. Pentru ce valori ale unghiului α de înclinare al barei este posibil echilibrul?

Rezolvare. Ecuațiile de echilibru (7.11) sînt:

$$X = -T_1 - T_2 \cos\alpha + N_2 \sin\alpha = 0 \quad (1)$$

$$Y = -P + N_1 + N_2 \cos\alpha + T_2 \sin\alpha = 0 \quad (2)$$

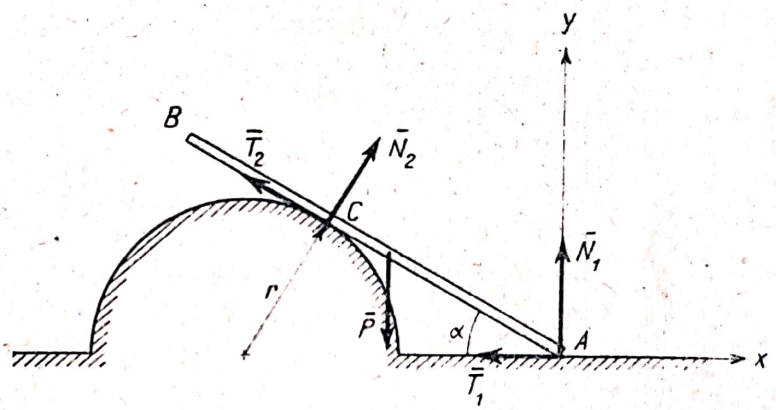


Fig. 7.3

$$M_A = Pl \cos\alpha - N_2 r \operatorname{ctg} \alpha = 0. \tag{3}$$

Ca bara să nu lunece și ca să nu se desprindă de pe reazemul A conform (7.1) și (7.8) trebuie ca:

$$0 \leqslant T_1 \leqslant f N_1 \tag{4}$$

$$T_2 \leqslant f N_2. \tag{5}$$

Rezolvînd ecuațiile (1) ... (3) în raport cu T_1, N_2 și T_2 obținem:

$$N_2 = \frac{Pl \sin\alpha}{r} \qquad T_1 = \frac{Pl}{r} + (N_1 - P) \operatorname{ctg} \alpha \qquad T_2 = \frac{P - N_1}{\sin\alpha} - \frac{Pl \cos\alpha}{r}$$

și înlocuind în (4) și (5) obținem inegalitățile:

$$P\left(1 - \frac{l \operatorname{tg}\alpha}{r}\right) \leqslant N_1 \tag{6}$$

$$N_1 \leqslant \frac{P(r \operatorname{ctg}\alpha - l)}{r(\operatorname{ctg}\alpha - f)} \text{ dacă } \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} - \varphi \text{ unde } \operatorname{tg}\varphi = f \tag{7}$$

$$P \frac{r - l \sin\alpha \cos\alpha - fl \sin^2\alpha}{r} \leqslant N_1. \tag{8}$$

Din (6) și (7) obținem condiția ca bara să nu se desprindă de pe reazemul A și anume:

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant \frac{r}{l} \tag{9}$$

iar din (7) și (8) condiția ca să nu apară lunecarea:

$$\sin\alpha \leqslant \sqrt{\frac{rf}{l(1+f^2)}}$$

sau:

$$\sin\alpha \leqslant \sqrt{\frac{r\sin 2\varphi}{2l}}. \tag{10}$$

Rezultatele obținute sînt valabile pentru $\operatorname{tg}\alpha \geqslant \frac{r}{2l}$ căci în caz contrar bara se sprijină cu capătul B pe cilindru și condițiile problemei sînt modificate.

7.4. O scară AB de lungime $2l$ și greutate P se sprijină cu extremitățile ei pe un perete vertical și pe o podea orizontală, unghiurile de frecare fiind φ_1 și φ_2. Știind că centrul de greutate al scării se află în mijlocul ei să se determine pentru ce valori ale unghiului α de înclinare al scării este posibil echilibrul.

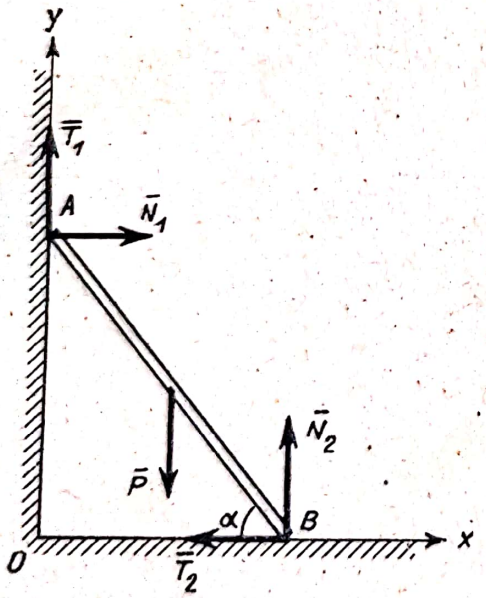


Fig. 7.4 *a*

Rezolvare. În poziția limită de echilibru α va avea valoarea minimă α'. Ecuațiile de echilibru (7.11) sînt:

$$X = N_1 - T_2 = 0 \tag{1}$$

$$Y = N_2 + T_1 - P = 0 \tag{2}$$

$$M_0 = -2N_1 l\sin\alpha' + 2N_2 l\cos\alpha' - Pl\cos\alpha' = 0. \tag{3}$$

Cum lunecarea apare simultan în punctele A și B condițiile de frecare (7.1') sînt:

$$T_1 = N_1\operatorname{tg}\varphi_1 \tag{4}$$

$$T_2 = N_2\operatorname{tg}\varphi_2. \tag{5}$$

Rezolvînd ecuațiile (1), (2), (4) și (5) în raport cu forțele necunoscute obținem:

$$N_1 = \frac{P\operatorname{tg}\varphi_2}{1+\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2} \qquad N_2 = \frac{P}{1+\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2}$$

și înlocuind în ecuația (3) rezultă:

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{1-\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2}{2\operatorname{tg}\varphi_2} \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

deci echilibrul este posibil pentru:

$$\alpha \geqslant \text{arc tg}\frac{1 - \text{tg}\,\varphi_1\,\text{tg}\,\varphi_2}{2\,\text{tg}\,\varphi_2}. \qquad (7)$$

Dacă $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ echilibrul este posibil pentru:

$$\alpha \geqslant \text{arc tg}\frac{1 - \text{tg}^2\varphi}{2\,\text{tg}\varphi} = \frac{\pi}{2} - 2\varphi.$$

Se poate da și o soluție grafică. În fig. 7.4 *b* este construit patrulaterul frecărilor *CDEF* în poziția limită de echilibru. În această poziție suportul forței efectiv aplicate *P* trece prin punctul *D*.

Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiurile *ABD* și *AGD* obținem:

$$\frac{AD}{\cos(\alpha' + \varphi_2)} = \frac{2l}{\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \text{ și}$$

$$\frac{AD}{\cos\alpha'} = \frac{l}{\cos\varphi_1}$$

deci:

$$\frac{AD}{l} = \frac{2\cos(\alpha' + \varphi_2)}{\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{\cos\alpha'}{\cos\varphi_1}$$

sau:

$$\cos\alpha'\,(\cos\varphi_1\,\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\,\sin\varphi_2) = 2\cos\alpha'\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - 2\sin\alpha'\cos\varphi_1\sin\varphi_2.$$

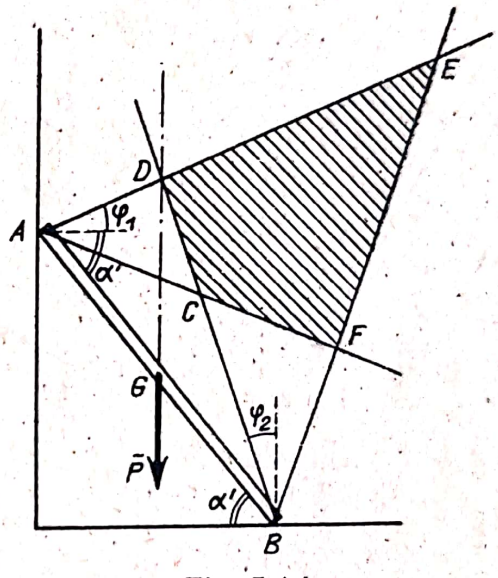


Fig. 7.4 *b*

Rezolvînd această ecuație obținem relația (6):

$$\text{tg}\,\alpha' = \frac{\cos\varphi_1\,\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\,\sin\varphi_2}{2\,\cos\varphi_1\,\sin\varphi_2} = \frac{1 - \text{tg}\,\varphi_1\,\text{tg}\,\varphi_2}{2\,\text{tg}\,\varphi_2}. \qquad (6)$$

7.5. O bară omogenă *AB* de greutate *P* se sprijină pe două plane perpendiculare între ele, unul dintre plane fiind înclinat sub unghiul α față de orizont. Cunoscînd unghiul de frecare φ al barei cu planele, să se determine pozițiile de echilibru ale barei.

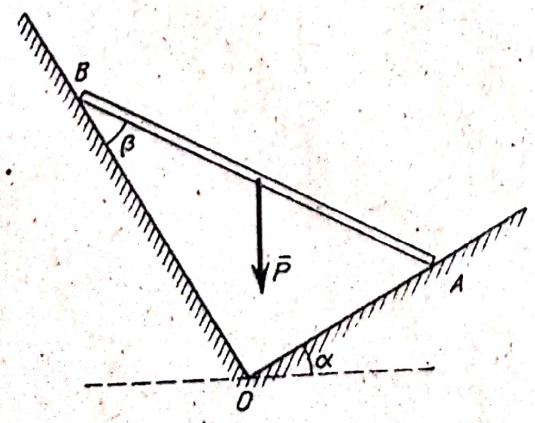


Fig. 7.5 *a*

Rezolvare. Vom rezolva problema pe cale grafică lăsînd calculul analitic pe seama cititorului. Notînd β, unghiul dintre bară și planul *OB* și presupunînd că extremitatea *B* a barei lunecă în jos vom determina în poziția limită de echilibru valoarea minimă β' a unghiului β. În fig. 7.5 *b* este construit patrulaterul frecărilor *C'D'E'F'* pentru această poziție, suportul forței efectiv aplicate *P* trecînd prin punctul *C'*.

Scanned with OKEN Scanner

Triunghiul ABC' fiind dreptunghic $\left[\text{deoarece } \widehat{AC'B} = \pi - \widehat{C'BA} - \widehat{C'AB} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \beta' - \varphi\right) - (\beta' + \varphi) = \frac{\pi}{2}\right]$ și $C'G$ fiind mediana laturii AB, avem:

$$AG = GB = GC'$$

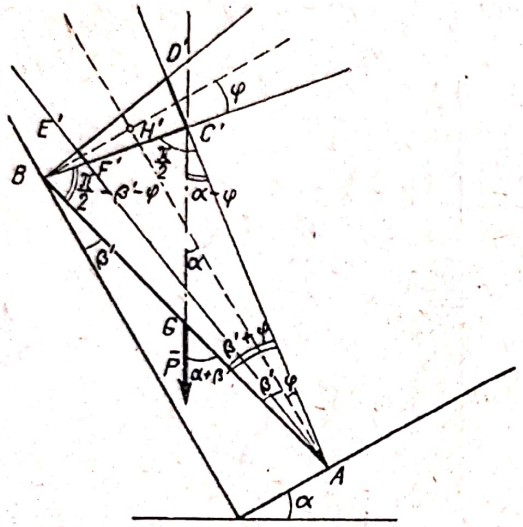


Fig. 7.5 *b*

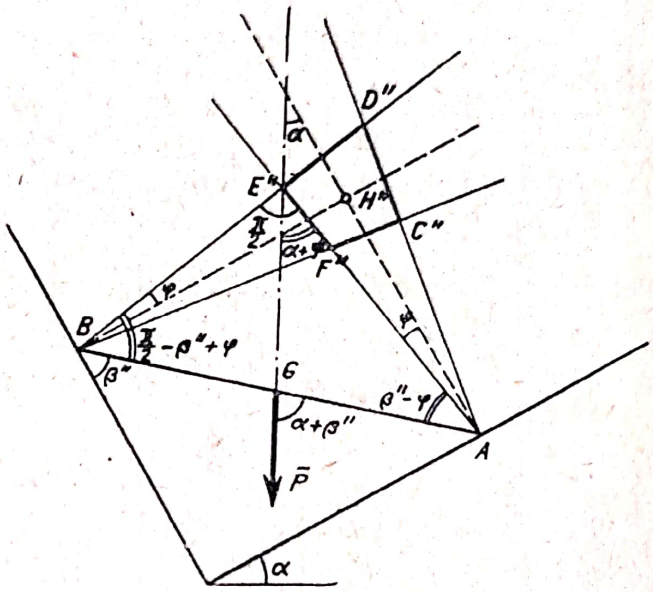


Fig. 7.5 *c*

și

$$\widehat{BGC'} = 2\,\widehat{BAC'}$$

adică:

$$\alpha + \beta' = 2(\beta' + \varphi)$$

deci:

$$\beta' = \alpha - 2\varphi. \tag{1}$$

În fig. 7.5 *c* este construit patrulaterul frecărilor $C''D''E''F''$ pentru poziția limită de echilibru corespunzînd valorii maxime β'' a unghiului β (extremitatea A lunecînd în jos). Suportul forței efectiv aplicate trece prin punctul E''.

Triunghiul ABE'' fiind dreptunghic $\left(\widehat{AE''B} = \frac{\pi}{2}\right)$ și EG fiind mediana laturii AB avem:

$$\widehat{BGE''} = 2\,\widehat{BAE''}$$

adică:

$$\alpha + \beta'' = 2(\beta'' - \varphi)$$

deci:

$$\beta'' = \alpha + 2\varphi. \tag{2}$$

Cum $\beta' \leqslant \beta \leqslant \beta''$ pozițiile de echilibru ale barei vor fi date de dubla inegalitate:

$$\alpha - 2\varphi \leqslant \beta \leqslant \alpha + 2\varphi. \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

De fapt era suficient să determinăm unghiul β într-una dintre cele două poziții limită de echilibru și să folosim observația de la problema 2.14. Înlocuind de exemplu în expresia (1) unghiul φ prin $-\varphi$ obținem:

$$\beta'' = \alpha + 2\varphi \tag{2}$$

7.6. Un sertar având lungimea a și lățimea b este prevăzut cu două mînere așezate simetric, distanța dintre ele fiind h. Cît de mare trebuie să fie coeficientul de frecare f dintre sertar și pereții săi laterali astfel încît să fie imposibil scoaterea sertarului trăgînd de un singur mîner, oricît de mare ar fi forța F cu care am trage normal pe peretele frontal al sertarului? Se neglijează forțele de frecare care iau naștere pe fundul sertarului.

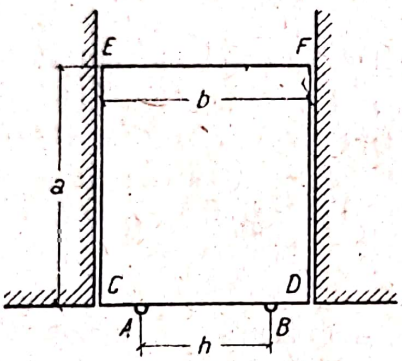


Fig. 7.6 *a*

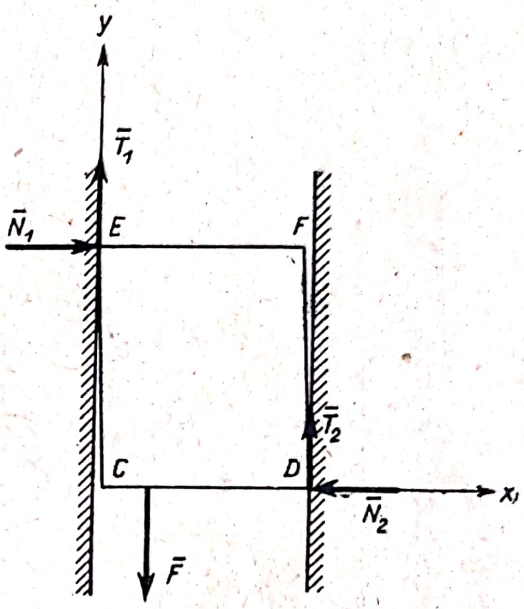


Fig. 7.6 *b*

Rezolvare. Dacă tragem de mînerul A, sertarul se va roti puțin presînd în punctele D și E asupra pereților laterali. În poziția de echilibru limită forțele care acționează asupra sertarului sînt cele din figura 7.6 *b* greutatea sertarului și reacțiunea care ia naștere pe fundul sertarului echilibrîndu-se. Ținînd seama de condițiile de frecare (7.1') $T_1 = f N_1$ și $T_2 = f N_2$ ecuațiile de echilibru (7.11) sînt:

$$X = N_1 - N_2 = 0 \tag{1}$$

$$Y = fN_1 + fN_2 - F = 0 \tag{2}$$

$$M_C = -aN_1 + bfN_2 - \frac{b-h}{2} F = 0.$$

Sistemul de mai sus este un sistem de trei ecuații omogene, necunoscutele fiind forțele N_1, N_2 și F; ca sistemul să fie compatibil trebuie ca determinantul coeficienților să fie nul, adică:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ f & f & -1 \\ -a & bf & -\frac{b-h}{2} \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

de unde:

$$f = \frac{a}{h}. \tag{5}$$

Rezultă că pentru un coeficient de frecare

$$f \geqslant \frac{a}{h}$$

este imposibil să scoatem sertarul indiferent de valoarea forței F. Problema admite și o soluție grafică. În figura 7.6 *c* este construit „patrulaterul frecărilor" triunghiul EHI, intersecția triunghiurilor de frecare CDH și FEH din D și E. Dacă echilibrul limită apare simultan în D și E (ipoteză în care s-a efectuat calculul analitic) suportul forței efectiv aplicate $\overline{F}$ trece prin punctul H. Din ΔEGH și ΔADH avem:

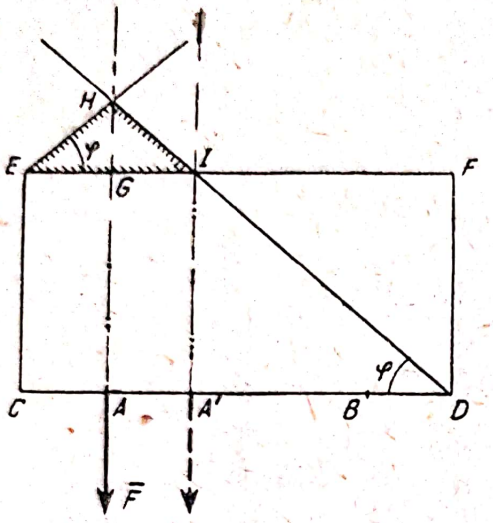


Fig. 7.6 *c*

$$GH = \frac{b-h}{2}\operatorname{tg}\varphi$$

$$GH = AH - AG = \frac{b+h}{2}\operatorname{tg}\varphi - a$$

de unde

$$f = \operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{h}. \qquad (5)$$

O altă poziție limită este aceea în care suportul lui $\overline{F}$ trece prin punctul $I(T_1 = 0, T_2 = fN_2)$. În acest caz din $\Delta A'ID$ rezultă

$$f = \operatorname{tg}\varphi = \frac{A'I}{A'D} = \frac{a}{\frac{1}{2}(b+h)}. \qquad (6)$$

Pentru $\frac{2a}{b+h} \leqslant f < \frac{a}{h}$ sertarul se va pune în mișcare sau va rămîne blocat după cum contactul cu pereții laterali se va stabili mai întîi în E respectiv D. Pentru $f > \frac{a}{h}$ sertarul rămîne blocat în orice caz. Aceste rezultate se pot stabili numai cu ajutorul dinamicii.

7.7. Un disc de rază r și greutate P se menține în echilibru pe un plan înclinat sub unghiul α cu ajutorul unui fir fixat cu un capăt de disc, de celălalt capăt acționînd o forță $\overline{Q}$ paralelă cu linia de cea mai mare pantă a planului înclinat. Cunoscînd coeficienții de frecare de alunecare f și de rostogolire s să se studieze condițiile de echilibru ale discului.

Rezolvare. Asupra discului acționează forțele efectiv aplicate $\overline{P}$ și $\overline{Q}$, iar în punctul teoretic de contact A reacțiunea normală $\overline{N}$, forța de frecare $\overline{T}$ și cuplul frecării de rostogolire M_r reprezentate în figura 7.7 *a* în ipoteza că tendința de lunecare și cea de rostogolire sînt în sus. Ecuațiile de echilibru (7.11) sînt:

$$X = Q - P\sin\alpha - T = 0 \quad (1)$$

$$Y = N - P\cos\alpha = 0 \quad (2)$$

$$M_A = Pr\sin\alpha - 2Qr + M_r = 0. \quad (3)$$

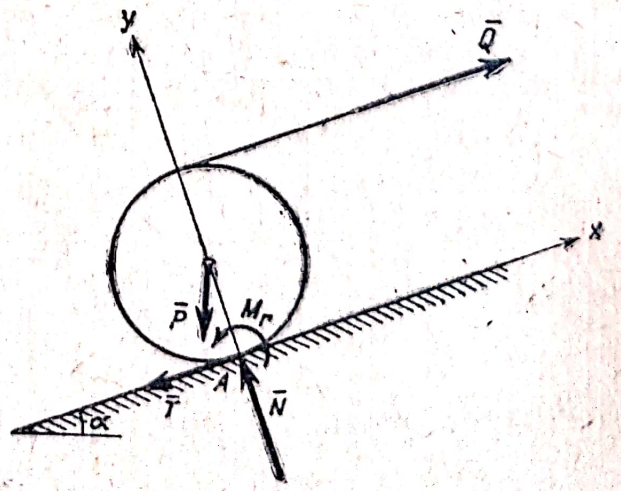


Fig. 7.7

Ca să nu apară lunecarea și rostogolirea conform (7.1) și (7.4) vom avea:

$$T \leqslant f N \tag{4}$$

$$M_r \leqslant s N . \tag{5}$$

Din ecuațiile (1) ... (3) avem:

$$N = P \cos \alpha \qquad T = Q - P \sin \alpha \qquad M_r = 2Qr - Pr \sin \alpha$$

și înlocuind în (4) și (5) obținem:

$$Q \leqslant P (\sin \alpha + f \cos \alpha) = Q_1 \tag{6}$$

condiția ca discul să nu lunece în sus și

$$Q \leqslant \frac{P}{2} \left(\sin \alpha + \frac{s}{r} \cos \alpha \right) = Q_2 \tag{7}$$

condiția ca discul să nu se rostogolească.

Dacă tendința de lunecare a discului este în sus se schimbă sensul forței de frecare T. Putem totuși folosi ecuațiile (1) ... (3) iar condiția de frecare $|T| \leqslant f |N|$ cum în acest caz $|T| = -T$ devine:

$$-f N \leqslant T \tag{8}$$

de unde obținem:

$$Q \geqslant P (\sin \alpha - f \cos \alpha) = Q_3 \tag{9}$$

condiția ca discul să nu lunece în jos.

Dacă tendința de rostogolire a discului este în sus se schimbă sensul momentului frecării de rostogolire M_r. Putem folosi ecuațiile (1) ... (3), condiția $|M_r| \leqslant s |N|$, cum $|M_r| = -M_r$ devenind:

$$-s N \leqslant M_r \tag{10}$$

de unde obținem:

$$Q \geqslant \frac{P}{2} \left(\sin \alpha - \frac{s}{r} \cos \alpha \right) = Q_4 \tag{11}$$

condiția ca discul să nu se rostogolească în jos.

Deci echilibrul este posibil dacă:

$$Q_3 \leqslant Q \leqslant Q_1 \quad \text{și} \quad Q_4 \leqslant Q \leqslant Q_2 .$$

Cum $\frac{Q_1 + Q_3}{2} = P \sin \alpha$ și $\frac{Q_2 + Q_1}{2} = \frac{1}{2} P \sin \alpha$ așezînd valorile Q_1, Q_2, Q_3 și Q_4 în ordine crescătoare pe o axă putem avea o situație ca în figura 7.7 *b* adică pentru nici o valoare a forței Q nu este posibil echilibrul, intervalele $[Q_2, Q_4]$ și $[Q_3, Q_1]$ în care nu apar rostogolirea respectiv lunecarea nu se suprapun. Pentru ca echilibrul să fie posibil aceste intervale trebuie să se suprapună adică:

$$Q_2 \geqslant Q_3 \tag{12}$$

Scanned with OKEN Scanner

adică:

$$\frac{P}{2}\left(\sin\alpha + \frac{s}{r}\cos\alpha\right) \geqslant P(\sin\alpha - \cos\alpha)$$

de unde se obține:

$$2f + \frac{s}{r} \geqslant \operatorname{tg}\alpha \tag{13}$$

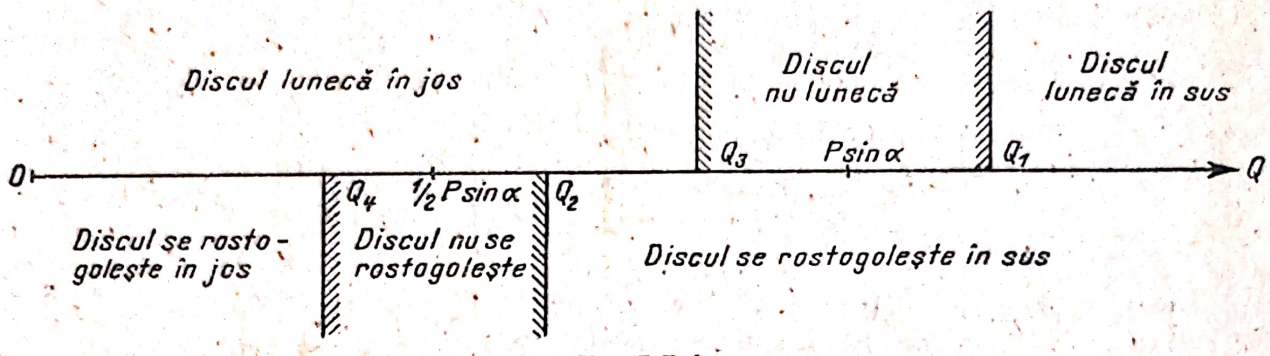


Fig. 7.7 *b*

condiție necesară pentru echilibrul discului care va fi posibil pentru:

$$Q_3 = P(\sin\alpha - f\cos\alpha) \leqslant Q \leqslant \frac{P}{2}\left(\sin\alpha + \frac{s}{r}\cos\alpha\right) = Q_2 \tag{14}$$

afară de cazurile cînd avem fie:

$$2f - \frac{s}{r} \geqslant \operatorname{tg}\alpha \tag{15}$$

fie:

$$\frac{s}{r} - 2f \geqslant \operatorname{tg}\alpha. \tag{16}$$

Pentru condiția (15) echilibrul este posibil în intervalul:

$$Q_4 \leqslant Q \leqslant Q_2$$

intervalul $[Q_4, Q_2]$ în care nu apare rostogolirea fiind interior intervalului $[Q_3, Q_1]$ în care nu apare lunecarea. Pentru condiția (16) echilibrul este posibil pentru:

$$Q_3 \leqslant Q \leqslant Q_1.$$

Observații. Cînd apare posibilitatea lunecării sau rostogolirii în două sensuri figurăm forța de frecare T sau momentul frecării de rostogolire M_r într-un sens, iar condițiile (7.1) scrise sub forma:

$$-fN \leqslant T \leqslant fN$$

$$-sN \leqslant M_r \leqslant sN$$

țin seama de ambele posibilități de lunecare sau rostogolire.

Prin analogie cu observația de la problema 2.14 vom determina condițiile de echilibru pentru lunecarea și rostogolirea într-un sens. Condițiile de echilibru pentru lunecarea și rostogolirea în celălalt sens le vom obține din primele înlocuind coeficienții f și s prin $-f$ și $-s$ și schimbînd sensul inegalităților.

Astfel din inegalitățile (6) și (7) se obțin inegalitățile (9) și (11).

7.8. Pe un mosor de greutate P avînd raza exterioară R și raza interioară r este înfășurat un fir iar de capătul firului atîrnă o greutate Q ca în figura 7.8. Știind că mosorul se găsește pe un plan înclinat sub unghiul α și cunoscînd unghiul de frecare φ și coeficientul de frecare de rostogolire s dintre mosor și plan, pentru ce valori ale forței Q este posibil echilibrul mosorului?

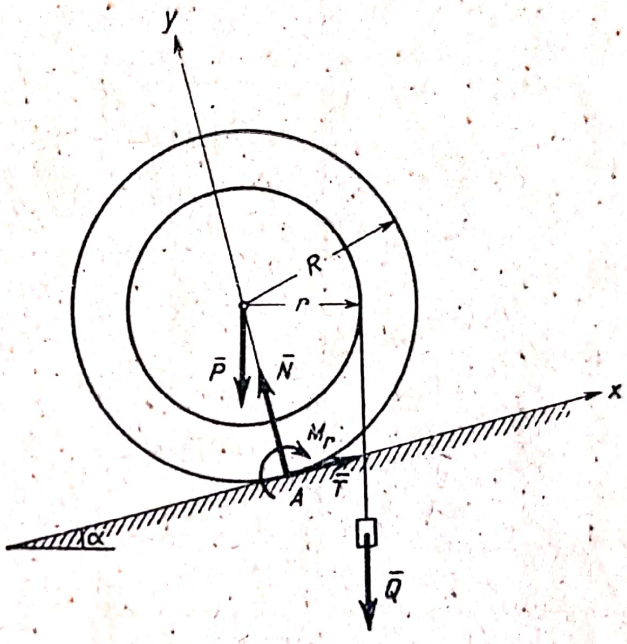


Fig. 7.8

Rezolvare. Presupunînd că tendințele de lunecare și de rostogolire sînt în jos, forțele care acționează asupra mosorului sînt cele reprezentate în figura 7.8. Ecuațiile (7.11) sînt:

$$X = T - P\sin\alpha - Q\sin\alpha = 0 \quad (1)$$

$$Y = N - P\cos\alpha - Q\cos\alpha = 0 \quad (2)$$

$$M_A = PR\sin\alpha - Q(r - R\sin\alpha) - M_r = 0 \quad (3)$$

unde conform (7.1) și (7.4):

$$T \leqslant N\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad (4)$$

$$M_r \leqslant sN. \quad (5)$$

Din ecuațiile (1) ... (3) avem:

$$N = (P+Q)\cos\alpha \qquad T = (P+Q)\sin\alpha \qquad M_r = PR\sin\alpha - Q(r - R\sin\alpha).$$

Înlocuind în (4) obținem:

$$\alpha \leqslant \varphi \quad (6)$$

condiția ca discul să nu lunece în jos, iar înlocuind în (5) obținem condiția ca discul să nu se rostogolească în jos:

$$Q \geqslant P\,\frac{R\sin\alpha - s\cos\alpha}{r - R\sin\alpha + s\cos\alpha} = Q_1 \quad (7)$$

dacă $r \geqslant R\sin\alpha - s\cos\alpha$.

Discul nu poate luneca în sus deoarece scalarul forței de frecare este pozitiv $T > 0$. Cum pentru $r \leqslant R\sin\alpha$ avem $M_r > 0$, indiferent de valoarea forței Q, rostogolirea în sus nu poate apărea decît pentru $r > R\sin\alpha$.

Scanned with OKEN Scanner

Această condiție fiind îndeplinită ca să nu apară rostogolirea în sus conform observației de la problema (7.7) trebuie ca:

$$-s\,N \leqslant M_r \tag{8}$$

deci:

$$Q \leqslant P\,\frac{R\sin\alpha + s\cos\alpha}{r - R\sin\alpha - s\cos\alpha} = Q_2 \tag{9}$$

dacă $r \geqslant R\sin\alpha + s\cos\alpha$.

În baza acestor rezultate putem trage următoarele concluzii:
Pentru $\alpha \leqslant \varphi$ discul nu lunecă, iar pentru $\alpha > \varphi$ lunecă în jos.
Presupunînd $R\sin\alpha > s\cos\alpha$ în funcție de valorile lui r avem:

r	Discul nu se rostogolește		Deci pentru echilibru trebuie ca:
	în jos dacă	în sus dacă	
$r \geqslant R\sin\alpha + s\cos\alpha$	$Q \geqslant Q_1$	$Q \leqslant Q_2$	$P\,\frac{R\sin\alpha - s\cos\alpha}{r - R\sin\alpha + s\cos\alpha} \leqslant$ $\leqslant Q \leqslant P\,\frac{R\sin\alpha + s\cos\alpha}{r - R\sin\alpha - s\cos\alpha}$
$R\sin\alpha < r < R\sin\alpha + s\cos\alpha$	$Q \geqslant Q_1$	$Q \geqslant Q_2$ unde $Q_2 \leqslant 0$ condiție în orice caz îndeplinită	$Q \geqslant P\,\frac{R\sin\alpha - s\cos\alpha}{r - R\sin\alpha + s\cos\alpha}$
$R\sin\alpha - s\cos\alpha < r \leqslant R\sin\alpha$	$Q \geqslant Q_1$	Nu este cazul	
$0 \leqslant r \leqslant R\sin\alpha - s\cos\alpha$	$Q \leqslant Q_1$ unde $Q_1 \leqslant 0$ condiție ce nu poate fi niciodată îndeplinită	Nu este cazul	Echilibrul nu este posibil pentru nici o valoare a lui Q

Deci o condiție necesară de echilibru este:

$$r > R\sin\alpha - s\cos\alpha. \tag{10}$$

Presupunînd $R\sin\alpha < s\cos\alpha$ în funcție de valorile lui r avem:

r	Discul nu se rostogolește		Deci pentru echilibru trebuie ca:
	în jos dacă	în sus dacă	
$r \geqslant R\sin\alpha + s\cos\alpha$	$Q \geqslant Q_1$ unde $Q_1 \leqslant 0$ condiție în orice caz îndeplinită	$Q \leqslant Q_2$	$Q \leqslant P\,\frac{R\sin\alpha + s\cos\alpha}{r - R\sin\alpha - s\cos\alpha}$
$R\sin\alpha < r < R\sin\alpha + s\cos\alpha$	$Q \geqslant Q_1$ unde $Q_1 \leqslant 0$	$Q \geqslant Q_2$ unde $Q_2 \leqslant 0$	$Q \geqslant 0$ deci pentru orice valoare a forței Q nu apare rostogolirea
$0 \leqslant r \leqslant R\sin\alpha$	$Q \geqslant Q_1$ unde $Q_1 \leqslant 0$	Nu este cazul	

Scanned with OKEN Scanner

7.9. Pe un mosor de greutate P avînd raza exterioară R și raza interioară r este înfășurat un fir înclinat sub unghiul $\alpha \left(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, de capătul firului acționînd o forță $\bar{F}$. Știind că mosorul se găsește pe un plan orizontal și cunoscînd coeficienții de frecare de lunecare f și de rostogolire s, pentru ce valori ale forței $\bar{F}$ rămîne mosorul în echilibru.

Rezolvare. Presupunînd că tendințele de lunecare și de rostogolire sînt spre dreapta, forțele care acționează asupra mosorului sînt cele din figura 7.9 *a*. Ecuațiile (7.11) sînt:

$$X = -T + F\cos\alpha = 0$$

$$Y = -P + N + F\sin\alpha = 0$$

$$M_0 = -TR + Fr + M_r = 0$$

de unde:

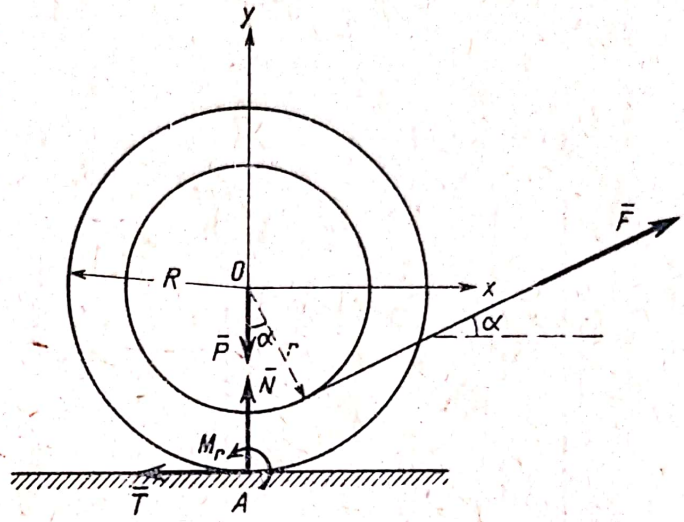


Fig. 7.9 *a*

$$N = P - F\sin\alpha \qquad T = F\cos\alpha \qquad M_r = F(R\cos\alpha - r).$$

Pentru ca mosorul să nu se desprindă de pe plan trebuie conform (7.8) ca $N > 0$ adică:

$$F \leqslant \frac{P}{\sin\alpha}. \tag{1}$$

Mosorul poate luneca spre dreapta cînd $T > 0$ adică $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$. Cum

$$T \leqslant fN$$

și înlocuind cu valorile lui T și N obținem ținînd seama că $f = \operatorname{tg}\varphi$:

$$F \leqslant \frac{P}{\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{f}} = \frac{P\sin\varphi}{\cos(\alpha - \varphi)} = F_1. \tag{2}$$

Analog, ca să nu apară rostogolirea nici spre dreapta $\left(M_r > 0 \text{ pentru } 0 \leqslant \alpha < \beta \text{ unde } \cos\beta = \frac{r}{R}\right)$ nici spre stînga $\left(M_r < 0 \text{ pentru } \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ trebuie ca:

$$-sN \leqslant M_r \leqslant sN.$$

Efectuînd calculele și introducînd notațiile:

$$\cos\beta = \frac{r}{R} \qquad \cos\beta_1 = \frac{r}{\sqrt{R^2 + s^2}} \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{s}{R}$$

obținem:

$$F \leqslant \frac{P}{\sin\alpha + \dfrac{R\cos\alpha - r}{s}} = \frac{P\sin\psi}{\cos(\alpha-\psi)-\cos\beta_1} = F_2 \text{ pentru } 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$$

$$F \leqslant \frac{P}{\sin\alpha + \dfrac{r - R\cos\alpha}{s}} = \frac{P\sin\psi}{\cos\beta_1 - \cos(\alpha+\psi)} = F_3 \text{ pentru } \beta \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

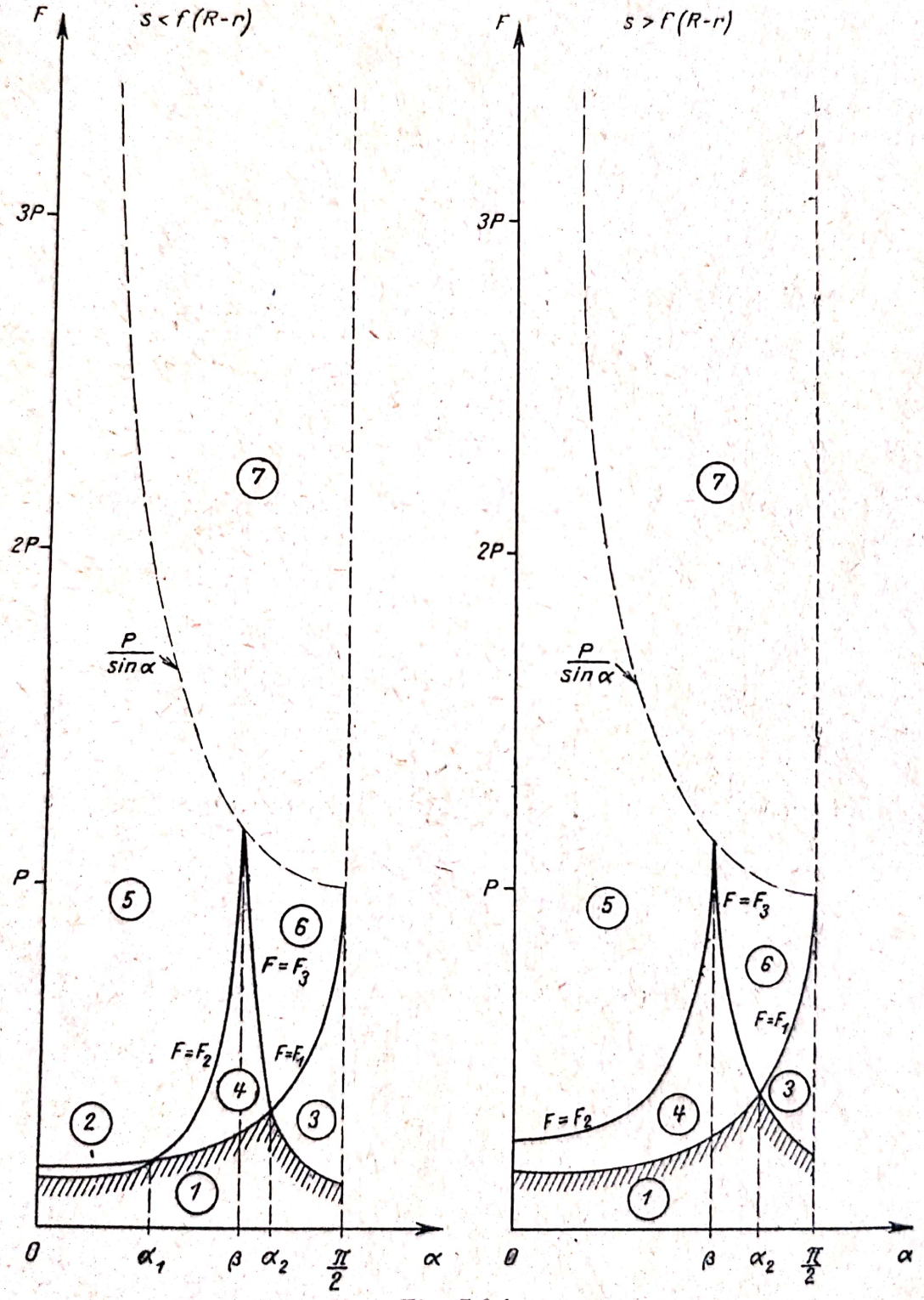


Fig. 7.9 *b*

(1) Echilibru. (2) Rostogolire spre dreapta. (3) Rostogolire spre stînga. (4) Lunecare spre dreapta. (5) Lunecare și rostogolire spre dreapta. (6) Lunecare spre dreapta și rostogolire spre stînga. (7) Desprindere de pe plan.

Scanned with OKEN Scanner

Reprezentînd pe un același grafic valorile limită pentru care apar lunecarea și rostogolirea putem avea o imagine a condițiilor de echilibru și a modului cum se va pune în mișcare mosorul. În figura 7.9 *b* am reprezentat aceste curbe pentru diferite valori ale coeficientului de frecare la rostogolire și anume pentru $s < f(R - r)$, și pentru $s > f(R - r)$. Astfel, de exemplu din examinarea figurii 7.9 *b* pentru $s < f(R - r)$ rezultă următoarele condiții de echilibru:

$$F \leqslant F_2 \text{ pentru } 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$$

$$F \leqslant F_1 \text{ pentru } \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$$

$$F \leqslant F_3 \text{ pentru } \alpha_2 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$$

unde unghiurile α_1 și α_2 sînt determinate de condițiile $F_1 = F_2$ și $F_1 = F_3$ și anume:

$$\cos \alpha_1 = \frac{fr}{fR - s} \qquad (\alpha_1 \leqslant \beta); \qquad \cos \alpha_2 = \frac{fr}{fR + s} \qquad (\alpha_2 \geqslant \beta).$$

Tot din diagramele de mai sus pentru diferite valori ale unghiului α și forței F putem ști modul în care se pune în mișcare mosorul. Lăsăm pe seama cititorului scrierea condițiilor de echilibru pentru cazurile $s > f(R - r)$.

7.10. Un troliu este alcătuit din două discuri solidare coaxiale de raze R_1 și R_2 pe care sînt înfășurate două fire, de capătul unuia atîrnînd un corp de greutate P (fig. 7.10). Cu ce forță F trebuie să tragem de capătul firului al doilea pentru a menține în echilibru troliul știind că greutatea troliului este G, raza axului troliului este r și că coeficientul de frecare în lagăr este μ.

Rezolvare. Presupunînd că tendința de rotire a troliului este în sens trigonometric, în lagăr apare un moment de frecare M_f ca în figura 7.10. Ecuațiile de echilibru (7.11) sînt:

$$X = R_x = 0$$

$$Y = R_y - P - G - F = 0$$

$$M_0 = FR_2 - PR_1 - M_f = 0$$

unde conform (7.9):

$$M_f \leqslant \mu r \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Efectuînd calculele obținem:

$$|\bar{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = R_y = P + G + F$$

$$M_f = FR_2 - PR_1$$

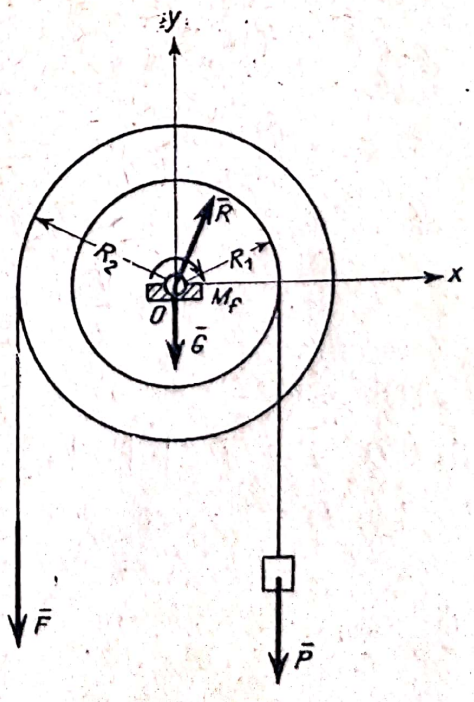


Fig. 7.10

de unde:

$$F \leqslant \frac{(R_1 + \mu r)\, P + \mu r G}{R_2 - \mu r}.$$

Dacă tendința de rotire este în sens invers, condiția (7.9) se poate scrie: $M_f \geqslant -\mu r \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ de unde:

$$F \geqslant \frac{(R_1 - \mu r)\, P - \mu r G}{R_2 + \mu r}$$

deci echilibrul este posibil pentru:

$$\frac{(R_1 - \mu r)\, P - \mu r G}{R_2 + \mu r} \leqslant F \leqslant \frac{(R_1 + \mu r)\, P + \mu r G}{R_2 - \mu r}. \qquad (1)$$

Dacă efectul frecării în lagăr este neglijabil, $\mu \approx 0$ iar din (1) rezultă:

$$F = \frac{R_1}{R_2} P.$$

7.11. O bară AB omogenă și grea de lungime $2l$ și greutate P este articulată în capătul A. De capătul B al barei acționează o forță $\bar{Q}$ orizontală orientată ca în figura 7.11. Cunoscînd coeficientul de frecare μ din articulație și raza r a fusului articulației, să se determine pozițiile de echilibru ale barei.

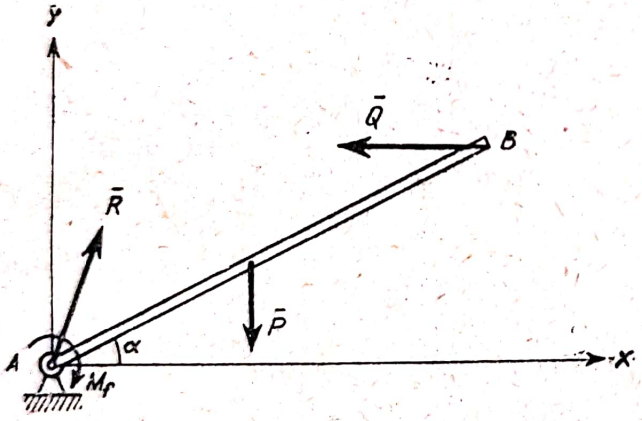


Fig. 7.11

Rezolvare. Ecuațiile de echilibru (7.11) sînt:

$$X = R_x - Q = 0$$

$$Y = R_y - P = 0$$

$$M_A = 2Ql\sin\alpha - Pl\cos\alpha - M_f = 0$$

unde conform (7.9):

$$-\mu r \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \leqslant M_f \leqslant \mu r \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad (1)$$

deoarece bara se poate roti în ambele sensuri.

Din ecuațiile de mai sus obținem:

$$R_x = Q \quad R_y = P \quad |\bar{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{P^2 + Q^2}; \quad M_f = 2Ql\sin\alpha - Pl\cos\alpha.$$

Dacă nu ar exista frecare în articulație, $\mu = 0$, deci $M_f = 0$, adică:

$$2Ql\sin\alpha_0 - Pl\cos\alpha_0 = 0$$

poziția de echilibru în acest caz fiind dată de

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{P}{2Q}. \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Făcînd schimbarea de variabilă $\alpha = \alpha_0 + \theta$:

$$M_f = l\sqrt{P^2 + 4Q^2}\sin\theta$$

și făcînd înlocuirile în (1) obținem:

$$|\sin\theta| \leqslant \frac{\mu r}{l}\sqrt{\frac{P^2+Q^2}{P^2+4Q^2}} \tag{3}$$

deci:

$$-\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 .$$

unde:

$$\sin\theta_0 = \frac{\mu r}{l}\sqrt{\frac{P^2+Q^2}{P^2+4Q^2}}. \tag{4}$$

Poziţiile de echilibru ale barei vor fi date de condiţia:

$$\alpha_0 - \theta_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0 + \theta_0$$

echilibrul fiind posibil pe un interval în vecinătatea poziţiei de echilibru corespunzătoare cazului cînd nu există frecare.

7.12. Să se determine momentul cuplului M care trebuie aplicat macaralei din figura 7.12 pentru a putea roti macaraua. Se dă greutatea proprie a macaralei G, greutatea P a corpului ridicat de macara, distanţele a, b şi h (distanţa dintre lagărele A şi B), coeficientul de frecare μ din lagăre, raza R a axului macaralei. Suprafaţa inferioară de contact a axului în lagărul A este o coroană circulară de raze R şi r, coeficientul de frecare fiind f.

Aplicaţie numerică: $G = 3$ tf, $P = 2$ tf, $a = 1$ m, $b = 3{,}5$ m, $h = 2{,}5$ m, $R = 6$ cm, $r = 4$ cm, $\mu = 0{,}01$, $f = 0{,}15$.

Rezolvare. În lagărul A apare o reacţiune de direcţie necunoscută $\overline{R}_A$, reacţiunea $\overline{R}_B$ din lagărul B fiind normală pe ax (nu are componentă pe axa de rotaţie Az). Din cauza frecării vor apărea în A şi B momentele de frecare M_{Af} şi M_{Bf} care în poziţia limită, cînd macaraua se pune în mişcare, iau valorile (7.9′):

$$M_{Af} = \mu R\sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2}$$

$$M_{Bf} = \mu R\sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2} \tag{1}$$

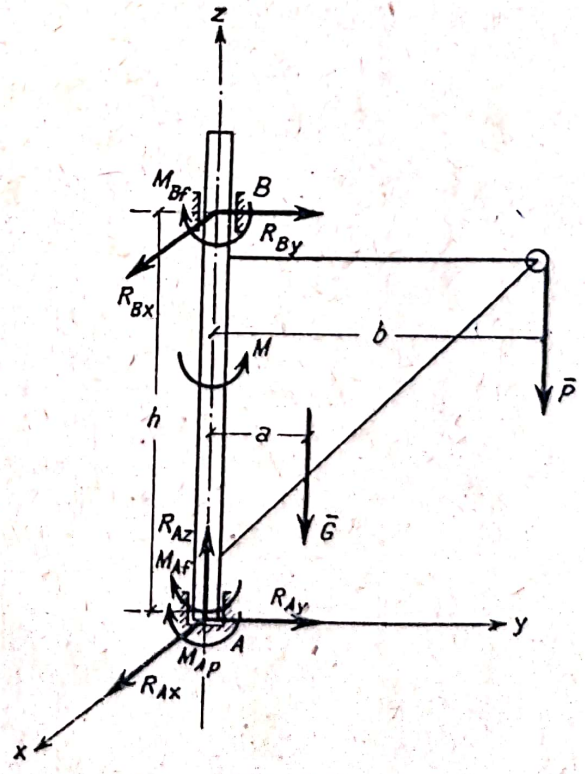


Fig. 7.12

Datorită frecării de pivotare în lagărul A ia naștere momentul de frecare de pivotare care conform (7.6′) este:

$$M_{Ap} = \frac{2}{3} f R_{Az} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} . \qquad (2)$$

Ecuațiile de echilibru (7.11) sînt:

$$X = R_{Ax} + R_{Bx} = 0$$
$$Y = R_{Ay} + R_{By} = 0$$
$$Z = R_{Az} - G - P = 0$$
$$M_x = -Ga - Pb - R_{By} h = 0$$
$$M_y = R_{Bx} h = 0$$
$$M_z = M - M_{Af} - M_{Bf} - M_{Ap} = 0.$$

Rezolvînd aceste ecuații obținem:

$$R_{Ax}=R_{Bx}=0 \quad R_{Ay} = -R_{By} = \frac{Ga+Pb}{h} \quad R_{Az}=G+P \quad M=M_{Af}+M_{Bf}+M_{Ap}$$

și ținînd seama de (1) și (2):

$$M = 2\,\mu R \frac{Ga + Pb}{h} + \frac{2}{3} f \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} (G+P).$$

Făcînd înlocuirile numerice obținem:

$$M_{Af} = M_{Bf} = 2{,}4 \text{ kgf m} \qquad M_{Ap} = 38 \text{ kgf m}$$
$$M = 42{,}8 \text{ kgf m}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

7.13. O bară omogenă se sprijină prin două reazeme A_1 și A_2 pe un plan orizontal aspru. Cunoscînd greutatea P a barei, coeficienții de frecare dintre reazeme și plan f_1 și f_2 și dimensiunile a și b din figură, să se determine pentru ce valori ale forței orizontale Q rămîne bara în echilibru.

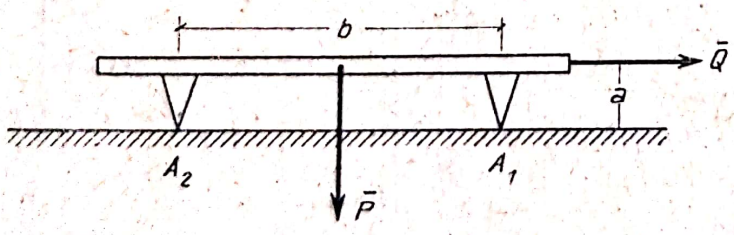


Fig. 7.13

Răspuns:

$$Q \leqslant \frac{(f_1 + f_2) Pb}{2[b + (f_2 - f_1) a]} .$$

7.14. Un corp paralelipipedic $ABCD$ omogen și greu este așezat cu un capăt într-o nișă a unui zid rezemîndu-se în punctele A și E. Elementele geometrice fiind date pe figura 7.14, să se determine condițiile de echilibru presupunînd:

a) Rezemare fără frecare în A și cu frecare în E, coeficientul de frecare fiind f_1.

Scanned with OKEN Scanner

b) Rezemare fără frecare în E și cu frecare în A, coeficientul de frecare fiind f_2.

Răspuns. a) Pentru ca corpul să nu lunece trebuie ca $f_1 \geqslant \operatorname{tg}\alpha$ și pentru ca să nu se desprindă

$$h \operatorname{tg}\alpha < a < \frac{l + h \operatorname{tg}\alpha}{2}.$$

b) Pentru ca corpul să nu lunece trebuie ca:

$$f_2 \geqslant \frac{(l\cos\alpha - h\sin\alpha)\sin\alpha}{(l\cos\alpha - h\sin\alpha)\cos\alpha - 2a}$$ și

pentru ca să nu se desprindă trebuie ca $l > h \operatorname{tg}\alpha$ și

$$a < \frac{\cos\alpha\,(l\cos\alpha - h\sin\alpha)}{2}.$$

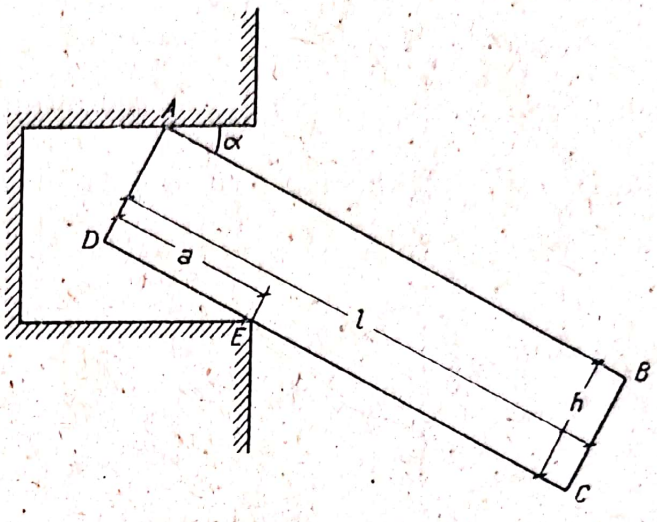


Fig. 7. 14

7.15. O bară omogenă AB de greutate P înclinată sub unghiul α față de orizont reazemă cu capătul A pe un plan orizontal aspru având coeficientul de frecare f, de capătul B fiind legat un fir. Pentru ce unghi de înclinare β al firului începe bara să lunece și ce tensiune F ia naștere în fir.

Răspuns. $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{f}$, $F = \frac{\sqrt{f^2 + (1 + 2f\operatorname{tg}\alpha)^2}}{2(1 + f\operatorname{tg}\alpha)} P$.

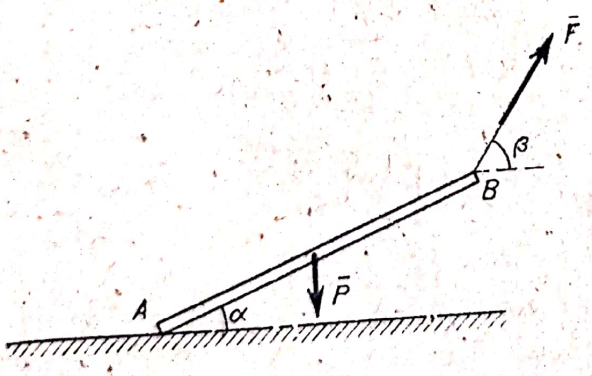


Fig. 7.15

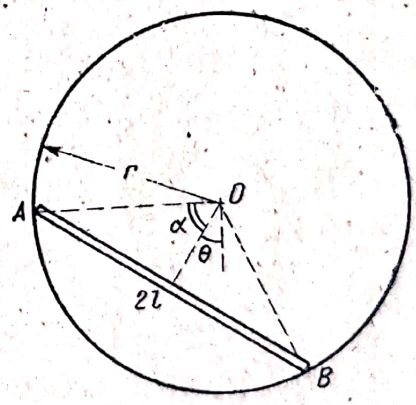


Fig. 7.16

7.16. O bară omogenă și grea de lungime $2l$ reazemă în punctele A și B pe un cerc de rază r situat într-un plan vertical. Cunoscînd unghiul de frecare φ dintre bară și cerc să se determine pozițiile de echilibru ale barei determinate de unghiul θ din figura 7.16. Se va folosi metoda grafică a patrulaterului frecărilor.

Răspuns. $\operatorname{ctg}\theta \geqslant \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}$ unde $2\alpha = \widehat{AOB}$.

7.17. Un disc de rază r și greutate P este menținut în echilibru pe un plan înclinat cu ajutorul unui fir paralel cu linia de cea mai mare pantă a

planului. Cunoscînd coeficienții de frecare de alunecare f și de rostogolire s să se studieze condițiile de echilibru ale discului și să se determine tensiunea F din fir.

Răspuns. Dacă $\frac{s}{r} < f$ echilibrul se poate rupe prin rostogolire; pentru echilibru trebuie ca $P(\sin\alpha - \frac{s}{r}\cos\alpha) \leqslant F \leqslant P(\sin\alpha + \frac{s}{r}\cos\alpha)$. Dacă $\frac{s}{r} > f$ echilibrul se poate rupe prin lunecare; pentru echilibru trebuie ca $P(\sin\alpha - f\cos\alpha) \leqslant F \leqslant P(\sin\alpha + f\cos\alpha)$.

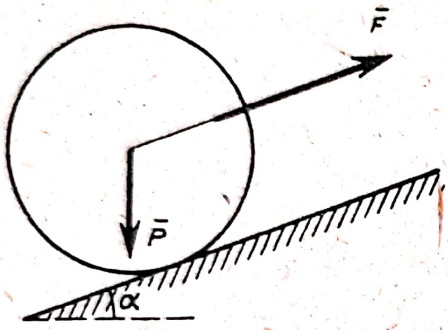


Fig. 7.17

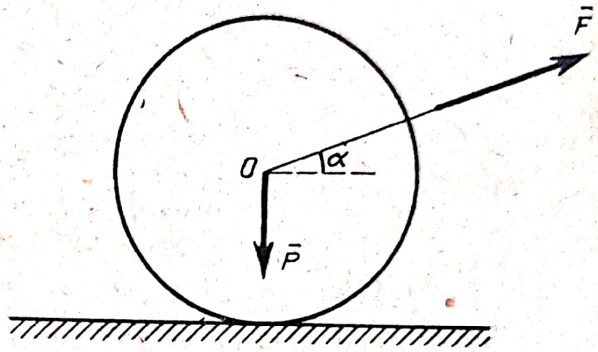


Fig. 7.18

7.18. Un disc de rază r și greutate P se găsește pe un plan orizontal aspru, avînd coeficienții de frecare de lunecare f și de rostogolire s. De centrul O al discului este fixat un fir înclinat sub unghiul α față de orizontală. Pentru ce valori ale tensiunii F din fir este posibil echilibrul?

Răspuns. Condițiile de echilibru sînt: din (7.8.) $F \leqslant \frac{P}{\sin\alpha}$; din (7.1) $F \leqslant \frac{P}{\sin\alpha + \frac{|\cos\alpha|}{f}}$ și din (7.4) $F \leqslant \frac{P}{\sin\alpha + \frac{r}{s}|\cos\alpha|}$.

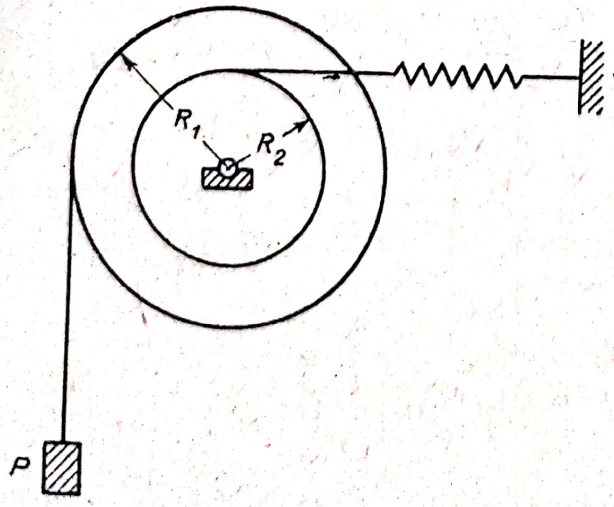


Fig. 7.19

7.19. Pe un scripete alcătuit din două discuri solidare coaxiale de raze R_1 și R_2 sînt înfășurate două fire, de capătul unuia atîrnînd un corp de greutate P iar de capătul celuilalt fiind fixat un resort (fig. 7.19). Care este alungirea x a resortului în poziția de echilibru, știind că greutatea scripetelui este G, raza axului scripetelui este r, coeficientul de frecare în lagăr μ și că tensiunea din resort este proporțională cu alungirea resortului, factorul de proporționalitate fiind k (constanta elastică).

Scanned with OKEN Scanner

Răspuns:

$$\frac{P}{k}\,\frac{R_1}{R_2}\,\frac{1-\mu\sqrt{\frac{r^2}{R_2^2}+\left(1-\mu^2\,\frac{r^2}{R_2^2}\right)\frac{r^2}{R_1^2}\left(\frac{P+G}{P}\right)^2}}{1-\mu^2\,\frac{r^2}{R_2^2}} \leqslant$$

$$\leqslant x \leqslant \frac{P}{k}\,\frac{R_1}{R_2}\,\frac{1+\mu\sqrt{\frac{r^2}{R_2^2}+\left(1-\mu^2\,\frac{r^2}{R_2^2}\right)\frac{r^2}{R_1^2}\left(\frac{P+G}{P}\right)^2}}{1-\mu^2\,\frac{r^2}{R_2^2}}.$$

Dacă nu ținem seama de frecări $\mu \approx 0$ și $x = \frac{P}{k} \cdot \frac{R_1}{R_2}$.

Capitolul VIII

STATICA SISTEMELOR DE CORPURI

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Se numește sistem de corpuri un ansamblu de două sau mai multe corpuri care se interacționează.

Forțele prin care se interacționează două corpuri ale aceluiași sistem se numesc forțe interioare. Ele respectă principiul acțiunii și al reacțiunii, fiind două cîte două egale și direct opuse, adică:

$$\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0 \qquad \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} + \bar{r}_j \times \bar{F}_{ji} = 0 \tag{8.1}$$

unde $\bar{F}_{ij}$ este forța care acționează asupra corpului i din partea corpului j, iar $\bar{r}_i$ și $\bar{r}_j$ sînt vectorii de poziție ai punctelor de aplicație ale forțelor $\bar{F}_{ij}$ și $\bar{F}_{ji}$. Forțele interioare au caracteristicile forțelor de legătură și prin urmare depind de natura legăturilor dintre corpuri [rezemare cu sau fără frecare, articulație, articulație cu frecare etc. (fig. 8. *a*)].

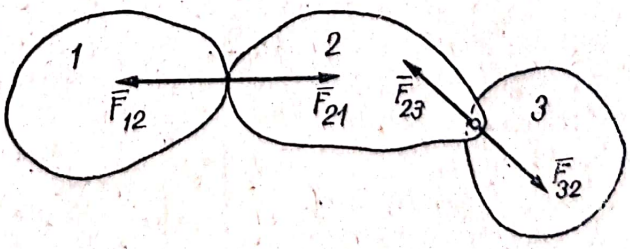


Fig. 8. *a*

Dacă un sistem de corpuri este în echilibru, fiecare corp în parte va fi în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare (forțe efectiv aplicate și forțe de legătură) și a forțelor interioare de interacțiune dintre acel corp și celelalte corpuri adică rezultanta și momentul rezultant al tuturor acestor forțe vor fi nule:

$$\bar{R} = 0 \qquad \bar{M}_0 = 0, \tag{8.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile de echilibru (8.2) se pot scrie și pentru ansamble de corpuri din sistem ca și cum acestea ar fi solidificate (sau pentru întregul sistem), în acest caz nemai fiind necesară introducerea forțelor interioare de interacțiune dintre corpurile ansamblului (sau întregului sistem) în ecuațiile de echilibru (teorema solidificării). Dacă problema se poate rezolva aplicînd teorema solidificării se scriu ecuațiile de echilibru pentru întregul sistem, dacă însă numărul de necunoscute este mai mare decît numărul acestor ecuații de echilibru se izolează corpurile scriind ecuațiile de echilibru pentru fiecare corp în parte, sau pentru n-1 corpuri și pentru întregul sistem de n corpuri.

În cazul cînd printre corpurile care alcătuiesc un sistem se află bare articulate (fără frecare) la ambele capete și acționate de forțe numai la capete, reacțiunile din articulațiile barei au direcția barei și sînt egale și direct opuse (v. de ex. problema 8.6).

B. PROBLEME REZOLVATE

8.1. Două bare de greutate neglijabilă în formă de sfert de cerc articulate în punctele A, B, C sînt acționate de forța verticală $\overline{P}$. Dîndu-se forța $\overline{P}$ și elementele geometrice r și a să se determine reacțiunile din articulații.

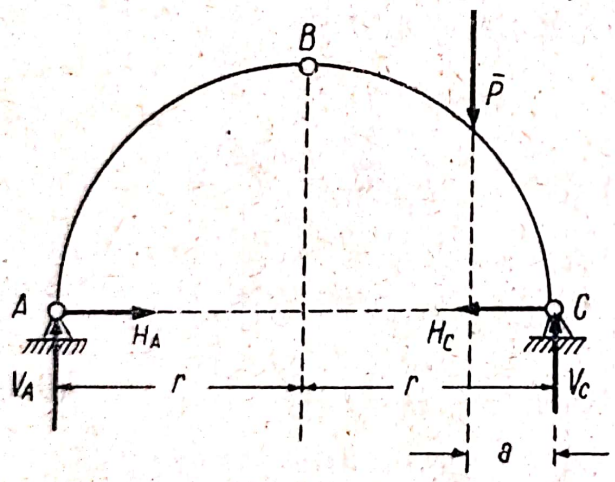


Fig. 8.1 *a*

Rezolvare. Forțele exterioare care acționează asupra sistemului sînt forța P și reacțiunile din articulațiile A și C de componente H_A, V_A și H_C, V_C care reprezintă patru necunoscute scalare (fig. 8.1 *a*). Aplicînd teorema solidificării se pot scrie numai trei ecuații de echilibru pentru întregul sistem. Trebuie deci izolate corpurile introducînd și reacțiunea din articulația B de componente H_B, V_B (fig. 8.1 *b*) numărul necunoscutelor crescînd la șase. Pentru fiecare dintre barele AB și BC se pot scrie cîte trei ecuații de echilibru (8.2) deci problema este determinată.

Ecuațiile de echilibru sînt:

pentru bara AB:

$$X = H_A - H_B = 0 \qquad (1)$$

$$Y = V_A - V_B = 0 \qquad (2)$$

$$M_A = H_B \cdot r - V_B \cdot r = 0 \qquad (3)$$

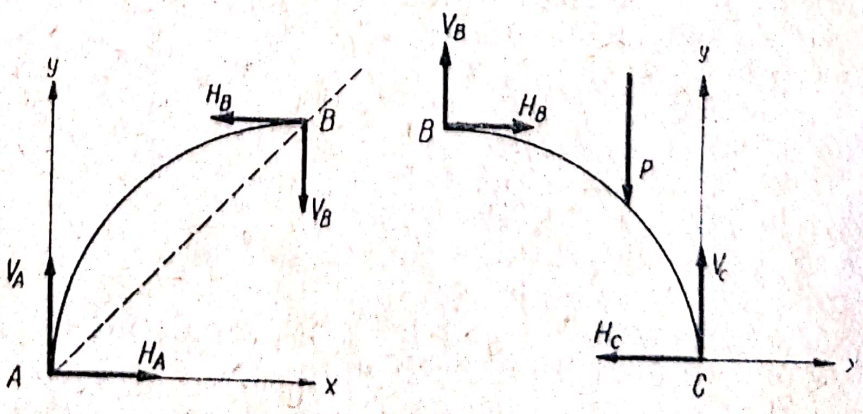


Fig. 8.1 *b*

pentru bara BC:

$$X = H_B - H_C = 0 \tag{4}$$

$$Y = V_B + V_C - P = 0 \tag{5}$$

$$M_C = P \cdot a - H_B \cdot r - V_B \cdot r = 0. \tag{6}$$

Rezolvînd sistemul de ecuații (1)...(6) se obține:

$$H_A = H_B = H_C = V_A = V_B = \frac{a}{2r} P, \qquad V_C = \frac{2r - a}{2r} P$$

și apoi:

$$R_A = R_B = \sqrt{V_A^2 + H_A^2} = \frac{a}{r\sqrt{2}} P; \; R_C = \sqrt{H_C^2 + V_C^2} =$$

$$= \frac{P}{2r} \sqrt{a^2 + (2r - a)^2},$$

Printr-un calcul elementar se poate determina suportul reacțiunilor $\bar{R}_A$ și $\bar{R}_B$, dreapta AB de ecuație $x - y = 0$.

8.2. Sistemul de bare din figura 8.2 *a* este alcătuit din barele omogene AB și BC de lungime l și greutate P articulate între ele în B. Bara AB este încastrată în capătul A, iar bara BC este suspendată în punctele D și E ($BD = EC = a$) de un fir ce trece peste un mic scripete F. Cunoscîndu-se unghiurile α și β să se determine tensiunea din fir și reacțiunea din încastrarea A.

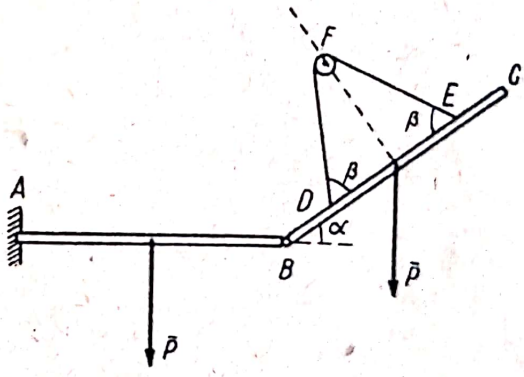


Fig. 8.2 *a*

Rezolvare. Deoarece tensiunea din fir, reacțiunea și momentul din încastrare reprezintă patru necunoscute scalare nu putem aplica teorema solidificării cu ajutorul căreia am obține numai trei ecuații. Vom izola corpurile. Forțele care acționează asupra corpurilor din sistem sînt reprezentate în figura 8.2 *b*.

Pentru scripetele F deoarece nu ne interesează reacțiunea din axul scripetelui, scriem o ecuație de moment în raport cu acest ax de unde rezultă:

$$T_1 = T_2 \tag{1}$$

deci tensiunea în fir este constantă.

Ecuațiile de echilibru (8.2) sînt:

pentru bara BC:

$$X = R_{Bx} + T_1 \cos\beta - T_2 \cos\beta - P \sin\alpha = 0 \tag{2}$$

$$Y = R_{By} + T_1 \sin\beta + T_2 \sin\beta - P \cos\alpha = 0 \tag{3}$$

$$M_B = T_1 a \sin\beta + T_2 (l - a) \sin\beta - P \frac{l}{2} \cos\alpha = 0 \tag{4}$$

pentru bara AB:

$$X = H - R_{Bx}\cos\alpha + R_{By}\sin\alpha = 0 \tag{5}$$

$$Y = V - P - R_{Bx}\sin\alpha - R_{By}\cos\alpha = 0 \tag{6}$$

$$M_A = M - \frac{Pl}{2} - R_{Bx}\,l\sin\alpha - R_{By}\,l\cos\alpha = 0. \tag{7}$$

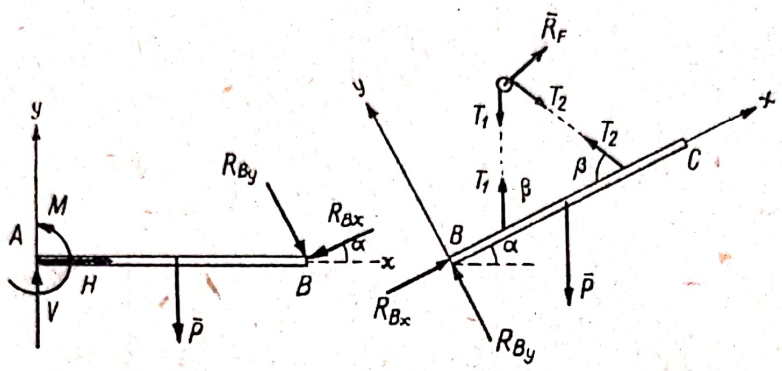


Fig. 8.2 *b*

Din ecuațiile (1)...(4) rezultă:

$$T_1 = T_2 = \frac{P\cos\alpha}{2\sin\beta} \qquad R_{Bx} = P\sin\alpha \qquad R_{By} = 0$$

deci reacțiunea din articulația B are direcția barei BC. Înlocuind în ecuațiile (5)...(7) obținem:

$$H = \frac{P}{2}\sin 2\alpha \qquad V = P(1+\sin^2\alpha) \qquad M = \frac{Pl}{2}(1+2\sin^2\alpha).$$

8.3. Bara omogenă AB de lungime $2l$ și greutate P articulată în A se reazemă fără frecare în C pe bara omogenă CD de lungime $2a$ și greutate G articulată în mijlocul ei E, de capătul D al barei fiind atîrnată o greutate Q (fig. 8.3 *a*). Știind că articulațiile A și E se găsesc pe aceeași verticală la distanța $AE = a$ să se determine pozițiile de echilibru (α) ale sistemului de bare.

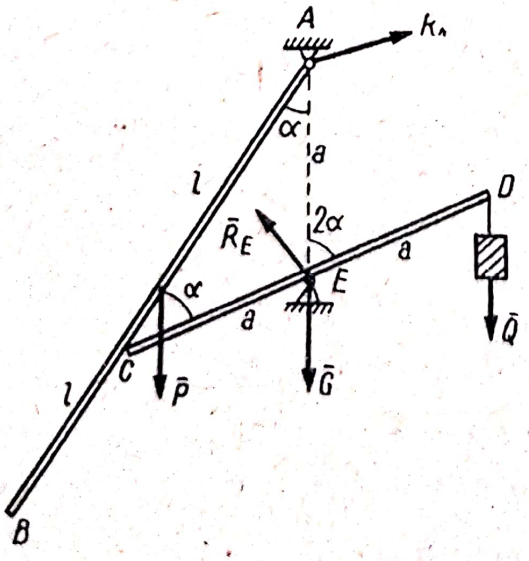


Fig. 8.3 *a*

Rezolvare. Trebuie izolate barele deoarece pentru întregul sistem dispunem de trei ecuații, iar numărul necunoscutelor scalare este cinci ($\bar{R}_A$ $\bar{R}_E$, α).

Izolînd barele, introducem reacțiunea normală dintre bare $\bar{N}_{12}$ care acționează asupra barei CD și $\bar{N}_{21} = -\bar{N}_{12}$ care acționează asupra barei AB.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $N = |\vec{N}_{12}| = |\vec{N}_{21}|$ atunci pentru determinarea celor șase necunoscute scalare α, N, $\bar{R}_A$, $\bar{R}_E$ dispunem de șase ecuații de echilibru (8.2).

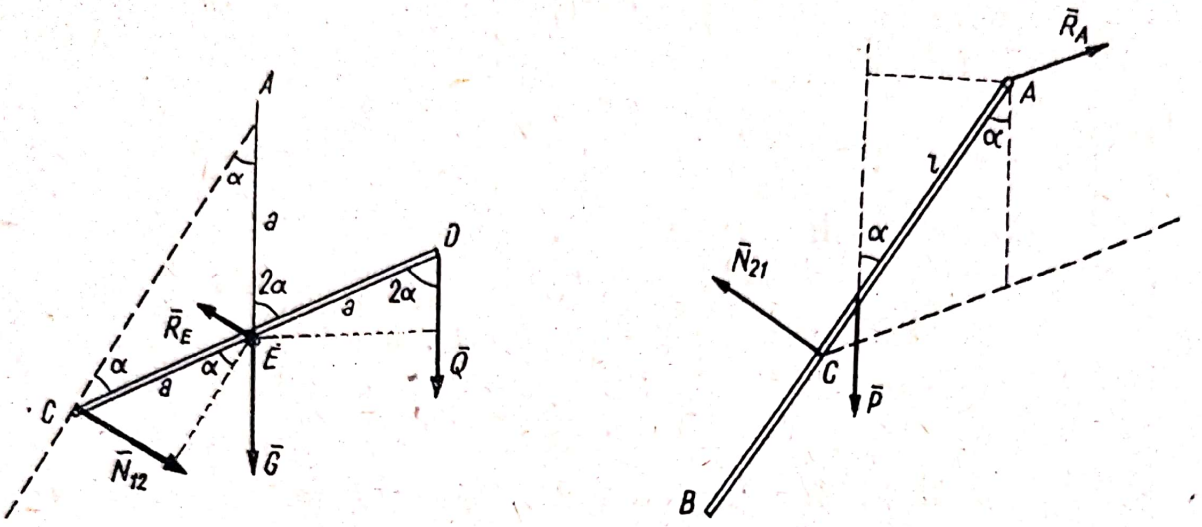


Fig. 8.3 *b*

Deoarece se cere numai unghiul α care definește poziția de echilibru a barelor, vom scrie numai ecuații de momente în raport cu articulațiile barelor pentru a elimina reacțiunile $\bar{R}_A$, $\bar{R}_E$. Obținem:

$$\text{pentru bara } CD\text{: } M_E = N\,a\cos\alpha - Q\,a\sin 2\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\text{pentru bara } AC\text{: } M_A = P\,l\sin\alpha - N\cdot 2\,a\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

deoarece $AC = 2\,a\cos\alpha$. Eliminîndu-l pe N între ecuațiile (1) și (2) obținem ecuația:

$$P\,l\sin\alpha - 2Q\,a\sin 2\alpha = 0$$

care are soluțiile:

$$\alpha = 0 \qquad \cos\alpha = \frac{Pl}{4\,Qa}.$$

8.4. Două bare omogene identice de lungime $2l$ și greutate P fiecare sînt articulate în O și se reazemă fără frecare pe marginea unei mese de lățime $2a$. Să se determine poziția de echilibru a sistemului și reacțiunile din punctele de rezemare A și B.

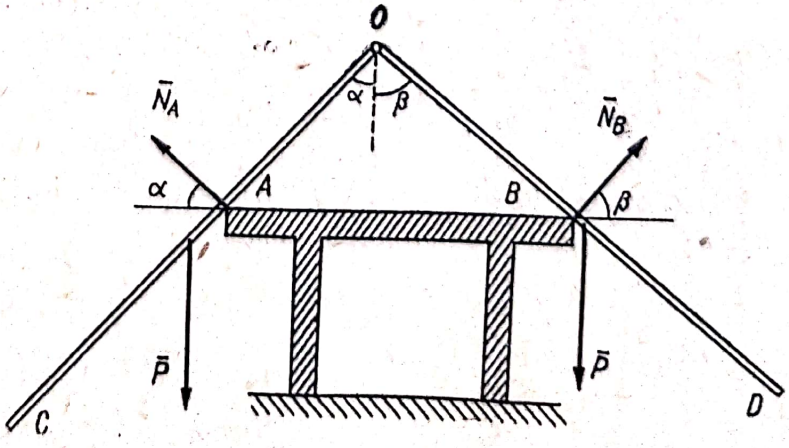


Fig. 8.4 *a*

Rezolvare. Dacă aplicăm teorema solidificării dispunem de trei ecuații pentru determinarea a patru necunoscute, unghiurile α și β care definesc poziția de echilibru a barelor și reacțiu-

nile N_A și N_B din punctele de rezemare. O a patra ecuație se poate obține numai prin izolarea barelor, de exemplu, putem izola bara OC și scrie ecuația de moment în raport cu articulația O (ecuație care elimină reacțiunea necunoscută $\bar{R}_0$ din articulația O). Pentru întregul sistem ecuațiile de echilibru (8.2) sînt:

$$X = -N_A \cos\alpha + N_B \cos\beta = 0 \tag{1}$$

$$Y = -2P + N_A \sin\alpha + N_B \sin\beta = 0 \tag{2}$$

$$M_0 = P\,l \sin\alpha - P\,l \sin\beta - \frac{N_A 2a \cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} + \frac{N_B 2a \cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = 0 \tag{3}$$

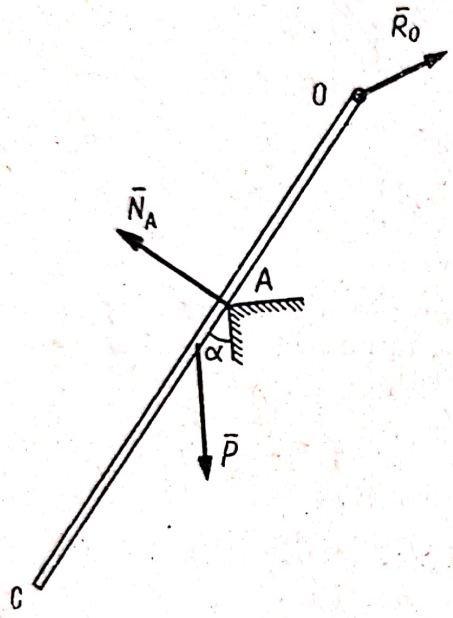


Fig. 8.4 *b*

deoarece aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul OAB avem:

$$\frac{OA}{\cos\beta} = \frac{OB}{\cos\alpha} = \frac{2a}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Pentru bara OC (fig. 8.4 *b*) avem:

$$M_0 = P\,l \sin\alpha - \frac{N_A 2a \cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = 0. \tag{4}$$

Din ecuațiile (3) și (4) obținem:

$$N_A = \frac{Pl \sin(\alpha+\beta) \sin\alpha}{2a \cos\beta}$$

$$N_B = \frac{Pl \sin(\alpha+\beta) \sin\beta}{2a \cos\alpha} \tag{5}$$

și înlocuind în ecuațiile (1) și (2) $0 < \alpha + \beta < \pi$ rezultă:

$$\sin\alpha \cos^2\alpha = \sin\beta \cos^2\beta \tag{6}$$

$$\sin(\alpha+\beta)\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\beta} + \frac{\sin^2\beta}{\cos\alpha}\right) = \frac{4a}{l}. \tag{7}$$

Ținînd seama de ecuația (6) care se poate scrie și sub forma:

$$(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin^2\alpha + \sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta - 1) = 0 \tag{6'}$$

ecuația (7) devine:

$$\sin^3\alpha + 2\sin^{3/2}\alpha \sin^{3/2}\beta + \sin^3\beta = \frac{4a}{l}. \tag{7'}$$

Din ecuațiile (6') și (7') ținînd seama că unghiurile α și β sînt ascuțite obținem:

$$\sin\alpha = \sin\beta \quad \text{sau} \quad \sin\alpha = \frac{-\sin\beta + \sqrt{4 - 3\sin^2\beta}}{2} \tag{6''}$$

și

$$\sin^{3/2}\alpha + \sin^{3/2}\beta = 2\sqrt{\frac{a}{l}}. \tag{7''}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci există o poziție de echilibru simetrică:

$$\alpha = \beta$$

în care caz din (7''):

$$\sin \alpha = \sin \beta = \sqrt[3]{\frac{a}{l}} \quad (\text{dacă } a \leqslant l)$$

iar din (5):

$$N_A = N_B = P \sqrt[3]{\frac{l}{a}}$$

și există și poziții de echilibru nesimetrice date de soluțiile ecuației trigonometrice:

$$\left[\frac{-\sin\beta + \sqrt{4 - 3\sin^2\beta}}{2}\right]^{3/2} + \sin^{3/2}\beta = 2\sqrt{\frac{a}{l}}\,.$$

8.5. O scară alcătuită din două bare omogene de greutate P și lungime $2l$ articulate între ele se reazemă cu frecare pe sol. Știind că unghiul de frecare dintre bare și sol este φ pentru ce valori ale unghiului α este posibil echilibrul (fig. 8.5 *a*).

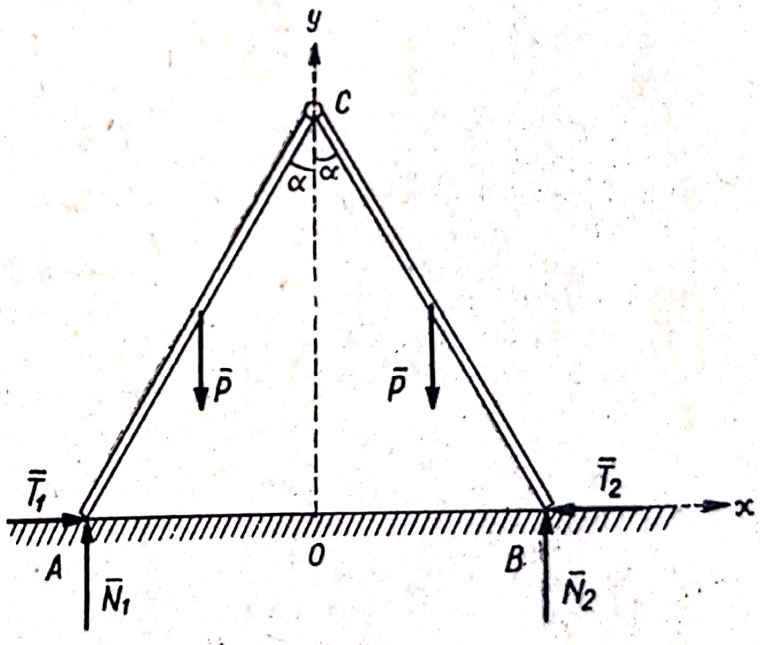


Fig. 8.5 *a*

Rezolvare. Pentru determinarea celor cinci necunoscute ale problemei α, N_1, N_2, T_1, T_2 aplicînd teorema solidificării putem scrie trei ecuații de echilibru (8.2) și două inecuații (7.1) pentru ca scara să nu lunece:

$$X = T_1 - T_2 = 0 \quad (1)$$

$$Y = N_1 + N_2 - 2P = 0 \quad (2)$$

$$M_0 = -2N_1 l \sin\alpha + P l \sin\alpha - P l \sin\alpha + 2N_2 l \sin\alpha = 0 \quad (3)$$

$$T_1 \leqslant N_1 \operatorname{tg}\varphi \quad (4)$$

$$T_2 \leqslant N_2 \operatorname{tg}\varphi. \quad (5)$$

Din ecuațiile (1)...(3) rezultă:

$$N_1 = N_2 = P \qquad T_1 = T_2$$

deci inegalitățile (4) și (5) se reduc la o singură inegalitate:

$$T_1 \leqslant P \operatorname{tg}\varphi \quad (6)$$

Scanned with OKEN Scanner

așa încît mai avem nevoie de încă o ecuație suplimentară. Izolînd bara CA (fig. 8.5 *b*) și scriind ecuația de momente în raport cu punctul C obținem:

$$M_C = 2\ T_1\ l \cos\alpha - P\ l \sin\alpha = 0 \qquad (7)$$

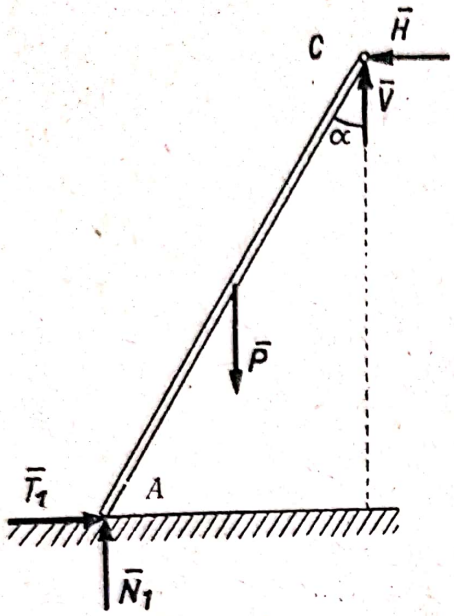


Fig. 8.5 *b*

de unde:

$$T_1 = \frac{P \operatorname{tg}\alpha}{2}$$

și înlocuind în (6) pentru echilibru va trebui ca:

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant 2 \operatorname{tg}\varphi.$$

Putem determina și componentele H și V ale reacțiunii din articulația C. Scriind ecuațiile de proiecții rezultă:

$$H = T_1 = \frac{P \operatorname{tg}\alpha}{2} \qquad V = P - N_1 = 0.$$

Reacțiunea din C trebuie să fie orizontală pentru că există simetrie mecanică.

8.6. Se dă sistemul din figura 8.6 *a* alcătuit din barele AB, CD, DE și DF fixate prin articulații în punctele A, C, D, E și F și din cursorul E care lunecă fără frecare în ghidajul G. Dîndu-se forțele P și Q și elementele geometrice a, b, α și β să se determine cuplul M care menține în echilibru sistemul în poziția din figura 8.6 *a*. Greutatea proprie a barelor este neglijabilă.

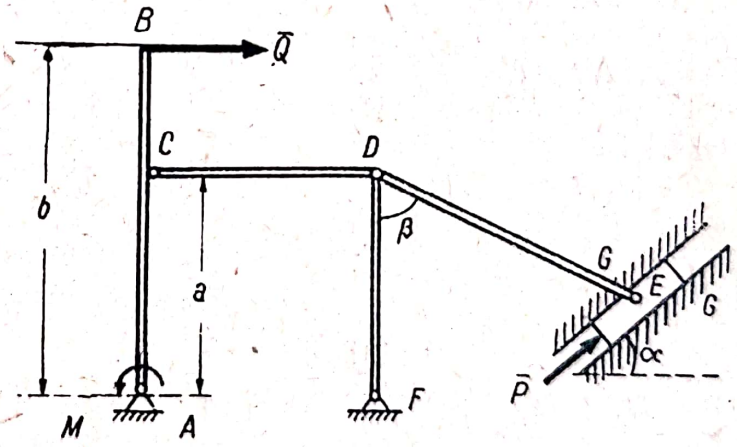


Fig. 8.6 *a*

Rezolvare. Izolînd corpurile din sistem, barele CD, DE și DF sînt acționate numai de reacțiunile din articulațiile de la capetele barei respective. Ca aceste forțe să se echilibreze, ele trebuie să fie egale și direct opuse, avînd același suport, direcția barei (fig. 8.6 *b*). Deci aceste bare sînt fie întinse, fie comprimate. Vom presupune în cele ce urmează că barele sînt întinse. Izolînd cursorul E (fig. 8.6 *c*) și scriind ecuația de proiecții pe axa Ox:

$$X = P - S_{DE} \sin(\beta - \alpha) = 0$$

eliminăm reacțiunea normală N și determinăm tensiunea din bara DE:

$$S_{DE} = \frac{P}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Izolînd articulația D (fig. 8.6 *d*) din ecuațiile de proiecții:

$$X = S_{CD} - S_{DE} \sin \beta = 0$$
$$Y = S_{DF} + S_{DE} \cos \beta = 0$$

rezultă:

$$S_{CD} = \frac{P \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)} \qquad S_{DF} = -\frac{P \cos \beta}{\sin (\beta - \alpha)}.$$

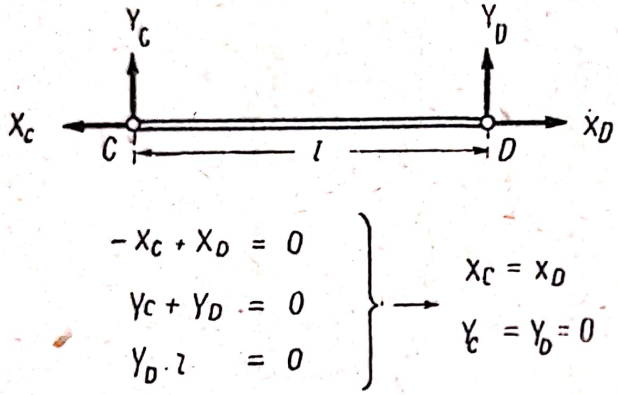


Fig. 8.6 *b*

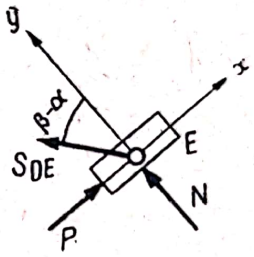


Fig. 8.6 *c*

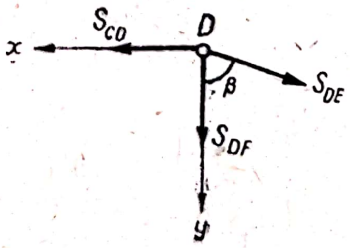


Fig. 8.6 *d*

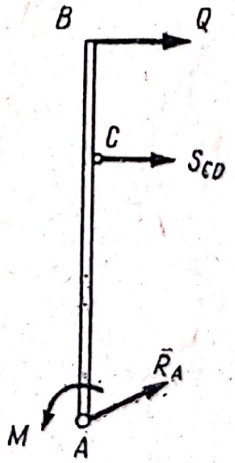


Fig. 8.6 *e*

În sfîrșit izolînd bara AB (fig. 8.6 *e*) din ecuația de moment față de articulația A care elimină reacțiunea din articulație:

$$M_A = M' - S_{CD}\, a - Q\, b = 0$$

rezultă:

$$M = \frac{P\, a \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)} + Qb.$$

8.7. Să se determine poziția de echilibru a sistemului din figura 8.7 *a* alcătuit dintr-o sferă omogenă de rază r și greutate P fixată de punctul O printr-un fir OA de lungime a, care se reazemă fără frecare pe o bară omogenă OB de lungime $2b$ și greutate Q articulată în capătul O.

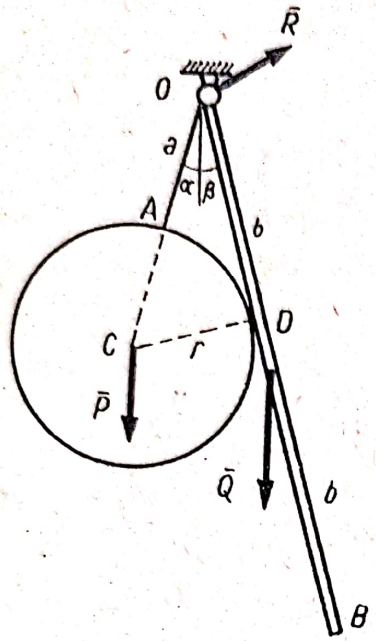


Fig. 8.7 *a*

Rezolvare. Izolînd sfera, asupra ei acționează forțele P, N (reacțiunea barei) normală la sferă și T tensiunea din fir

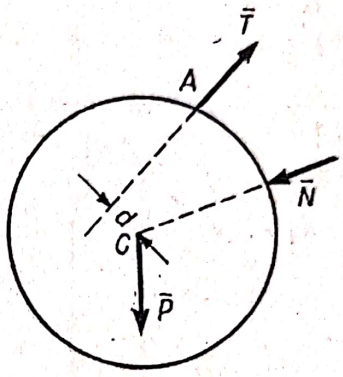


Fig. 8.7 *b*

(fig. 8.7 *b*). Scriind o ecuație de momente în raport cu centrul C al sferei:

$$M_C = Td = 0$$

rezultă că suportul forței T trece prin punctul C, adică punctele O, A și C sînt coliniare. Pentru determinarea poziției de echilibru a sistemului trebuie să determinăm unghiurile α și β (fig. 8.7 *a*). Din triunghiul dreptunghic OCD avem:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{r}{a + r}. \tag{1}$$

O a doua relație putem obține aplicînd teorema solidificării, printr-o ecuație de momente în raport cu punctul O se elimină reacțiunea R:

$$M_0 = P(a+r)\sin\alpha - Q\,b\sin\beta = 0$$

adică:

$$\sin\alpha = \frac{Qb}{P(a+r)}\sin\beta. \tag{2}$$

Ținînd seama de ecuația (2) ecuația (1) devine:

$$\frac{Qb}{P(a+r)}\sin\beta\cos\beta + \sin\beta\sqrt{1 - \frac{Q^2b^2\sin^2\beta}{P^2(a+r)^2}} = \frac{r}{a+r}.$$

Aducînd la același numitor și ridicînd la pătrat obținem:

$$P^2(a+r)^2\sin^2\beta - Q^2b^2\sin^4\beta = P^2r^2 + Q^2b^2\sin^2\beta\cos^2\beta - 2P\,Q\,r\,b\sin\beta\cos\beta$$

Scanned with OKEN Scanner

sau:

$$P^2r^2 - P^2(a + r)^2\sin^2\beta + Q^2b^2\sin^2\beta - 2P\,Q\,r\,b\,\sin\beta\cos\beta = 0.$$

Împărțind cu $\sin^2\beta$ rezultă:

$$P^2r^2\operatorname{ctg}^2\beta - 2\,P\,Q\,r\,b\,\operatorname{ctg}\beta + Q^2b^2 - P^2\,a(a+2r) = 0$$

de unde:

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{Qb}{Pr} \pm \frac{\sqrt{a\,(a + 2r)}}{r}.$$

Cum

$$\operatorname{ctg}\,(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{a\,(a + 2r)}}{r} \text{ și } \beta < \alpha + \beta$$

$$\operatorname{ctg}\,\beta = \frac{Qb}{Pr} + \frac{\sqrt{a\,(a + 2r)}}{r}.$$

Analog se obține:

$$\operatorname{ctg}\,\alpha = \frac{P\,(a + r)^2}{Qbr} + \frac{\sqrt{a\,(a + 2r)}}{r}.$$

8.8. Pe o masă orizontală este așezat un cilindru de diametru a și greutate Q. În cilindru se introduce o bară omogenă de lungime $2l$ și greutate P. Să se studieze în ce condiții este posibil echilibrul sistemului. Se neglijează grosimea pereților cilindrului.

Rezolvare. Notînd cu α unghiul dintre bară și orizontală în poziția de echilibru va trebui ca cilindrul să nu se răstoarne, adică suportul rezultantei forțelor efectiv aplicate $\bar{P}$ și $\bar{Q}$ care este identic cu suportul reacțiunii normale $\bar{N}$, să fie în interiorul cilindrului. Analitic condiția este:

$$0 < x < a. \qquad (1)$$

Aplicînd teorema solidificării ecuațiile (8.2) devin:

$$X = N - P - Q = 0$$

$$M_0 = Q\frac{a}{2} - P\,(l\cos\alpha - a) - Nx = 0$$

de unde:

$$x = \frac{Q\frac{a}{2} - P\,(l\cos\alpha - a)}{P + Q}. \qquad (2)$$

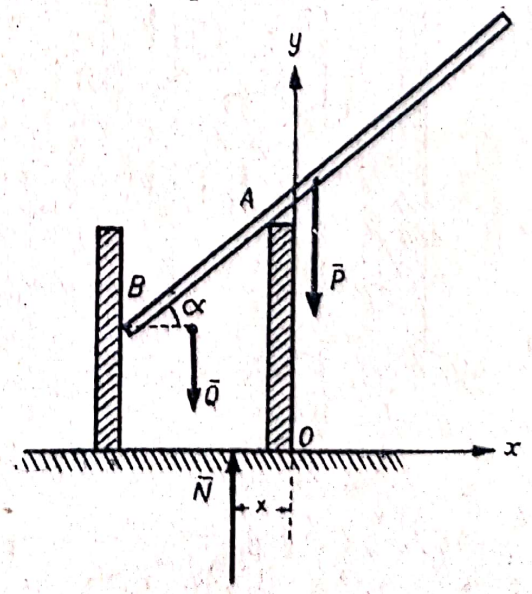


Fig. 8.8 *a*

Scanned with OKEN Scanner

Din condiția (1) rezultă:

$$P < \frac{Qa}{2\,(l\cos\alpha - a)}.$$

Pentru determinarea unghiului α izolăm bara (fig. 8.8 *b*). Ecuațiile de echilibru sînt:

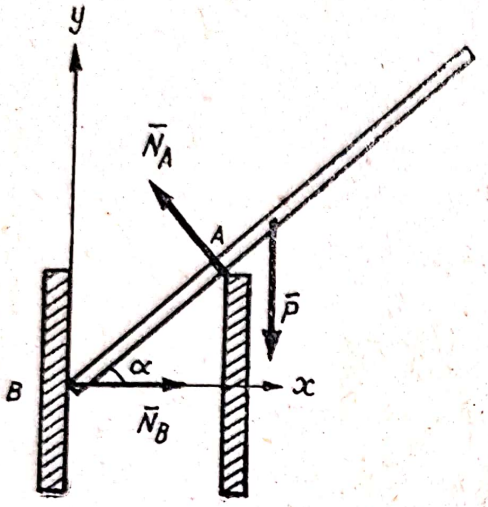


Fig. 8.8 *b*

$$X = N_B - N_A \sin\alpha = 0$$

$$Y = -P + N_A \cos\alpha = 0$$

$$M_B = N_A \frac{a}{\cos\alpha} - P\,l\cos\alpha = 0$$

identice cu cele din problema (6.3). Rezultă:

$$\cos\alpha = \left(\frac{a}{l}\right)^{1/3}.$$

Deci pentru echilibru:

$$a < l$$

și:

$$P < \frac{Qal^{1/3}}{2\,(la^{1/3} - al^{1/3})}.$$

8.9. Două sfere omogene identice de rază r, fiecare avînd greutatea P sînt așezate în interiorul unui cilindru drept de rază R deschis la ambele

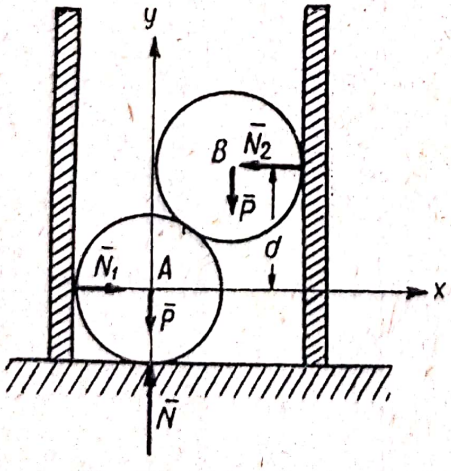


Fig. 8.9 *a*

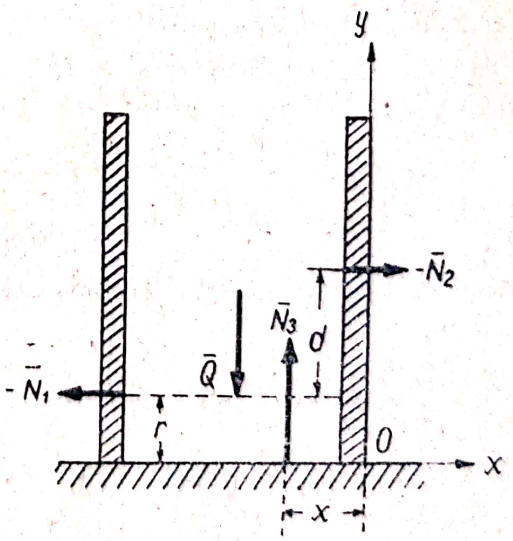


Fig. 8.9 *b*

capete care stă pe o masă orizontală lucie ($r < R < 2r$). Să se determine greutatea Q a cilindrului necesară pentru ca el să nu se răstoarne. Se neglijează grosimea pereților.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Ca cilindrul să nu se răstoarne va trebui ca suportul reacțiunii N_3 dintre cilindru și plan să fie în interiorul cilindrului adică:

$$0 < x < 2R \tag{1}$$

(v. problema 8.8).

Trebuie să izolăm corpurile deoarece aplicînd teorema soldificării dispunem de prea puține ecuații. Izolînd cele două sfere (fig. 8.9 *a*) obținem următoarele ecuații de echilibru:

$$X = N_1 - N_2 = 0$$

$$Y = N - 2P = 0$$

$$M_A = N_2 d - P \cdot 2(R - r) = 0$$

unde:

$$d = 2\sqrt{r^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{R(2r - R)}\,.$$

Scriind ecuațiile de echilibru pentru cilindru (fig. 8.9 *b*) rezultă:

$$X = N_2 - N_1 = 0$$

$$Y = N_3 - Q = 0$$

$$M_0 = Q \cdot R + N_1 r - N_2 (d+r) - N_3 x = 0$$

deci:

$$N = 2P \qquad N_3 = Q \qquad N_1 = N_2 = \frac{P(R-r)}{\sqrt{R(2r-R)}}$$

$$x = \frac{Q \cdot R - 2P(R-r)}{Q}\,.$$

Din condiția (1) rezultă:

$$Q > 2P\frac{R-r}{R}\,.$$

8.10. Două sfere metalice identice sînt suspendate de punctul fix O_3 prin două fire identice și susțin o a treia sferă de aceeași greutate G ca și primele. Să se afle relația dintre unghiurile α și β pentru poziția de echilibru.

Rezolvare. Vom izola fiecare sferă în parte.

Sfera mai mică (fig. 8.10 *a*):

$$X = N_A \sin\beta - N_B \sin\beta = 0$$

$$Y = N_A \cos\beta + N_B \cos\beta - G = 0.$$

$N_A = N_B$. (Această egalitate apărea evidentă din cauza simetriei față de axa Oy.)

$$N_A = \frac{G}{2\cos\beta}\,. \tag{1}$$

Sfera mare (fig. 8.10 *b*):

Simetria față de axa OO_3 conduce la concluzia că este indiferent dacă ne ocupăm de sfera din dreapta sau de cea din stînga, forțele acționînd similar:

$$X = N_A \sin(\beta - \alpha) - G \sin\alpha = 0 \quad (2)$$

$$Y = T - N_A \cos(\beta - \alpha) - G\cos\alpha = 0.$$

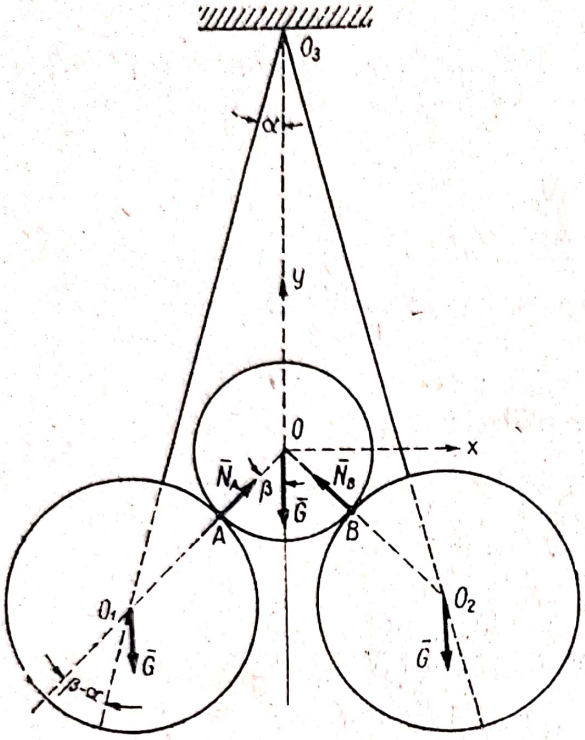


Fig. 8.10 *a*

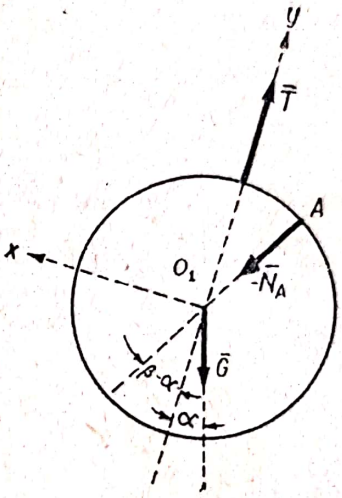


Fig. 8.10 *b*

Ecuația de momente în raport cu O_1 arată că direcția firului trece prin O_1. Înlocuind (1) în (2) rezultă:

$$\operatorname{tg}\beta = 3\ \operatorname{tg}\alpha. \quad (3)$$

Dacă se dau razele R și r ale sferei mari și mici și lungimea $l = O_3A$ a firelor, aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul O_3OO_1:

$$\frac{R+r}{\sin\alpha} = \frac{l+R}{\sin\beta}, \quad (4)$$

din ecuațiile (3) și (4) putem determina unghiurile α și β.

8.11. Se consideră sistemul din figura 8.11 *a* alcătuit din trei sfere identice de raze r și greutate P, legate cu un fir, sferele fiind așezate pe un plan orizontal. Cunoscînd unghiul $\alpha < \frac{\pi}{3}$ și neglijînd frecările dintre sfere și dintre sfere și plan, se cere tensiunea din fir.

Rezolvare. Aplicînd teorema solidificării (fig. 8.11 *a*) ecuațiile de echilibru sînt:

$$Y = N_1 + N_2 - 3P = 0$$

$$M_0 = -N_1 \cdot 2\ r\cos\alpha + N_2 \cdot 2\ r\cos\alpha = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

deci:

$$N_1 = N_2 = \frac{3P}{2}. \qquad (1)$$

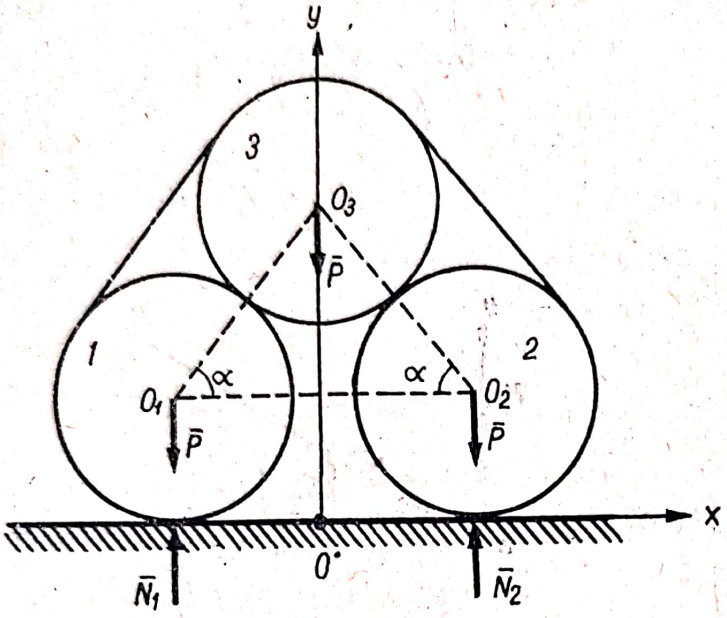


Fig. 8.11 *a*

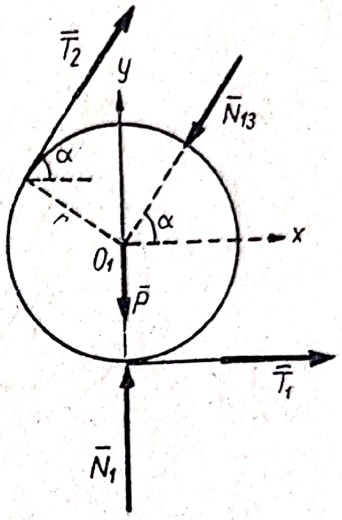


Fig. 8.11 *b*

Izolînd una dintre sferele inferioare (fig. 8.11 *b*) și notînd cu T_1 și T_2 tensiunile din fir și cu N_{13} reacțiunea dintre sfere, ecuațiile (8.2) sînt:

$$X = T_1 + T_2 \cos\alpha - N_{13} \cos\alpha = 0$$

$$Y = N_1 - P + T_2 \sin\alpha - N_{13} \sin\alpha = 0$$

$$M_{01} = T_1 r - T_2 r = 0.$$

Ținînd seama de (1) obținem:

$$T_1 = T_2 = \frac{P}{2} \operatorname{ctg}\alpha \qquad N_{13} = \frac{1 + \cos\alpha}{2 \sin\alpha} P$$

deci tensiunea T în fir este constantă:

$$T = \frac{P}{2} \operatorname{ctg}\alpha .$$

8.12. Un cilindru gol în interior cu peretele foarte subțire este străbătut de 4 găuri identice, două cîte două diametral opuse pe diametre perpendiculare, prin care se introduc două bare perfect lucii de lungimi $2l_1$ și $2l_2$ și greutăți G_1 și G_2. Sistemul format din cilindru și cele două bare se sprijină pe un plan orizontal perfect luciu.

Să se găsească unghiul φ corespunzător poziției de echilibru cît și presiunile ce iau naștere în cele patru găuri.

Rezolvare. Se aplică metoda separării corpurilor. Ecuațiile de echilibru sînt:

Pentru bara AC_1C_2 (fig. 8.12 *b*);

$$X = N_1 \sin \varphi - N_2 \sin \varphi = 0 \tag{1}$$

$$Y = N_A - N_1 \cos \varphi - G_1 + N_2 \cos \varphi = 0 \tag{2}$$

$$M_A = -N_1 \cdot AC_1 - G_1 l_1 \cos \varphi + N_2 \cdot AC_2 = 0 \tag{3}$$

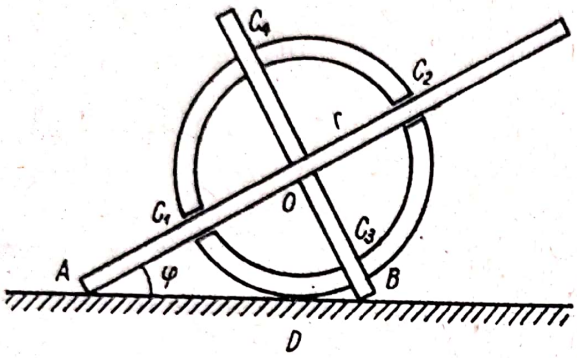


Fig. 8.12 *a*

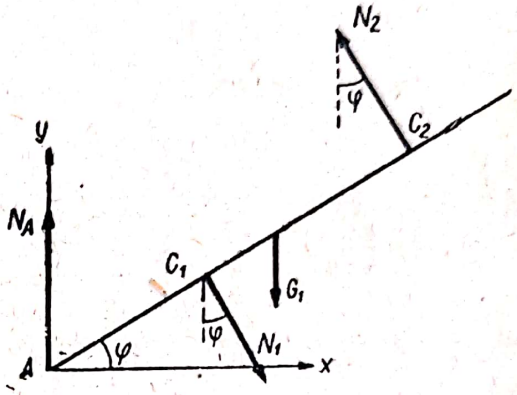


Fig. 8.12 *b*

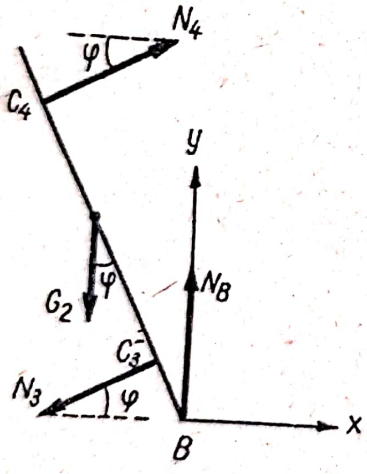


Fig. 8.12 *c*

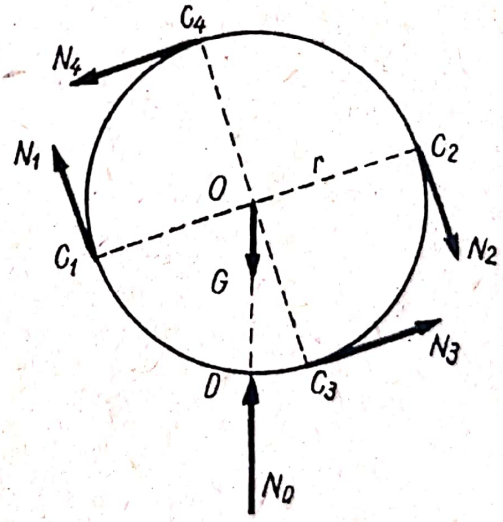


Fig. 8.12 *d*

Pentru bara $B\,C_3\,C_4$ (fig. 8.12 *c*):

$$X = -N_3 \cos \varphi + N_4 \cos \varphi = 0 \tag{4}$$

$$Y = -N_3 \sin \varphi + N_4 \sin \varphi - G_2 + N_B = 0 \tag{5}$$

$$M_B = N_3 \cdot BC_3 + G_2 l_2 \sin \varphi - N_4 \cdot BC_4 = 0. \tag{6}$$

Pentru cilindru vom scrie numai ecuația de momente în raport cu punctul O:

$$-N_1 r - N_2 r + N_3 r + N_4 r = 0, \tag{7}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd sistemul de ecuații (1)...(7) rezultă:

din (1), (4) și (7) $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N$

din (2) și (5) $N_A = G_1 \qquad N_B = G_2$

din (3) și (6) $N = \frac{G_1 l_1 \cdot \cos\varphi}{2r} = \frac{G_2 l_2 \cdot \sin\varphi}{2r}$

și deci:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{G_1 l_1}{G_2 l_2}$$

iar:

$$N = \frac{G_1 G_2 l_1 l_2}{2r\sqrt{G_1^2 l_1^2 + G_2^2 l_2^2}}.$$

8.13. Bara omogenă și grea OA de lungime $2l$ și greutate P articulată în capătul O se reazemă pe un cilindru de rază r și greutate Q așezat pe un plan orizontal. Să se determine unghiul α de înclinare al barei în poziția de echilibru, știind că unghiul de frecare al cilindrului cu bara și cu planul orizontal este φ și că efectul frecării de rostogolire este neglijabil ($s \approx 0$).

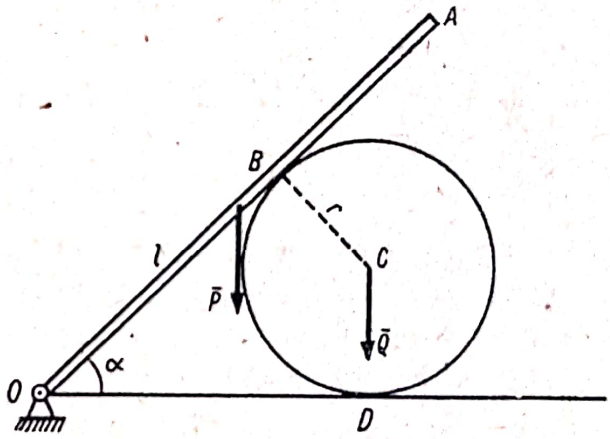


Fig. 8.13 *a*

Rezolvare. Trebuie să izolăm corpurile deoarece aplicînd teorema solidificării dispunem de prea puține ecuații. Forțele de interacțiune dintre corpuri vor avea o componentă normală $\bar{N}_{12}$ respectiv $\bar{N}_{21}$ și o componentă tangențială $\bar{T}_{12}$ respectiv $\bar{T}_{21}$ (forța de frecare).

Pentru bara OA (fig. 8.13 *b*) scriem o ecuație de momente în raport cu articulația O pentru a elimina reacțiunea $\bar{R}$ din articulație:

$$M_0 = N_{12}\, r \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - P\, l \cos\alpha = 0. \tag{1}$$

Pentru cilindru (fig. 8.13 *c*) ecuațiile de echilibru sînt:

$$X = -T - T_{12}\cos\alpha + N_{12}\sin\alpha = 0 \tag{2}$$

$$Y = N - Q - N_{12}\cos\alpha - T_{12}\sin\alpha = 0 \tag{3}$$

$$M_C = T_{12}\, r - Tr = 0. \tag{4}$$

Din ecuațiile (1)...(4) rezultă:

$$T = T_{12} = N_{12}\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \tag{5}$$

$$N = N_{12} + Q \tag{6}$$

unde:

$$N_{12} = \frac{Pl \cos \alpha}{r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Ecuația (6) se putea obține scriind o ecuație de momente în raport cu punctul O.

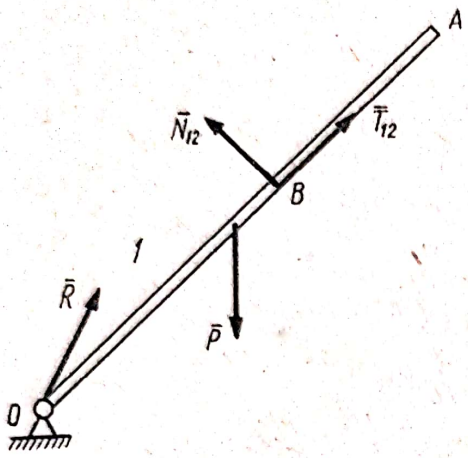


Fig. 8.13 *b*

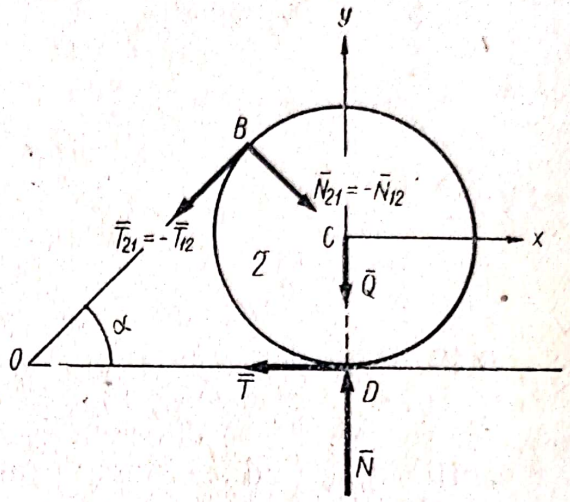


Fig. 8.13 *c*

Ca să nu apară lunecarea în punctele B și D trebuie ca:

$$T \leqslant N \operatorname{tg} \varphi \tag{7}$$

$$T_{12} \leqslant N_{12} \operatorname{tg} \varphi. \tag{8}$$

Însă din (5) și (6) avem $T = T_{12}$ și $N > N_{12}$ deci inegalitatea (8) implică inegalitatea (7) și lunecarea va apărea mai ușor în punctul B, cilindrul rostogolindu-se fără alunecare în jurul punctului D de contact cu planul orizontal.

Înlocuind (5) în (7) avem:

$$N_{12} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \leqslant N_{12} \operatorname{tg} \varphi$$

deci:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \leqslant \operatorname{tg} \varphi \quad \text{adică} \quad \alpha \leqslant 2 \varphi.$$

8.14. Un cilindru de greutate P se reazemă fără frecare pe doi semicilindri de greutate Q fiecare. Cunoscînd unghiul de frecare φ dintre semicilindri și planul orizontal să se determine pentru ce valori ale unghiului α (fig. 8.14 *a*) este posibil echilibrul.

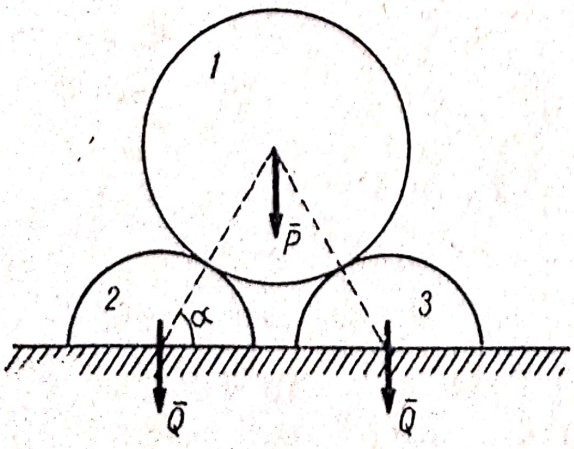


Fig. 8.14 *a*

Rezolvare. Izolînd cilindrul superior (fig. 8.14 *b*) ecuațiile de echilibru sînt:

$$X = N_{12} \cos \alpha - N_{13} \cos \alpha = 0$$

$$Y = N_{12} \sin \alpha + N_{13} \sin \alpha - P = 0$$

deci reacțiunea normală dintre cilindri este:

$$N_{12} = N_{13} = \frac{P}{2 \sin \alpha}.$$

Izolînd unul dintre semicilindri (fig. 8.14 *c*) ecuațiile de echilibru sînt:

$$X = T_2 - N_{21} \cos \alpha = 0$$

$$Y = N_2 - Q - N_{21} \sin \alpha = 0$$

unde pentru ca să nu apară alunecarea:

$$T_2 \leqslant N_2 \operatorname{tg} \varphi.$$

Efectuînd calculele obținem:

$$\operatorname{ctg} \alpha \leqslant \frac{2Q + P}{P} \operatorname{tg} \varphi$$

deci echilibrul este posibil pentru:

$$\alpha \geqslant \operatorname{arc\,ctg}\left[\frac{2Q + P}{P} \operatorname{tg} \varphi\right].$$

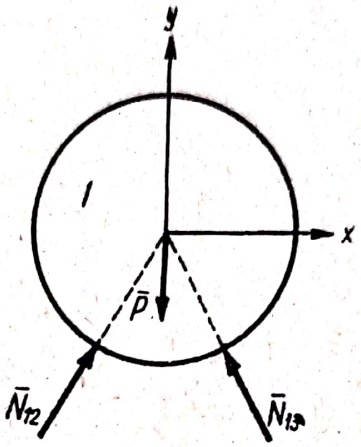


Fig. 8.14 *b*

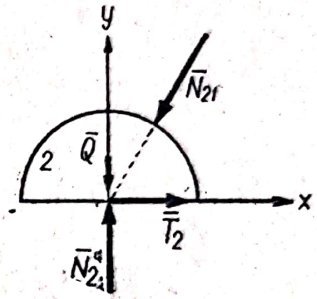


Fig. 8.14 *c*

8.15. Pe două plane înclinate sub un unghi de $\frac{\pi}{4}$ radiani se găsesc trei cuburi identice de aceeași greutate P așezate ca în figura 8.15 *a*. Cunoscînd coeficientul de frecare $f = \operatorname{tg} \varphi$ dintre cuburi și dintre cuburi și planurile înclinate să se determine forța F necesară pentru a scoate afară cubul de mijloc.

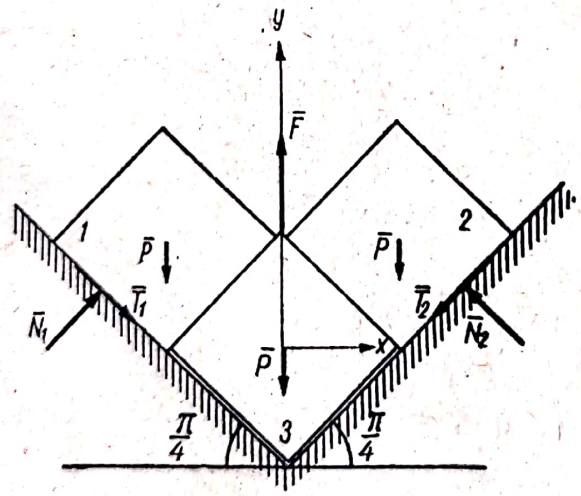


Fig. 8.15 *a*

Rezolvare. Vom rezolva problema în poziția de echilibru limită. Cubul din mijloc se desprinde de pe planele înclinate și împinge în sus cuburile laterale. Forțele care acționează sistemul în ansamblu sînt cele din figura 8.15 *a*. Scriind ecuațiile de proiecții obținem:

$$X = \frac{\sqrt{2}}{2} [N_1 + T_1 - N_2 - T_2] = 0$$

$$Y = F - 3P + \frac{\sqrt{2}}{2} [N_1 + N_2 - T_1 - T_2] = 0$$

unde deoarece sîntem în poziția de echilibru limită:

$$T_1 = f N_1 \qquad T_2 = f N_2.$$

Ecuația de momente nu aduce nimic nou în ceea ce privește mărimile reacțiunilor, ea putînd servi cel mult la determinarea suporturilor reacțiunilor normale N_1 și N_2.

Din ecuațiile de mai sus obținem:

$$N_1 = N_2 = \frac{3P - F}{\sqrt{2}\,(1 - f)}. \tag{1}$$

Trebuie deci să izolăm corpurile din sistem pentru a găsi încă o relație între forțele F și N_1. Forțele care acționează asupra fiecărui corp din sistem sînt reprezentate în figura 8.15 *b*. Reamintim că forțele interioare trebuie să respecte principiul acțiunii și al reacțiunii, adică:

$$\bar{N}_{13} = -\bar{N}_{31} \qquad \bar{N}_{23} = -\bar{N}_{32} \qquad \bar{T}_{13} = -\bar{T}_{31} \qquad \bar{T}_{23} = -\bar{T}_{32}.$$

Scriind ecuațiile de proiecții pentru corpul *1* obținem:

$$X = \frac{\sqrt{2}}{2}(N_1 + T_1 - N_{13} + T_{13}) = 0$$

$$Y = -P + \frac{\sqrt{2}}{2}(N_1 - T_1 + N_{13} + T_{13}) = 0$$

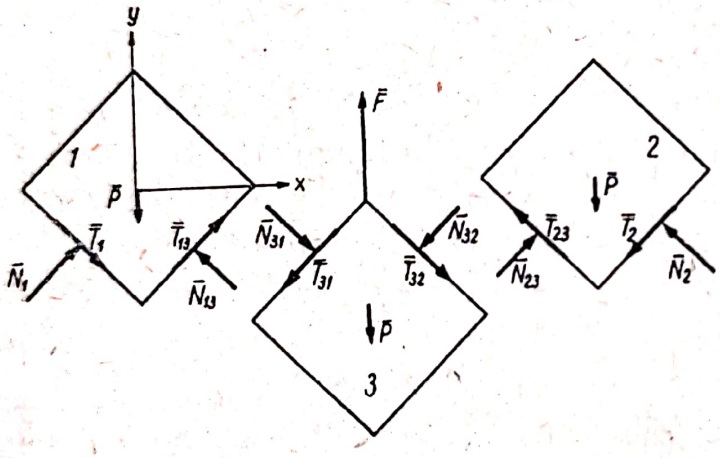


Fig. 8.15 *b*

unde:

$$T_{13} = f\,N_{13}.$$

Rezolvînd aceste ecuații obținem:

$$N_{13} = \frac{1 + f}{1 - f}\,N_1 \tag{2}$$

$$N_1 = \frac{(1 - f)\,P}{\sqrt{2}\,(1 + f^2)}. \tag{3}$$

Din ecuațiile (1) și (3) obținem:

$$F = 2P + \frac{2fP}{1 + f^2}$$

adică:

$$F = P\,(2 + \sin 2\varphi).$$

Dacă $\varphi < \frac{\pi}{4}$, $f < 1$ atunci $F < 3P$ și $N_1 > 0$, cubul din mijloc este ridicat împingînd lateral celelalte cuburi.

Dacă $\varphi > \frac{\pi}{4}$, $f > 1$ atunci $N_1 < 0$ deci cuburile laterale se desprind și pentru a ridica cele trei cuburi este necesară o forță:

$$F = 3P.$$

8.16. Două corpuri de greutăți P și Q, legate printr-un fir trecut peste un scripete, sînt așezate pe două plane înclinate față de orizontală cu unghiurile α și β, ca în figura 8.16 *a*.

Să se afle raportul P/Q pentru poziția de echilibru, cînd unghiul de frecare dintre corpuri și plane este φ. Se neglijează frecarea dintre fir și scripetele mic.

Rezolvare. Considerăm poziția limită de echilibru corespunzătoare valorii minime a raportului P/Q. Tendința de mișcare va fi, în acest caz, pentru P de a sui pe planul înclinat α, iar pentru Q de a coborî pe planul înclinat β.

Izolăm corpurile și scriem ecuațiile de echilibru. Izolînd scripetele rezultă că tensiunea în fir este constantă $|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2| = F$.

Pentru corpul P (fig. 8.16 *b*):

$$X = F - T_1 - P \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$Y = N_1 - P \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

unde:

$$T_1 = N_1 \operatorname{tg} \varphi. \quad (3)$$

Pentru corpul Q (fig. 8.16 *c*):

$$X \equiv -F - T_2 + Q \sin \beta = 0 \quad (4)$$

$$Y \equiv N_2 - Q \cos \beta = 0 \quad (5)$$

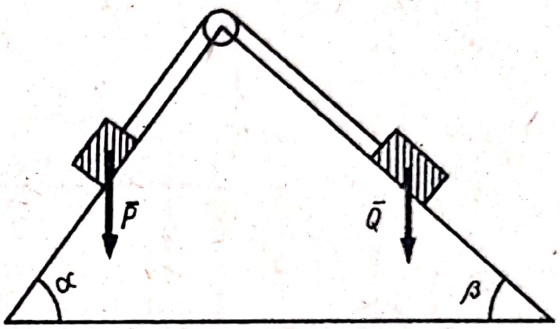


Fig. 8.16 *a*

unde:

$$T_2 = N_2 \operatorname{tg} \varphi. \quad (6)$$

Din ecuațiile (1) ... (6) rezultă:

$$N_1 = P \cos \alpha \qquad N_2 = Q \cos \beta \qquad F = P (\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi) = Q (\sin \beta - \cos \beta \operatorname{tg} \varphi)$$

de unde:

$$\left(\frac{P}{Q}\right)_{min} = \frac{\sin (\beta - \varphi)}{\sin (\alpha + \varphi)}. \quad (7)$$

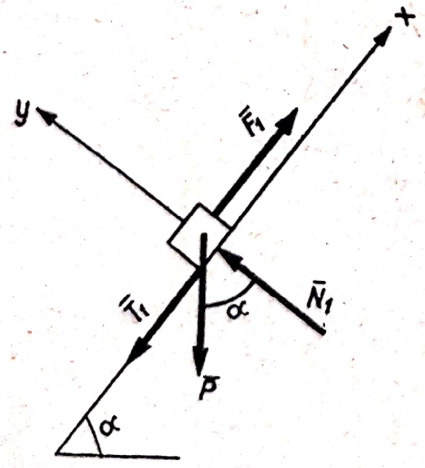


Fig. 8.16 *b*

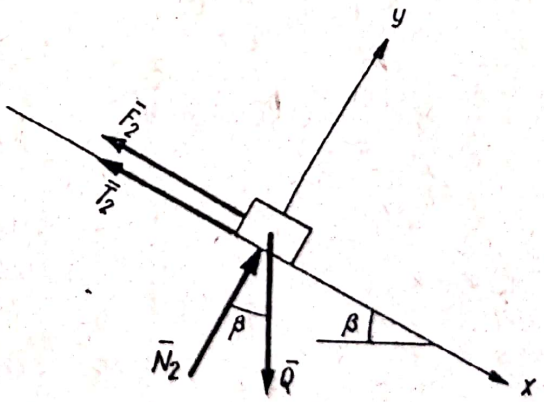


Fig. 8.16 *c*

Valoarea lui $\left(\frac{P}{Q}\right)_{max}$ se obține din (1) ... (7) schimbînd toate semnele termenilor care conțin unghiul de frecare φ (v. problema 2.14), deci:

$$\left(\frac{P}{Q}\right)_{max} = \frac{\sin (\beta + \varphi)}{\sin (\alpha - \varphi)}. \quad (8)$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare pentru echilibru:

$$\frac{\sin(\beta-\varphi)}{\sin(\alpha+\varphi)} \leqslant \frac{P}{Q} \leqslant \frac{\sin(\beta+\varphi)}{\sin(\alpha-\varphi)}.$$

8.17. Pe o sanie de greutate $\bar{P}$ se află un corp de greutate $\bar{Q}$. Corpul este împins cu o forță orizontală $\bar{F}$. Cunoscînd coeficienții de frecare f_1,

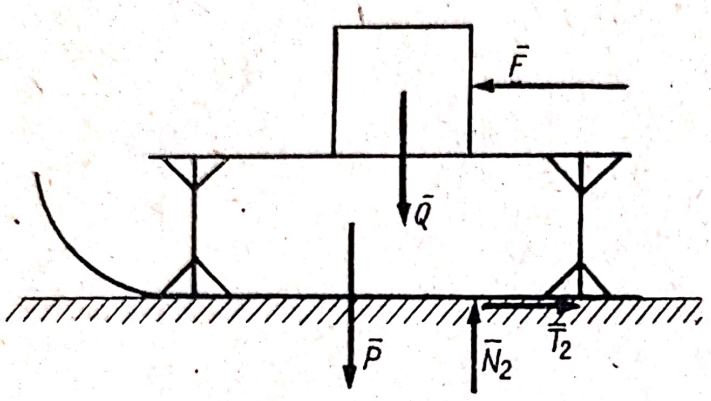


Fig. 8.17 *a*

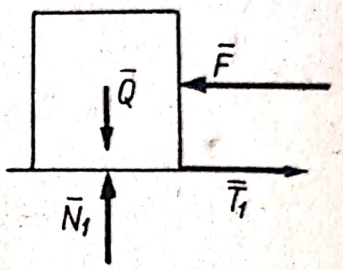


Fig. 8.17 *b*

între corp și sanie, și f_2, între sanie și planul orizontal, să se stabilească condiția ca sania să alunece pe planul orizontal, corpul rămînînd însă în repaus față de sanie.

Rezolvare. Izolăm corpul de greutate Q (fig. 8.17 *b*) și scriem ecuațiile de echilibru (8.2) și (7.1):

$$N_1 - Q = 0 \tag{1}$$

$$T_1 - F = 0 \tag{2}$$

$$T_1 \leqslant f_1 N_1 \tag{3}$$

deoarece corpul nu lunecă pe sanie. Rezolvînd sistemul (1) ... (3) rezultă:

$$f_1 \geqslant \frac{F}{Q}. \tag{4}$$

Aplicînd teorema solidificării (fig. 8.17 *a*) în poziția limită cînd sania începe să lunece obținem:

$$N_2 - P - Q = 0 \tag{5}$$

$$F - T_2 = 0 \tag{6}$$

$$T_2 = f_2 N_2 \tag{7}$$

deci în poziția limită:

$$f_2 = \frac{F}{P+Q}. \tag{8}$$

Deci ca sania să lunece fără ca corpul așezat pe sanie să se deplaseze în raport cu sania, comparînd (7) și (8), trebuie ca:

$$f_2 \leqslant \frac{f_1 Q}{P+Q} \tag{9}$$

și

$$f_2 (P+Q) = F \leqslant f_1 Q.$$

Dacă $f_2 > \frac{f_1 Q}{P+Q}$ atunci corpul poate luneca în raport cu sania fără ca sania să lunece.

8.18. În figura 8.18 sînt reprezentate roțile motoare și cele trase ale unui vehicul care urcă pe o pantă avînd unghiul de înclinare α și coeficienții de frecare f la lunecare și s la rostogolire. Știind că unei roți motoare îi revine greutatea G_1 iar unei roți trase greutatea G_2 și că raza roților este r, să se determine momentul M al cuplului motor care se aplică unei roți motoare.

Rezolvare. Izolînd roțile, asupra roții motoare *1*, acționează greutatea $\bar{G}_1$, cuplul motor $\bar{M}$, reacțiunea normală $\bar{N}_1$ a planului, forța de frecare $\bar{T}_1$ care are sensul mișcării și se opune patinării roții motoare, cuplul frecării de rostogolire M_1, și forța de tracțiune $\bar{F}_{12}$ care pentru întregul sistem este forță interioară. Asupra roții trase *2* acționează greutatea $\bar{G}_2$, reacțiunea normală N_2, forța de frecare $\bar{T}_2$ care se opune lunecării roții, cuplul frecării de rostogolire M_2 și forța de tracțiune $\bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12}$. Notînd $|\bar{F}_{12}| = |\bar{F}_{21}| = F$ ecuațiile de echilibru (8.2) sînt:

pentru roata motoare:

$$X = T_1 - F - G_1 \sin\alpha = 0 \tag{1}$$

$$Y = N_1 - G_1 \cos\alpha = 0 \tag{2}$$

$$M_{01} = T_1 r + M_1 - M = 0; \tag{3}$$

pentru roata trasă:

$$X = -T_2 + F - G_2 \sin\alpha = 0 \tag{4}$$

$$Y = N_2 - G_2 \cos\alpha = 0 \tag{5}$$

$$M_{02} = -T_2 r + M_2 = 0. \tag{6}$$

Deoarece atunci cînd vehiculul înaintează roțile se rostogolesc însă nu trebuie să lunece (să patineze), avem:

$$M_1 = sN_1 \tag{7}$$

$$M_2 = sN_2 \tag{8}$$

$$T_1 \leqslant fN_1 \tag{9}$$

$$T_2 \leqslant fN_2. \tag{10}$$

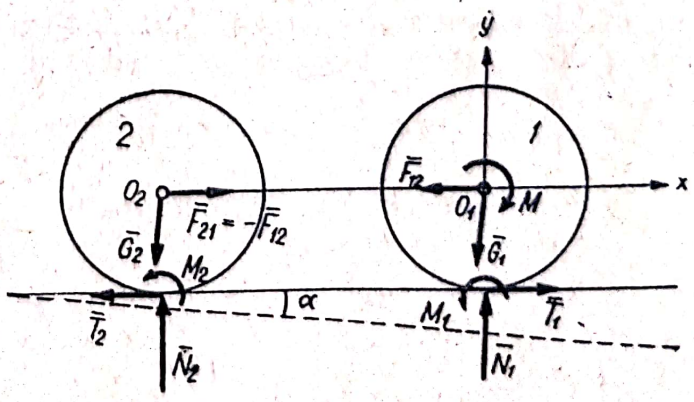


Fig. 8.18

Rezolvînd sistemul de ecuații (1) ... (8) obținem:

$$N_1 = G_1 \cos \alpha \qquad N_2 = G_2 \cos \alpha \qquad T_2 = \frac{sG_2 \cos \alpha}{r}$$

$$F = G_2 \left(\sin \alpha + \frac{s}{r} \cos \alpha \right) \qquad T_1 = (G_1 + G_2) \sin \alpha + \frac{sG_2 \cos \alpha}{r} .$$

iar momentul cuplului motor este:

$$M = (G_1 + G_2)(s \cos \alpha + r \sin \alpha) = G (s \cos \alpha + r \sin \alpha) \qquad (11)$$

unde $G = G_1 + G_2$ este greutatea vehiculului.

Ca roata trasă să nu alunece, din (10) obținem:

$$f \geqslant \frac{s}{r} \qquad (12)$$

iar ca roata motoare să nu patineze din (9) rezultă:

$$f \geqslant \frac{G_2}{G_1} \frac{s}{r} + \frac{G_1 + G_2}{G_2} \operatorname{tg} \alpha. \qquad (13)$$

Cum în general G_1 și G_2 sînt cam de același ordin de mărime, condiția (13) este mai greu de îndeplinit, roata motoare patinînd mai degrabă decît lunecă roata trasă. Astfel pentru $G_1 = G_2$ din (13) obținem:

$$f \geqslant \frac{s}{r} + 2 \operatorname{tg} \alpha \qquad (13')$$

inegalitate ce implică inegalitatea (12).

Dacă vehiculul înaintează pe un plan orizontal $\alpha = 0$, momentul cuplului motor este:

$$M = (G_1 + G_2)\, s = Gs$$

și vehiculul înaintează fără să patineze sau să lunece dacă:

$$f \geqslant \frac{s}{r} \text{ pentru } G_1 = G_2.$$

8.19. Ce forță F este necesară pentru a pune în mișcare o bară grea de greutate G așezată pe n role identice de greutate P și rază r, situate pe un plan orizontal (fig. 8.19 *a*). Se cunosc coeficienții de frecare la lunecare f și f' și la rostogolire s și s' dintre role și plan și bară și role.

Rezolvare. Izolînd bara (fig. 8.19 *b*) asupra ei acționează greutatea G, forța F, reacțiunile normale N_i' din partea rolelor, forțele de frecare T_i' și cuplurile frecărilor de rostogolire M_i' dintre bară și role. Scriind ecuațiile de proiecții obținem:

$$X = F - \sum_{i=1}^{n} T_i' = 0 \qquad (1)$$

$$Y = -G + \sum_{i=1}^{n} N_i' = 0 \qquad (2)$$

Izolînd o rolă (fig. 8.19 *c*), și scriind ecuațiile de echilibru obținem:

$$X = -T_i + T_i' = 0 \tag{3}$$

$$Y = N_i - P - N_i' = 0 \tag{4}$$

$$M_0 = M_i + M_i' - T_i' \cdot 2r = 0. \tag{5}$$

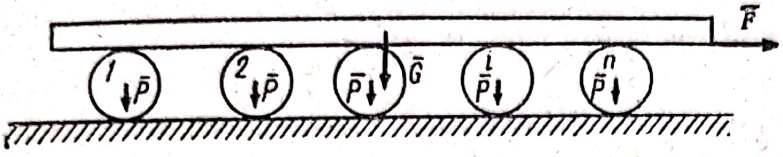


Fig. 8.19 *a*

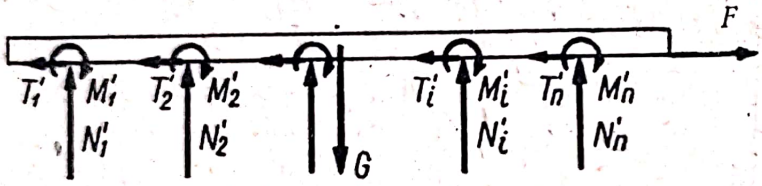


Fig. 8.19 *b*

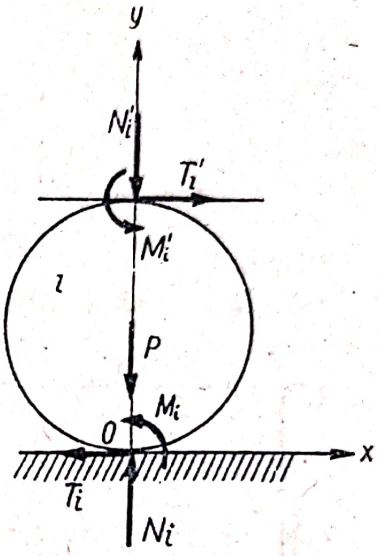


Fig. 8.19 *c*

Ca bara să nu lunece în raport cu rolele trebuie ca:

$$T_i' \leqslant f' N_i'$$

și ținînd seama de (1):

$$F \leqslant f'G = F_1. \tag{6}$$

Ca rolele să nu lunece în raport cu planul orizontal trebuie ca:

$$T_i \leqslant f N_i$$

și ținînd seama de (1) ... (4):

$$F \leqslant f(G + nP) = F_2. \tag{7}$$

Ca să nu apară rostogolirea trebuie ca:

$$M_i' \leqslant s' N_i' \qquad\qquad M_i \leqslant s N_i$$

și ținînd seama de ecuațiile (1) ... (5):

$$F \leqslant \frac{s}{2r}(G + nP) + \frac{s'}{2r} G = F_3, \tag{8}$$

Comparînd valorile F_1, F_2 și F_3 putem vedea modul în care se pune în mișcare bara. Cum în general $\frac{s + s'}{2r}$ este mult mai mic decît coeficienții f sau f' forța F care pune în mișcare bara este:

$$F = \frac{s}{2r}(G + nP) + \frac{s'}{2r} G$$

rolele rostogolindu-se pe planul orizontal. Dacă greutatea rolelor este neglijabilă în raport cu greutatea barei, atunci:

$$F = \frac{s + s'}{2r} G$$

rostogolirea apărînd dacă:

$$\frac{s + s'}{2r} \leqslant f' \quad \text{şi} \quad \frac{s + s'}{2r} \leqslant f.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

8.20. Un cadru articulat în punctele A, C, E este acţionat de forţa orizontală F (fig. 8.20). Să se determine reacţiunile din articulaţii dacă se neglijează greutatea cadrului. Se dau $AB = 2a$, $BC = CD = DE = a$.

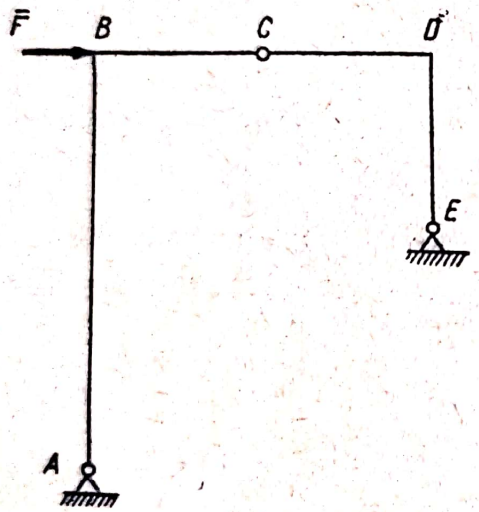


Fig. 8.20

Răspuns. $V_A = V_C = V_E = H_C = H_E = \frac{2F}{3}$, $H_A = \frac{F}{3}$.

8.21. Se dă mecanismul din figura 8.21 în care O şi O_1 sînt articulaţii fixe iar B şi C cursori. Se cere relaţia dintre forţele P şi Q pentru poziţia de echilibru din figură.

Răspuns. $Q = \frac{2ac}{bd \sin 2\alpha} P$.

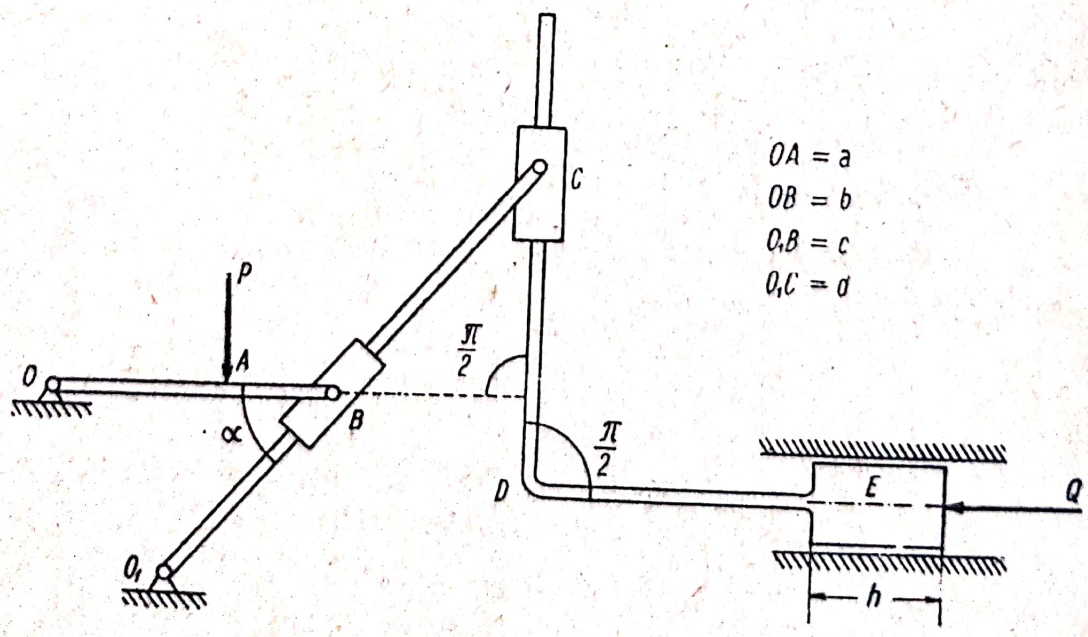


Fig. 8.21

8.22. Se dă sistemul de bare din figura 8.22 în care A, B și C sînt articulații, iar D încastrare.

Se cer reacțiunile din A, B, C și D. Bara BC este orizontală.

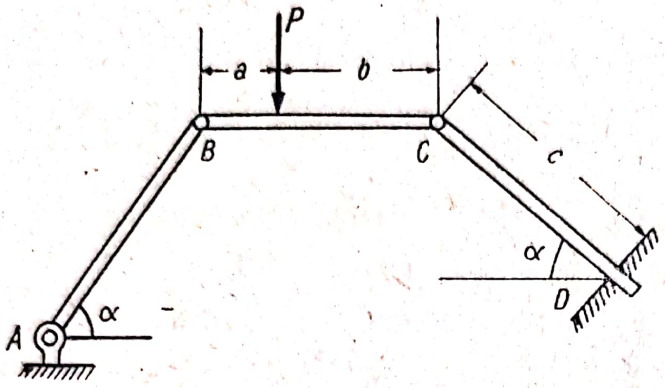


Fig. 8.22

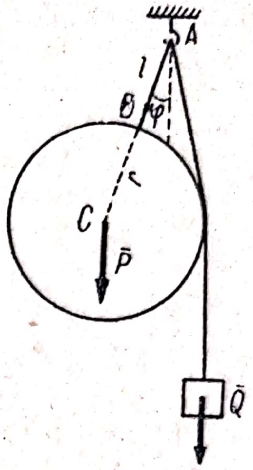


Fig. 8.23

Răspuns. $R_A = R_B = \dfrac{Pb}{(a+b)\sin\alpha}$ și are direcția barei AB,

$$V_C = V_D = \frac{Pa}{a+b}, \quad H_C = H_D = \frac{Pb\,\operatorname{ctg}\alpha}{a+b}, \quad M_D = \frac{Pc\,(b-a)\cos\alpha}{a+b}.$$

8.23. Două fire sînt prinse de un punct fix A; de unul dintre fire avînd lungimea l atîrnă o sferă omogenă de rază r și greutate P, de al doilea este suspendată o greutate Q (fig. 8.23). Să se determine unghiul φ dintre firul AB și verticală în poziția de echilibru.

Răspuns. Știind că punctele AB și C sînt coliniare (v. problema 8.7) și aplicînd teorema solidificării se obține:

$$\sin\varphi = \frac{Qr}{(P+Q)(l+r)}.$$

8.24. O bară de greutate neglijabilă și lungime l este articulată în A de fundul unui cilindru de greutate P și rază r (fig. 8.24). Să se determine greutatea Q care poate fi suspendată în E astfel încît cilindrul să nu se răstoarne, precum și reacțiunea din C.

Răspuns.

$$Q \leqslant \frac{Pr}{l\cos\alpha - 2r};$$

$$N_C = \frac{Ql\cos^2\alpha}{2r}$$

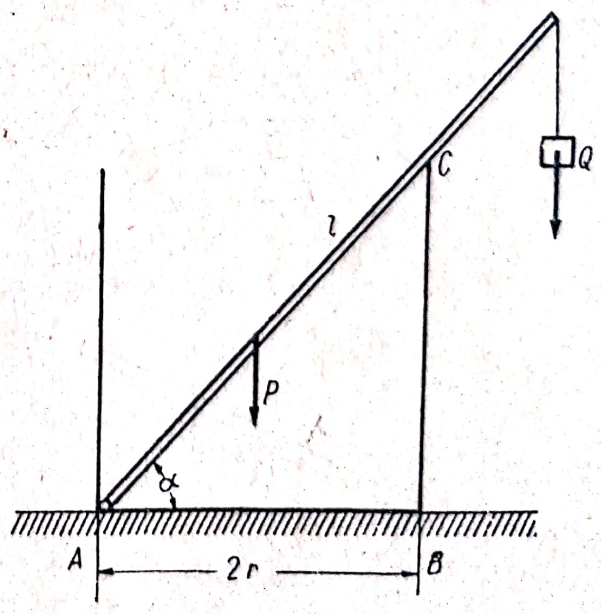


Fig. 8.24

8.25. Într-un șanț cu secțiunea dreptunghiulară sînt așezate trei sfere

identice de greutate P și rază r fiecare (fig. 8.25). Dacă se cunoaște și distanța $EF = 2a$ să se determine reacțiunile din punctele A, B, C și D.

Răspuns. $N_B = N_C = \frac{3}{2} P$; $N_A = N_D = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha}$ unde $\cos \alpha = \frac{a - r}{2r}$.

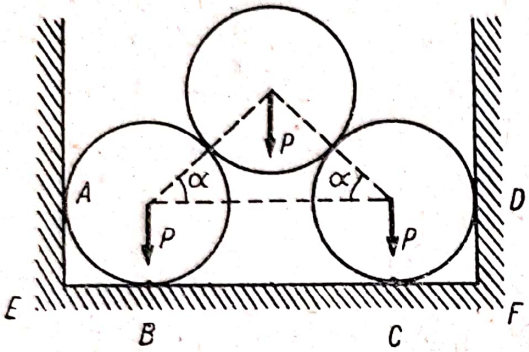


Fig. 8 25

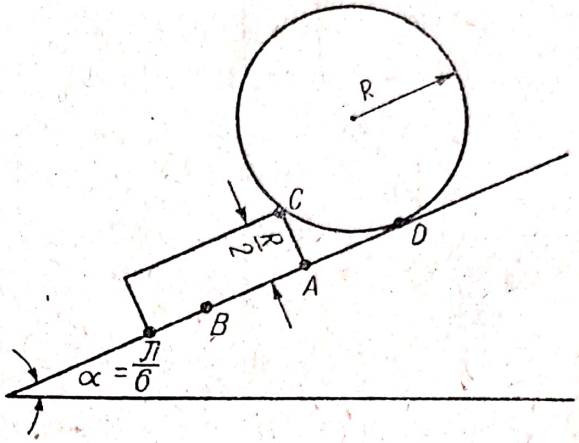


Fig. 8.26

8.26. Pe un plan înclinat sub unghiul $\alpha = \pi/6$ se găsește un cilindru de rază R și greutate P care este împiedicat să se deplaseze de un prag paralelipipedic de greutate neglijabilă și înălțime $R/2$ (fig. 8.26). Știind că frecarea dintre cilindru și prag este neglijabilă, se cere să se determine unghiul de frecare dintre prag și plan și reacțiunile dintre cilindru și prag, prag și plan și cilindru și plan.

Răspuns. $\varphi \geqslant \frac{\pi}{3}$; $N_C = N_D = \frac{P}{\sqrt{3}}$; $N_B = \frac{P}{2\sqrt{3}}$; $T_B = \frac{P}{2}$ unde poziția punctului de aplicație al reacțiunii dintre prag și plan este dat de $AB = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ lățimea pragului trebuind să fie mai mare ca $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ ca pragul să nu se răstoarne.

8.27. O bară de greutate P și lungime $2l$ este articulată în O iar în A se reazemă pe un cub de muchie a și greutate neglijabilă așezat pe un plan orizontal. Cunoscînd unghiurile de frecare φ_1 dintre cub și bară și φ_2 dintre cub și planul orizontal, pentru ce valori ale unghiului de înclinare α al barei este posibil echilibrul.

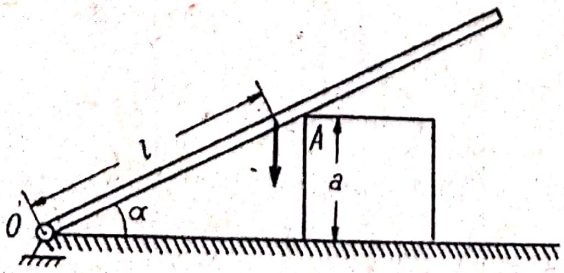


Fig. 8.27

Răspuns.

$\alpha \leqslant \varphi_1 + \varphi_2$.

Capitolul IX

SISTEME DE BARE ARTICULATE

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Se numesc sisteme de bare articulate sau grinzi cu zăbrele, sistemele indeformabile de bare rectilinii fixate între ele prin articulații. Se presupune că greutatea proprie a barelor este neglijabilă și că sarcinile exterioare se aplică numai la noduri (articulații). O consecință a acestor ipoteze este că barele grinzilor cu zăbrele sînt supuse la eforturi axiale (fig. 9. *a*) de întindere (α) sau de compresiune (β).

În cele ce urmează ne vom ocupa de metodele de rezolvare a sistemelor de bare articulate plane.

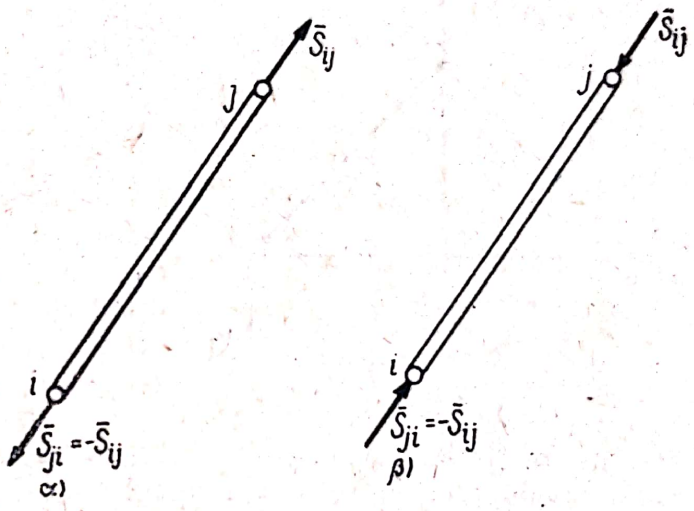


Fig. 9. *a*

Metoda izolării nodurilor. Separăm fiecare nod al sistemului introducînd forțele care acționează asupra nodului, forțe exterioare date sau de legătură și eforturi din bare și scriem ecuațiile de echilibru, ecuații de proiecții pe două axe. Obținem astfel un sistem de $2n$ ecuații (n este numărul nodurilor) cu ajutorul cărora putem determina în cazul sistemelor static determinate reacțiunile din legăturile exterioare (cel mult trei) și eforturile din cele $b = 2n - 3$ bare ale grinzii. Pentru simplificarea calculelor *vom începe cu izolarea unui nod în care avem cel mult două forțe necunoscute și apoi vom trece de la nod la nod căutînd să nu avem mai mult de două necunoscute.* Uneori pentru a putea găsi un nod cu două eforturi necunoscute este necesar să determinăm în prealabil reacțiunile din legăturile exterioare scriind ecuațiile de echilibru pentru întregul sistem considerat ca un solid rigid.

Eforturile necunoscute din bare le vom presupune eforturi de întindere care trag de nod; dacă scalarul unui efort este negativ, efortul este de compresiune.

Metoda secțiunilor servește pentru determinarea efortului dintr-o anumită bară a sistemului.

Separăm grinda în două părți astfel încît să nu fie secționate mai mult de trei bare între care să fie și bara al cărui efort vrem să-l determinăm. Cele trei bare nu trebuie să fie concurente sau paralele între ele.

Scriem apoi ecuațiile de echilibru pentru una din părțile astfel obținute. Pentru a nu determina eforturile din celelalte bare secționate putem scrie o ecuație de momente în raport cu punctul în care se întîlnesc celelalte bare sau dacă aceste bare sînt paralele scriem o ecuație de proiecție pe o direcție perpendiculară pe ele și în ecuația astfel obținută singura necunoscută este efortul pe care voim să-l determinăm.

Adesea este necesar să determinăm în prealabil forțele de legătură exterioare scriind ecuațiile de echilibru pentru întregul sistem considerat ca un solid.

Metoda grafică Cremona corespunde metodei analitice a izolării nodurilor, condiția ca sistemul de forțe care acționează într-un nod să fie în echilibru fiind ca poligonul forțelor să se închidă. Se construiește pentru fiecare nod poligonul forțelor, respectînd același sens de introducere în poligon al forțelor din nod, de exemplu sensul acelor de ceasornic. Ca și în metoda izolării nodurilor se pornește de la noduri cu numai două eforturi necunoscute și se suprapun pe aceeași epură poligoanele corespunzătoare fiecărui nod. Evident poligonul forțelor exterioare care apare pe epură trebuie să se închidă deoarece sistemul forțelor exterioare este în echilibru. Pe epură vom nota cu semnul (+) barele întinse, în care efortul trage de nod, și cu semnul (—) barele comprimate, în care efortul împinge în nod.

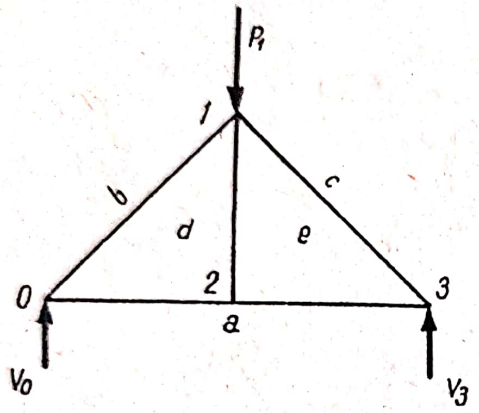


Fig. 9. *b*

Vom nota cu litere domeniile cuprinse între barele grinzii și domeniile exterioare grinzii delimitate de suportul forțelor exterioare (notația Bow). Astfel pentru grinda din figura 9. *b*, forța P_1 care separă domeniile *b* și *c* se va nota *bc*, efortul S_{23} care separă domeniile *e* și *a* se va nota *ea* etc.

Pentru mai multe detalii privind această metodă se poate consulta orice manual de mecanică sau se poate urmări cu atenție exemplul 9.7.

B. PROBLEME REZOLVATE

9.1. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 9.1 *a* prin metoda izolării nodurilor.

Rezolvare. Cum în nodul *4* avem numai două necunoscute, eforturile S_{43} și S_{42}, izolăm nodul *4* (fig. 9.1 *b*), presupunînd că barele sînt întinse (forțele S_{43} și S_{42} trag de nod). Din ecuațiile de proiecții:

$$X = S_{43} + S_{42}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$Y = S_{42}\frac{\sqrt{2}}{2} + P = 0$$

obținem $S_{42} = -P\sqrt{2}$ și $S_{43} = P$, bara *4—2* fiind comprimată și bara *4—3* întinsă.

Vom trece la nodul *3* unde avem două eforturi necunos-

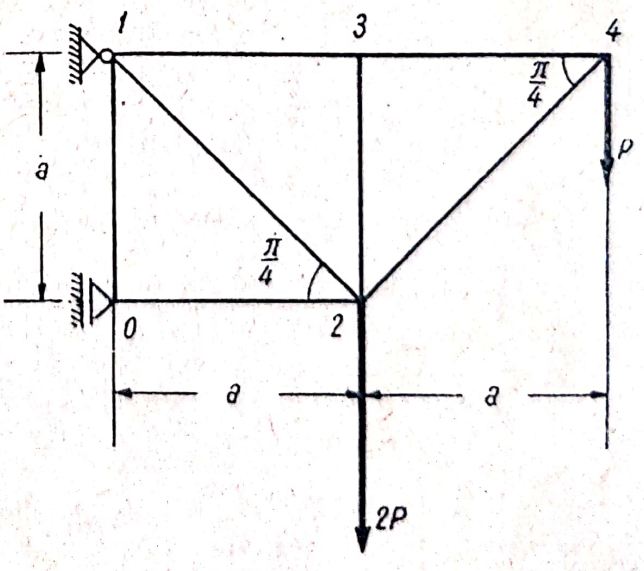


Fig. 9.1 *a*

cute S_{31} și S_{32}, efortul din bara *3—4* fiind cunoscut $S_{34} = S_{43} = P$ (bara *3—4* este întinsă, efortul trăgînd de nod, figura 9.1 *c*).

Din ecuațiile de proiecții:

$$X = P - S_{31} = 0$$

$$Y = - S_{32} = 0$$

obținem: $S_{31} = P$ (tensiune) și $S_{32} = 0$ (bara *3—2* nu este supusă la nici un efort).

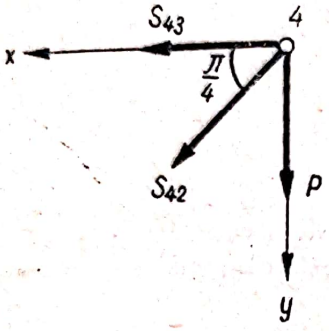


Fig. 9.1 *b*

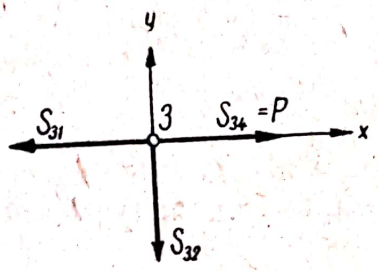


Fig. 9.1 *c*

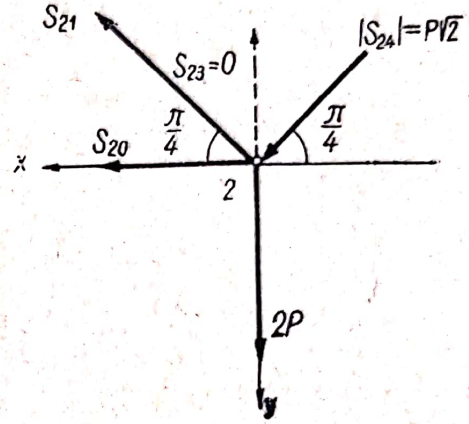


Fig. 9.1 *d*

Nodul unde avem acum două eforturi necunoscute este nodul *2*. În afară de eforturile necunoscute S_{20} și S_{21}, asupra nodului mai acționează forța exterioară $2P$, efortul de compresiune $S_{24} = S_{42}$ care împinge în nod și efortul $S_{23} = 0$ (fig. 9.1 *d*). Ecuațiile de proiecții sînt:

$$X = S_{20} + S_{21}\frac{\sqrt{2}}{2} + P\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$Y = 2P - S_{21}\frac{\sqrt{2}}{2} + P\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

de unde obținem $S_{21} = 3\sqrt{2}\,P$ (tensiune) și $S_{20} = -4P$ (compresiune). Trecem în nodul *0* unde necunoscute sînt efortul S_{01} și reacțiunea normală N_0 din reazemul *0* (fig. 9.1 *e*). Din ecuațiile de proiecții:

$$X = N_0 - 4P = 0$$

$$Y = S_{01} = 0$$

obținem $S_{01} = 0$ și $N_0 = 4P$.

În sfîrșit trecînd la nodul *1* putem determina componentele H_1 și V_1 ale reacțiunii din articulația *1* (fig. 9.1 *f*). Din ecuațiile de proiecții:

$$X = - H_1 + P + 3\sqrt{2}\,P\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$Y = V_1 - 3\sqrt{2}\,P\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

rezultă $V_1 = 3P$, $H_1 = 4P$.

Astfel am determinat eforturile din bare și reacțiunile din legăturile exterioare. Reacțiunile din legăturile exterioare se puteau determina de la început prin scrierea ecuațiilor de echilibru pentru întreaga grindă con-

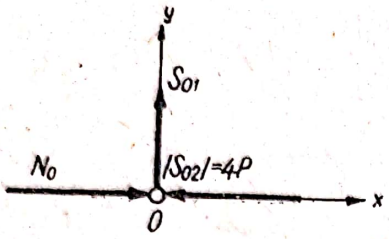


Fig. 9.1 *e*

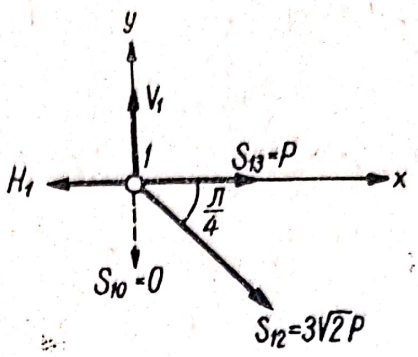


Fig. 9.1 *f*

siderată ca un rigid. În acel caz din cele zece ecuații de proiecții obținute prin izolarea nodurilor numai șapte erau independente, celelalte trei fiind ecuații de verificare.

9.2. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 9.2 *a* prin metoda separării nodurilor. Grinda este încărcată cu forțele $|\bar{F}_4| = |\bar{F}_6| = F$.

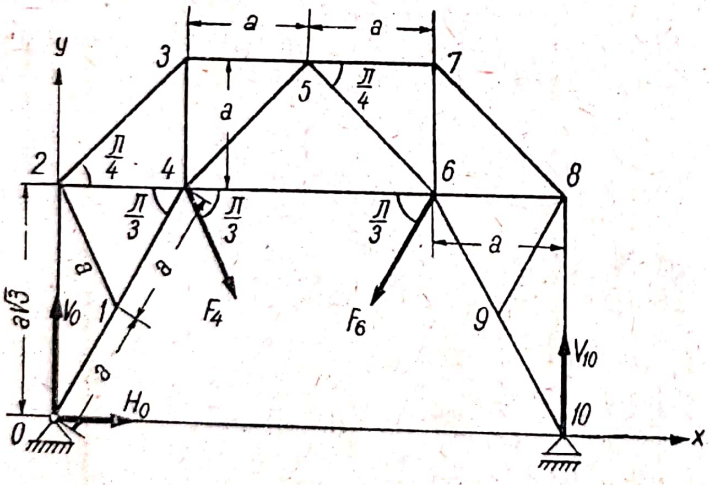


Fig. 9.2 *a*

Rezolvare. Cum în toate nodurile avem mai mult de două forțe necunoscute determinăm în prealabil reacțiunile din articulația *0* și din reazemul *10*. Ecuațiile de echilibru pentru întreaga grindă considerată ca un solid rigid sînt:

$$X = H_0 + \frac{1}{2}F_4 - \frac{1}{2}F_6 = 0$$

$$Y = V_0 + V_{10} - \frac{\sqrt{3}}{2}F_4 - \frac{\sqrt{3}}{2}F_6 = 0$$

$$M_0 = 4a\,V_{10} - 2a\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,F_4 - 2a\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,F_6 = 0$$

de unde:

$$H_0 = 0 \qquad V_0 = V_{10} = F\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Putem acum aplica metoda izolării nodurilor căci există noduri, nodurile *0* și *10* având numai două bare cu eforturi necunoscute:

Ecuațiile de proiecții sînt: De unde rezultă:

Nodul *0* (fig. 9.2 *b*)

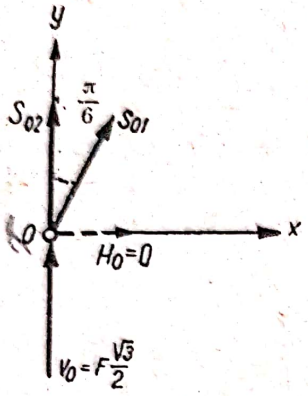


Fig. 9.2 *b*

$$X = \frac{1}{2} S_{01} = 0 \qquad S_{01} = 0$$

$$Y = S_{02} + \frac{\sqrt{3}}{2} S_{01} + \frac{F\sqrt{3}}{2} = 0 \qquad S_{02} = -\frac{F\sqrt{3}}{2}$$

(compresiune)

Nodul *1* (fig. 9.2 *c*)

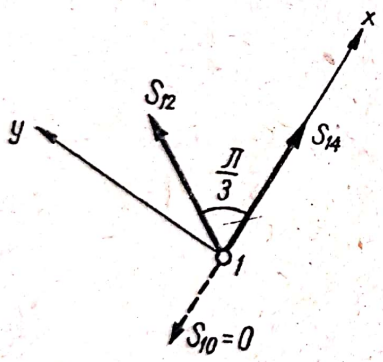


Fig. 9.2 *c*

$$X = S_{14} + \frac{1}{2} S_{12} = 0 \qquad S_{12} = 0$$

$$Y = \frac{\sqrt{3}}{2} S_{12} = 0 \qquad S_{14} = 0$$

Nodul *2* (fig. 9.2 *d*)

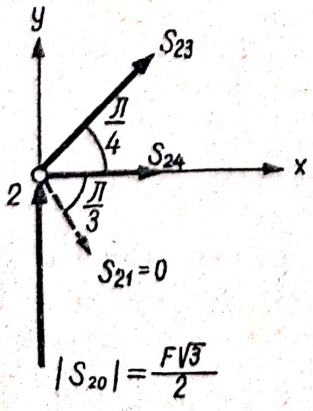


Fig. 9.2 *d*

$$X = S_{24} + \frac{\sqrt{2}}{2} S_{23} = 0 \qquad S_{23} = -\frac{F\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

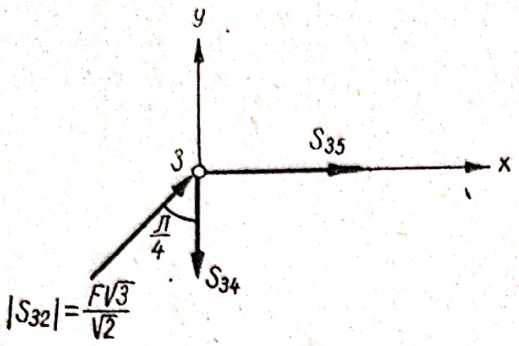
(compresiune)

$$Y = \frac{F\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} S_{23} = 0 \qquad S_{24} = \frac{F\sqrt{3}}{2}$$

(tensiune)

Scanned with OKEN Scanner

Nodul *3* (fig. 9.2 *e*) Ecuațiile de proiecții sînt: De unde rezultă:



$$X = S_{35} + \frac{F\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad S_{34} = \frac{F\sqrt{3}}{2}$$

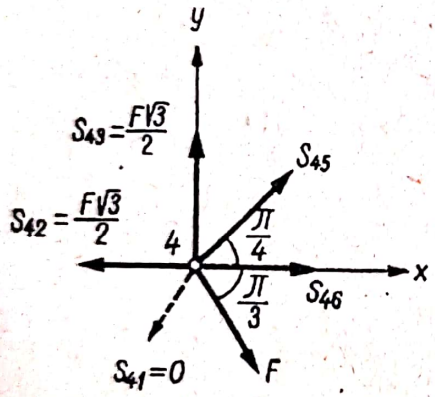
(tensiune)

$$Y = \frac{F\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2}}{2} - S_{34} = 0 \qquad S_{35} = -\frac{F\sqrt{3}}{2}$$

(compresiune)

Fig. 9.2 *e*

Nodul *4* (fig. 9.2 *f*)



$$X = S_{46} + \frac{F}{2} - \frac{F\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,S_{45} = 0 \qquad S_{45} = 0$$

$$Y = -\frac{F\sqrt{3}}{2} + \frac{F\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,S_{45} = 0 \qquad S_{46} = \frac{F(\sqrt{3}-1)}{2}$$

(tensiune)

Fig. 9.2 *f*

Nu este necesar să izolăm celelalte noduri căci grinda fiind simetrică eforturile în barele simetrice între ele vor fi egale. Astfel:

$$S_{9-10} = S_{89} = S_{69} = S_{56} = 0 \qquad S_{8-10} = S_{78} = S_{57} = -\frac{F\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{67} = S_{68} = \frac{F\sqrt{3}}{2}.$$

9.3. Folosind metoda secțiunilor să se determine eforturile din barele *0 — 1*, *1 — 2*, *2 — 4*, *3 — 5*, *3 — 6* și *4 — 6* ale grinzii cu zăbrele din figura 9.3 *a*.

Rezolvare. Pentru barele *0—1*, *1—2* și *2—4* secționăm grinda ca în figura 9.3 *b*. Scriind ecuații de echilibru pentru partea din dreapta secțiunii

Scanned with OKEN Scanner

și anume ecuații de momente în raport cu punctele *2*, *0* și *1* determinăm eforturile S_{01}, S_{21} și S_{24}:

$M_2 = -Pa + S_{01} \cdot \frac{a}{2} = 0$ deci $S_{01} = 2P$ (tensiune)

$M_0 = Pa - S_{21}\, a = 0$ deci $S_{21} = P$ (tensiune)

$M_1 = -Pa - S_{24} \frac{a}{\sqrt{3}} = 0$ deci $S_{24} = -P\sqrt{3}$ (compresiune).

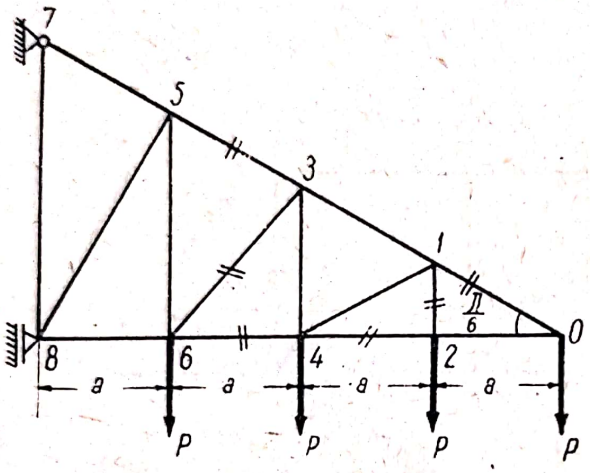


Fig. 9.3 *a*

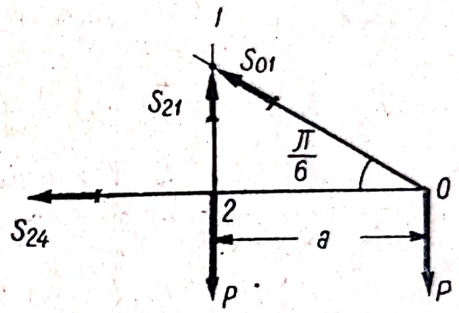


Fig. 9.3 *b*

Pentru barele *3—5*, *3—6* și *4—6* secționăm grinda ca în figura 9.3*c* și scriem ecuațiile de momente în raport cu punctele *6*, *0* și *3*:

$M_6 = -Pa - 2Pa - 3Pa + S_{35} \frac{3a}{2} = 0$ deci $S_{35} = 4P$ (tensiune)

$M_0 = Pa + 2Pa + S_{36} \frac{6a}{\sqrt{7}} = 0$

deci $S_{36} = -\frac{P\sqrt{7}}{2}$ (compresiune)

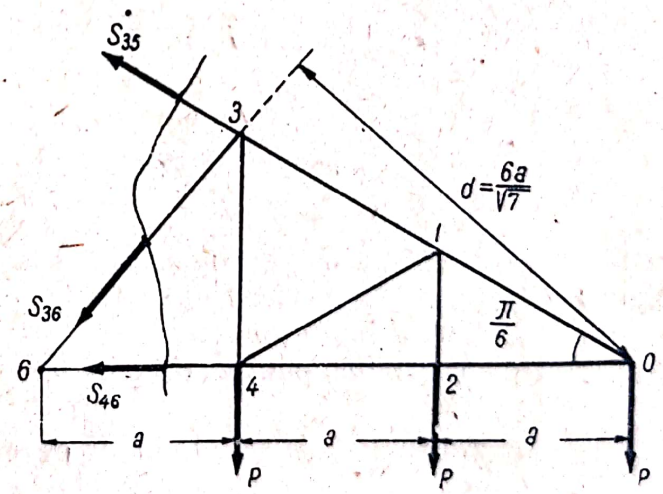


Fig. 9.3 *c*

$M_3 = -Pa - 2Pa - S_{46} \frac{2a}{\sqrt{3}} = 0$ deci $S_{46} = -\frac{3\sqrt{3}\,P}{2}$ (compresiune).

9.4. Folosind metoda secțiunilor să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 9.4 *a*.

Rezolvare. Vom face secțiuni prin grindă ce intersectează cel mult trei bare. În prealabil însă trebuie să determinăm reacțiunile din legăturile

Scanned with OKEN Scanner

exterioare, articulația *0* și reazemul *8*, deoarece în ecuațiile de echilibru pentru o parte din grindă intervin neapărat aceste reacțiuni. Ecuațiile de echilibru sînt:

$$X = H_0 - \frac{1}{2} N_8 = 0$$

$$Y = V_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} N_8 - P = 0$$

$$M_8 = 3\ aP - 4aV_0 = 0$$

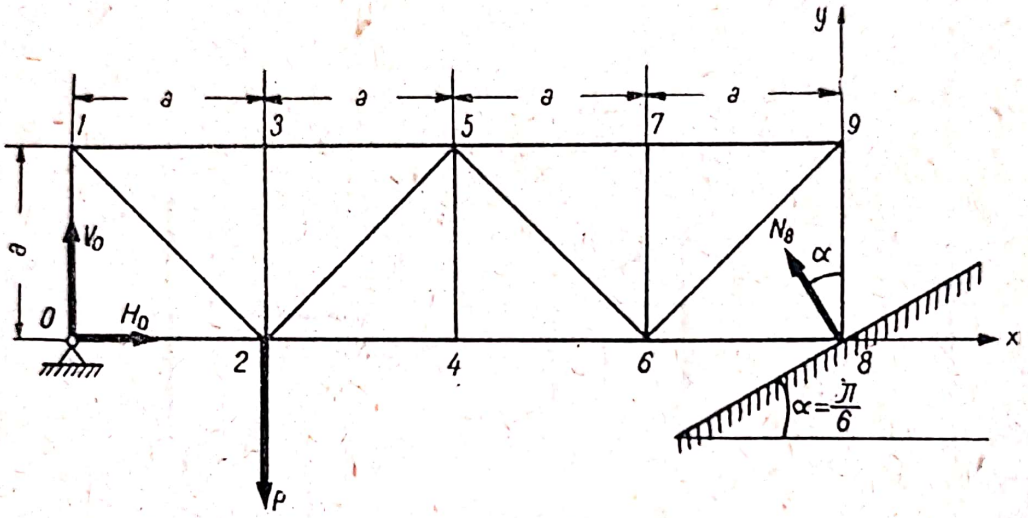


Fig. 9.4 *a*

de unde:

$$V_0 = \frac{3}{4} P \qquad H_0 = \frac{P}{4\sqrt{3}} \qquad N_8 = \frac{P}{2\sqrt{3}}.$$

Pentru eforturile din tălpi și din diagonale secționăm grinda ca în figura 9.4 *b* ... *e* și scriem ecuații în care intervin cîte un singur efort necunoscut (ecuații de momente pentru eforturile din tălpi și ecuații de proiecții pe verticală pentru diagonale).

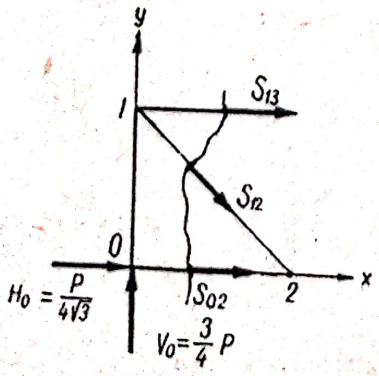
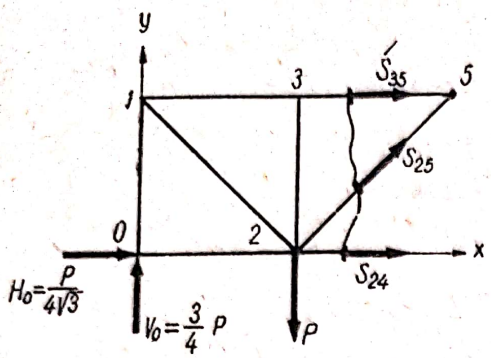
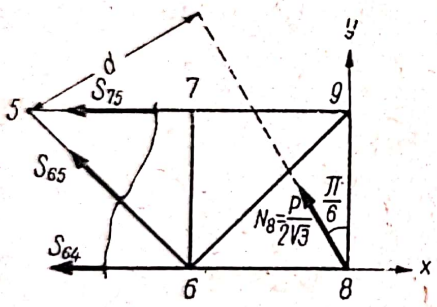
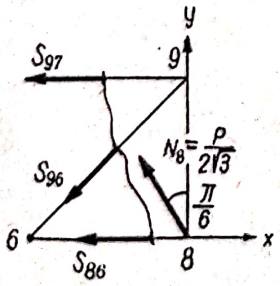
Secțiunea	Ecuații de echilibru	De unde:
	$M_1 = S_{02}\ a + \frac{P}{4\sqrt{3}} a = 0$	$S_{02} = -\frac{P}{4\sqrt{3}}$ (compresiune)
	$M_2 = -S_{13}\ a - \frac{3}{4} P a = 0$	$S_{13} = -\frac{3P}{4}$ (compresiune)
	$Y = \frac{3}{4} P - S_{12} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$	$S_{12} = \frac{3P}{2\sqrt{2}}$ (tensiune)

Fig. 9.4 *b*

Secțiunea	Ecuații de echilibru	De unde:
	$M_5 = S_{24}\, a + \frac{P}{4\sqrt{3}}\, a - \frac{3}{4} P \cdot 2a + Pa = 0$	$S_{24} = \frac{(2\sqrt{3}-1)\,P}{4\sqrt{3}}$ (tensiune)
	$M_2 = -S_{35}\, a - \frac{3}{4} P\, a = 0$	$S_{35} = -\frac{3P}{4}$ (compresiune)
	$Y = \frac{3}{4} P - P + S_{25} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$	$S_{25} = \frac{P}{2\sqrt{2}}$ (întindere)
Fig. 9.4 *c*		
	$M_5 = -S_{64}\, a + \frac{P}{2\sqrt{3}} d = 0$ unde $d = 2a \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2}$	$S_{46} = \frac{(2\sqrt{3}-1)\,P}{4\sqrt{3}}$ (tensiune)
	$M_6 = S_{75}\, a + \frac{P}{2\sqrt{3}}\, a \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$	$S_{57} = -\frac{P}{4}$ (compresiune)
Fig. 9.4 *d*	$Y = S_{65} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{P}{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$	$S_{56} = -\frac{P}{2\sqrt{2}}$ (compresiune)
	$M_9 = -S_{86}\, a - \frac{P}{2\sqrt{3}} \frac{a}{2} = 0$	$S_{68} = -\frac{P}{4\sqrt{3}}$ (compresiune)
	$M_6 = S_{97}\, a + \frac{P}{2\sqrt{3}} \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0$	$S_{79} = -\frac{P}{4}$ (compresiune)
Fig. 9.4 *e*	$Y = -S_{96} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{P}{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$	$S_{69} = \frac{P}{2\sqrt{2}}$ (tensiune)

Au rămas de determinat eforturile din montanții *0—1*, *2—3*, *4—5*, *6—7* și *8—9*. Cum nu putem face secțiuni numai prin trei bare care să intersecteze și montanții vom determina eforturile din montanți prin izolarea

nodurilor *0*, *3*, *4*, *7* și *8*. Astfel izolînd nodul *0* (fig. 9.4 *f*), scriind ecuația de proiecții pe axa *Oy*:

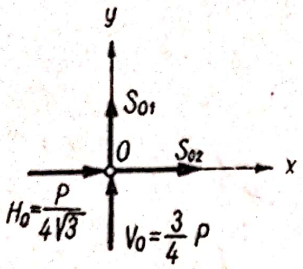


Fig. 9.4 *f*

$$Y = \frac{3}{4}P + S_{01} = 0$$

obținem:

$$S_{01} = -\frac{3}{4}P \text{ (compresiune).}$$

Analog se obține:

$$S_{89} = -\frac{P}{4} \text{ (compresiune)} \qquad S_{23} = S_{45} = S_{67} = 0.$$

Eforturile în montanții *2—3*, *4—5* și *6—7* fiind nule, aceste bare se numesc montanți falși. De fapt puteam determina eforturile în acești montanți și prin secțiuni, ținînd seama de valorile eforturilor din barele secționate anterior.

9.5. Să se determine eforturile din barele grînzii cu zăbrele din figura 9.5 *a*.

Rezolvare. Pentru determinarea reacțiunilor scriem ecuațiile de echilibru:

$$X = P - H_0 = 0$$

$$Y = N_3 - V_0 = 0$$

$$M_0 = N_3 a - \frac{Pa\sqrt{3}}{2} = 0$$

de unde:

$$H_0 = P \qquad V_0 = N_3 = \frac{P\sqrt{3}}{2}.$$

Nu putem aplica deocamdată metoda izolării nodurilor căci în fiecare nod sînt cîte trei bare. Singura secțiune care să intersecteze numai trei bare este secțiunea *I—I* din figura 9.5 *a*.

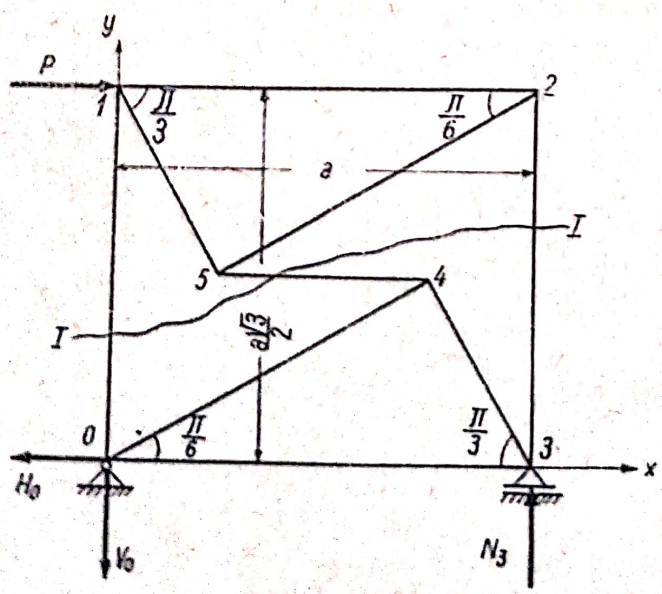


Fig. 9.5 *a*

Izolînd partea de sus a grinzii (fig. 9.5 *b*) și scriind ecuații de momente față de punctele *A* și *B* și ecuația de proiecție pe orizontală:

$$M_A = S_{10} a - P\frac{a\sqrt{3}}{4} = 0$$

$$M_B = -S_{23} a - P\frac{a\sqrt{3}}{4} = 0$$

$$X = P + S_{54} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă:

$$S_{01} = \frac{P\sqrt{3}}{4} \text{ (tensiune)} \qquad S_{23} = -\frac{P\sqrt{3}}{4} \text{ (compresiune)}$$

$$S_{45} = -P \text{ (compresiune).}$$

Acum putem izola noduri avînd cîte două bare cu eforturi necunoscute.

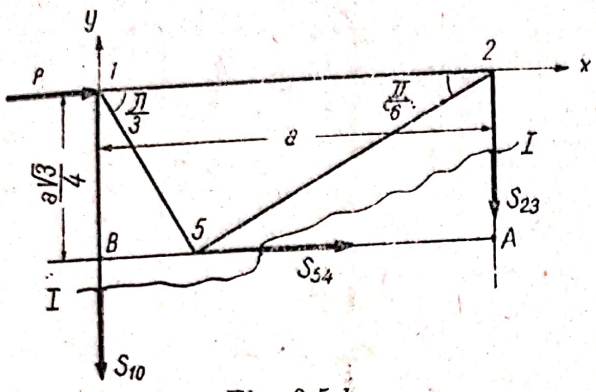


Fig. 9.5 *b*

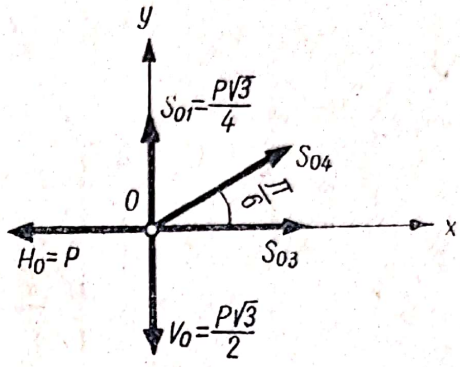


Fig 9.5 *c*

Astfel izolînd nodul *0* (fig. 9.5 *c*) din ecuațiile de proiecții:

$$X = S_{03} + S_{04}\frac{\sqrt{3}}{2} - P = 0$$

$$Y = \frac{S_{01}}{2} + \frac{P\sqrt{3}}{4} - \frac{P\sqrt{3}}{2} = 0$$

obținem:

$$S_{03} = \frac{P}{4} \text{ (tensiune)} \qquad S_{04} = \frac{P\sqrt{3}}{2} \text{ (tensiune).}$$

Analog izolînd celelalte noduri obținem:

$$S_{34} = -\frac{P}{2} \text{ (compresiune)} \qquad S_{15} = -\frac{P}{2} \text{ (compresiune)}$$

$$S_{25} = \frac{P\sqrt{3}}{2} \text{ (tensiune)} \qquad S_{12} = -\frac{3P}{4} \text{ (compresiune).}$$

9.6. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 9.6 *a*.

Rezolvare. Vom determina eforturile în barele panoului al *n*-lea. Putem folosi metoda izolării nodurilor, în care caz pentru a determina eforturile căutate trebuie să izolăm $3(n+1)$ noduri rezolvînd $6(n+1)$ ecuații. Calculele fiind prea laborioase să încercăm să folosim metoda secțiunilor. În acest caz însă orice secțiune am face, secționăm patru bare. Totuși secționînd grinda ca în figura 9.6 *b* putem determina efortul în bara *n1* căci celelalte bare secționate sînt concurente în punctul *A*. Ecuația de momente față de acest punct este:

$$M_A = P(n-1)\,a + S_{n1}\,2a \operatorname{ctg}\alpha = 0$$

de unde:

$$S_{n1} = -\frac{(n-1)}{2} P \operatorname{tg}\alpha.$$

Acum secționînd grinda ca în figura 9.6 *c* intersectăm trei bare neconcurente și neparalele cu eforturi necunoscute. Ecuațiile de echilibru sînt:

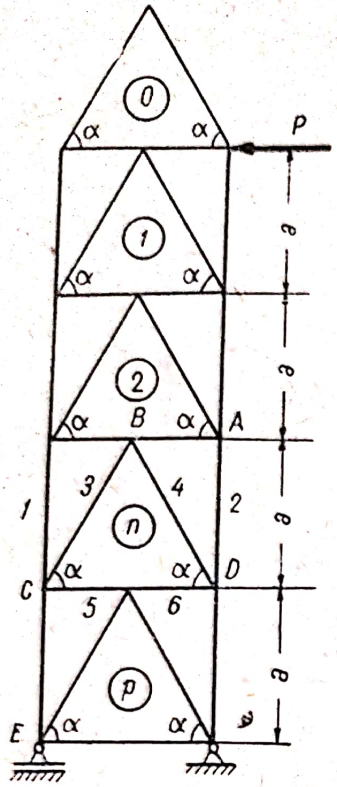


Fig.. 9.6 *a*

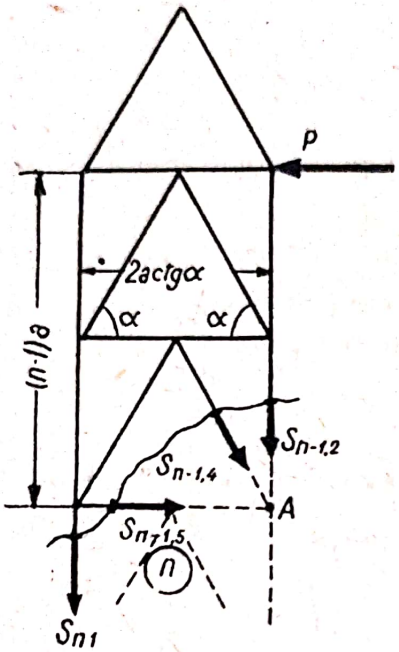


Fig. 9.6 *b*

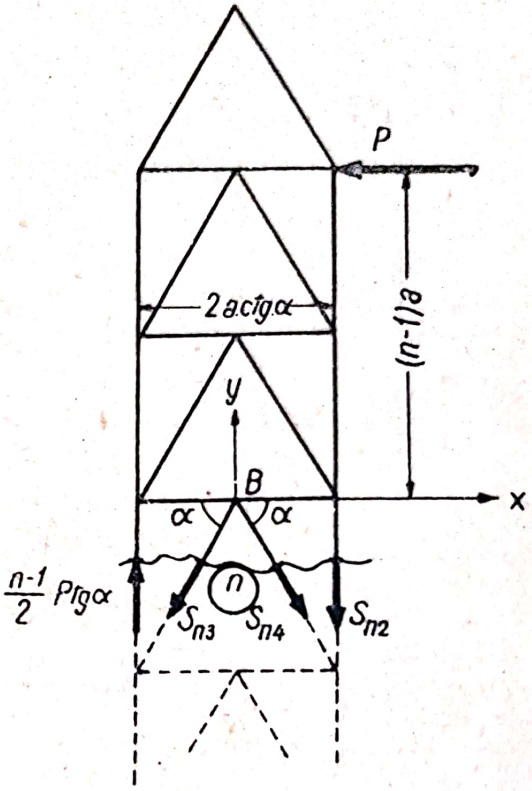


Fig. 9.6 *c*

$$X = -P - S_{n3}\cos\alpha + S_{n4}\cos\alpha = 0$$

$$Y = \frac{(n-1)}{2} P\,\mathrm{tg}\,\alpha - S_{n2} - S_{n3}\sin\alpha - S_{n4}\sin\alpha = 0$$

$$M_B = P(n-1)a - \frac{(n-1)}{2} P\,\mathrm{tg}\,\alpha \cdot a\,\mathrm{ctg}\,\alpha - S_{n2}\,a\,\mathrm{ctg}\,\alpha = 0$$

de unde:

$$S_{n2} = \frac{n-1}{2} P\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$S_{n3} = -\frac{P}{2\cos\alpha} \qquad S_{n4} = \frac{P}{2\cos\alpha}. \qquad (n \geqslant 1)$$

În sfîrșit pentru a determina eforturile din barele orizontale 5 și 6 izolăm nodurile *C* și *D* (fig. 9.6*d*) și proiectînd pe orizontală obținem:

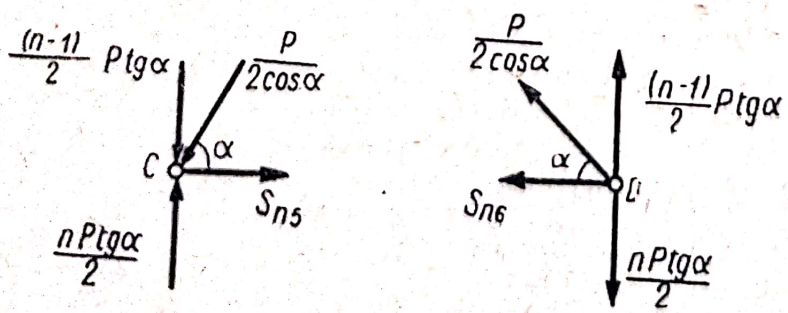


Fig. 9,6 *d*

$$S_{n5} = \frac{P}{2}$$

$$S_{n6} = -\frac{P}{2}$$

$$[1 \leqslant n \leqslant (p-1)].$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru barele din panoul *0* prin metoda izolării nodurilor obținem:

$$S_{03} = S_{04} = S_{05} = 0 \qquad S_{06} = -P.$$

În ultimul panou, panoul *p*, izolînd nodul *E* avem $S_{p\,5-6} = \frac{P}{2}$

9.7. Folosind metoda grafică Cremona să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din problema 9.4.

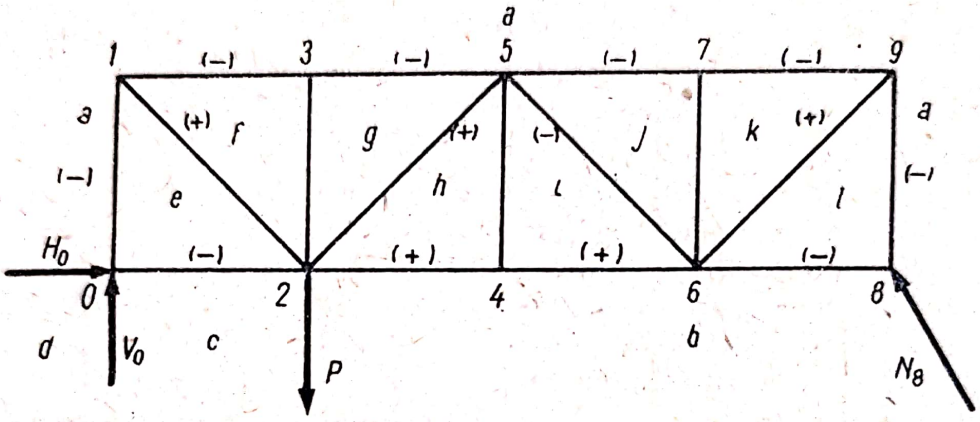


Fig. 9.7 *a*

Rezolvare. Asupra grinzii acționează forțele din figura 9.7 *a* reacțiunile fiind determinate din problema 9.4 $\left(V_0 = \frac{3}{4}P, H_0 = \frac{P}{4\sqrt{3}}, N_8 = \frac{P}{2\sqrt{3}}\right)$.

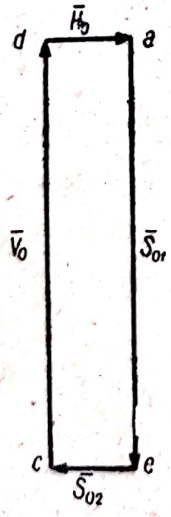


Fig. 9.7 *b*

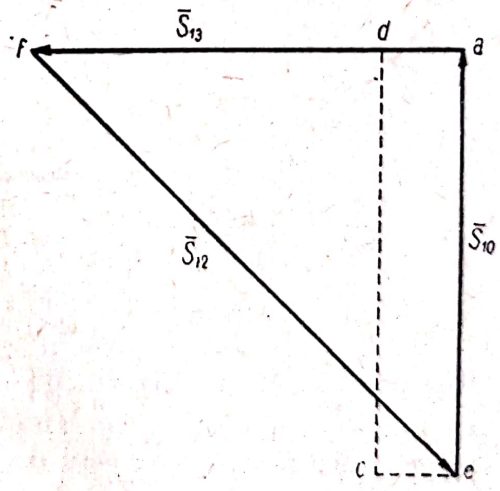


Fig. 9.7 *c*

Poligonul forțelor corespunzător nodului *0* este format din forțele $\bar{V}_0 = \overline{cd}$, $\bar{H}_0 = \overline{da}$ și din eforturile $\bar{S}_{01} = \overline{ae}$ și $\bar{S}_{02} = \overline{ec}$ (fig. 9.7 *b*). Cum

eforturile $\bar{S}_{01}$ și $\bar{S}_{02}$ împing în nodul *0*, barele sînt comprimate, iar $|S_{02}| = H_0 = \frac{P}{4\sqrt{3}}$ și $|S_{01}| = V_0 = \frac{3}{4}P$.

Poligonul forțelor corespunzător nodului *1* este format din forțele $\bar{S}_{10} = -\bar{S}_{01} = \overline{ea}$, $\bar{S}_{13} = \overline{af}$ și $\bar{S}_{12} = \overline{fe}$ și este reprezentat în figura 9.7 *c* (poligonul din nodul *0* este desenat punctat pe aceeași figură). Eforturile $\bar{S}_{10}$ și $\bar{S}_{13}$ împing în nodul *1*, barele fiind comprimate și $\bar{S}_{12}$ trage de nod bara fiind întinsă. Din figură rezultă:

$$|S_{10}| = |S_{01}| = \frac{3}{4}P, \qquad |S_{13}| = \frac{3}{4}P, \qquad S_{12} = \frac{3P}{2\sqrt{2}}.$$

În figura 9.7 *d* este reprezentat poligonul forțelor corespunzător nodului *3* (poligoanele din nodurile *0* și *1* fiind desenate punctat). Avem $\bar{S}_{31} = \overline{fa}$, $\bar{S}_{35} = \overline{ag}$, iar $\bar{S}_{32} = \overline{gf} = 0$ deoarece punctele *f* și *g* sînt confundate.

Construind poligoanele forțelor pentru toate nodurile și suprapunîndu-le obținem epura Cremona din figura 9.7 *e*. Poligonul forțelor exterioare (desenat cu linie groasă) se închide.

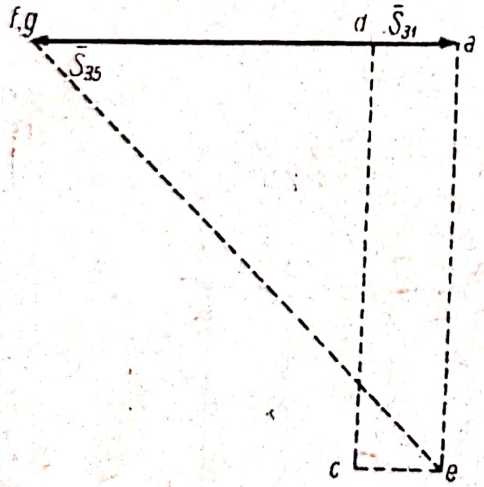


Fig. 9.7 *d*

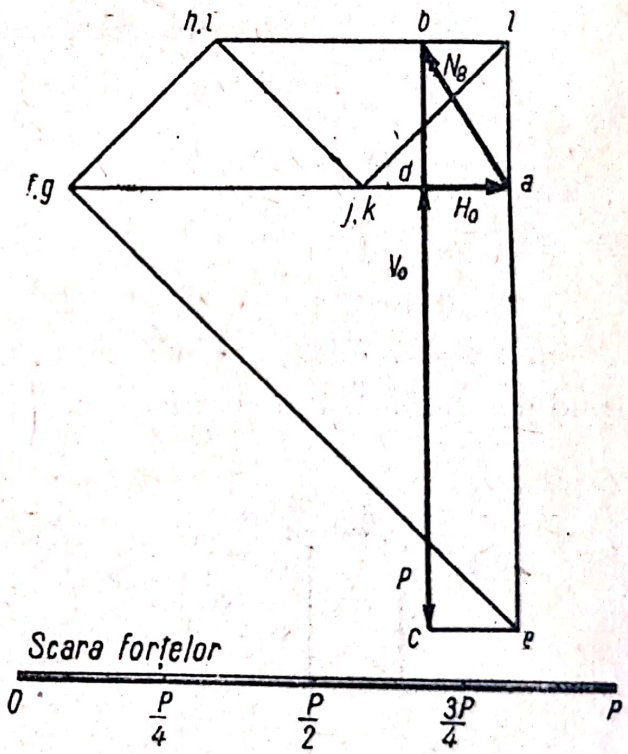


Fig. 9.7 *e*

Efortul din orice bară se determină din epura Cremona. De exemplu efortul S_{57}. În nodul *5*, bara *5—7* este bara *aj*, din figura 9.7 *e*, $\overline{aj}$ este un vector orientat spre stînga, efortul este de compresiune căci împinge în nod și este egal în modul cu $\frac{P}{4}$, adică $S_{57} = -\frac{P}{4}$, același rezultat cu cel obținut în problema 9.4.

9.8. Să se construiască epura Cremona pentru grinda cu zăbrele din problema 9.3 (fig. 9.8 *a*).

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Epura Cremona este construită în figura 9.8 *b*. Din această epură se obține:

$$S_{01} = 2P \qquad S_{13} = 3P \qquad S_{35} = 4P \qquad S_{57} = 5P$$

$$S_{02} = S_{24} = -P\sqrt{3} \qquad S_{46} = -\frac{3\sqrt{3}\,P}{2} \qquad S_{68} = -2\sqrt{3}\,P$$

$$S_{12} = P \qquad S_{34} = \frac{3P}{2} \qquad S_{56} = 2P \qquad S_{78} = \frac{3P}{2}$$

$$S_{14} = -P \qquad S_{36} = -\frac{P\sqrt{7}}{2}$$

$$S_{58} = -P\sqrt{3}\,.$$

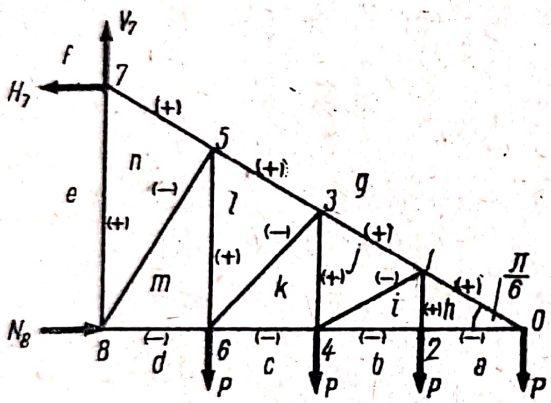


Fig. 9.8 *a*

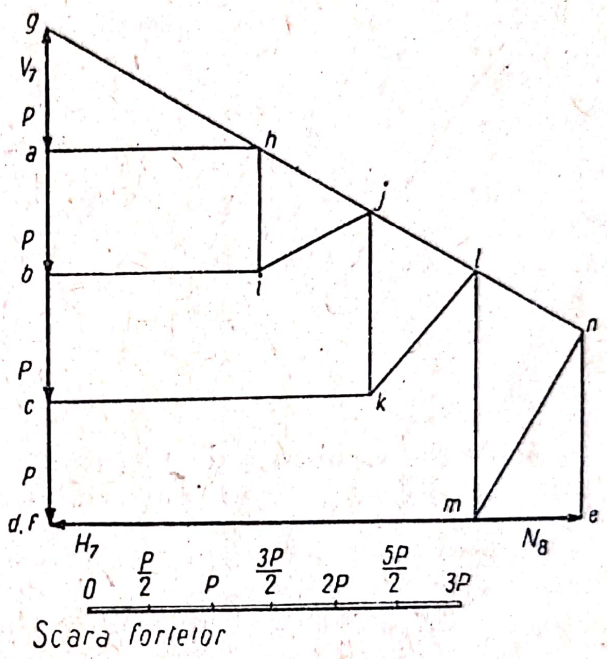


Fig. 9.8 *b*

Tot din epură putem determina și reacțiunile din reazemul 8 și articulația 7, și anume:

$$|\bar{N}_8| = |\overline{de}| = \frac{5\sqrt{3}\,P}{2}$$

$$|\bar{H}_7| = |\overline{ef}| = \frac{5\sqrt{3}\,P}{2}$$

$$|\bar{V}_7| = |\overline{fg}| = 4P.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

9.9. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 9.9 folosind metoda izolării nodurilor. Aplicație numerică: $P = 10$ tf, $\alpha = 60°$, $\beta = 75°$.

Răspuns.

$$S_{14} = -\frac{P \sin\alpha}{\cos\beta} \approx -33{,}4\ \text{tf}, \quad S_{34} = -\frac{P\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta} \approx +27{,}3\ \text{tf},$$

$$S_{23} = -\frac{P\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta\ \sin 2\alpha} \approx +31{,}5\ \text{tf}, \quad S_{13} = -\frac{P\cos(\alpha+\beta)\cos 2\alpha}{\cos\beta\ \sin 2\alpha} \approx -15{,}8\ \text{tf}$$

$$\text{și } S_{12} = \frac{P\cos(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\cos\beta} \approx -15{,}8\ \text{tf}.$$

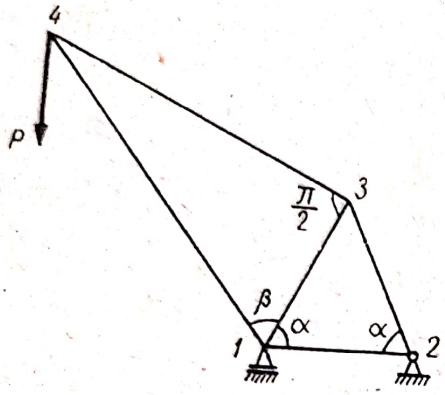


Fig. 9.9

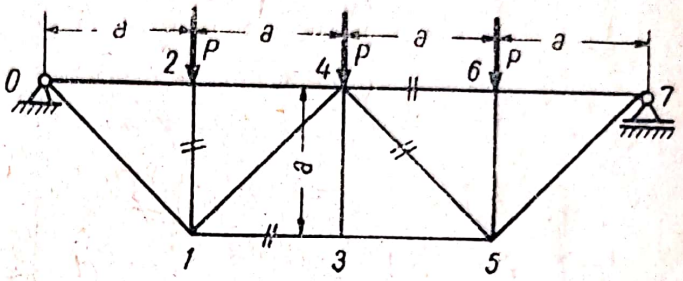


Fig. 9.10

9.10. Folosind metoda secțiunilor, să se determine eforturile din barele *1—2*, *1—3*, *4—5* și *4—6* ale grinzii cu zăbrele din figura 9.10.

Răspuns.

$$S_{12} = -P, \quad S_{13} = 2P, \quad S_{45} = -\frac{P}{\sqrt{2}}, \quad S_{46} = -\frac{3}{2}P.$$

9.11. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 9.10 folosind metoda grafică Cremona.

Capitolul X

ECHILIBRUL FIRELOR

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Ecuația diferențială de echilibru a unui element PP' de lungime ds dintr-un fir flexibil și inextensibil este:

$$\frac{d\bar{T}}{ds} + \bar{p} = 0 \qquad (10.1)$$

unde $\bar{T}$ este tensiunea, tangentă la fir, iar $\bar{p}$ forța distribuită, care acționează asupra firului, raportată la unitatea de lungime (fig. 10. *a*).

Dacă p_x, p_y, p_z și p_τ, p_ν, p_β sînt proiecțiile lui $\bar{p}$ pe axele unui triedru cartezian *Oxyz* respectiv pe axele triedrului intrinsec (lui Frenet) $P\tau\nu\beta$ proiecțiile ecuației (10.1) sînt:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)+p_x=0 \qquad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)+p_y=0 \qquad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right)+p_z=0 \tag{10.2}$$

$$\frac{dT}{ds}+p_\tau=0 \qquad \frac{T}{\rho}+p_\nu=0 \qquad p_\beta=0 \tag{10.3}$$

unde ρ este raza de curbură a curbei de echilibru a firului. Din (10.3) rezultă că $\bar{p}$ este conținut în planul osculator al acestei curbe.

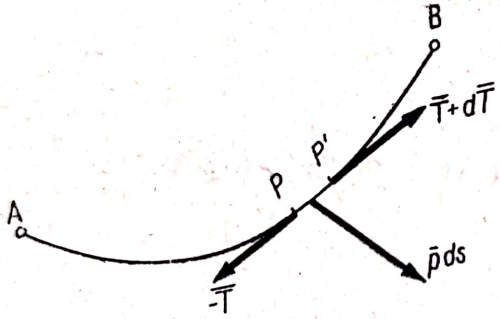


Fig. 10. *a*

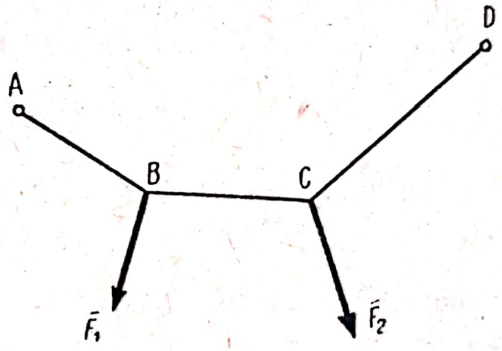


Fig. 10. *b*

Forma de echilibru a unui *fir acționat de forțe concentrate* (fig. 10. *b*) este o linie poligonală. În fiecare punct de aplicație al unei forțe (nod), tensiunea din fir suferă o discontinuitate. Tensiunea și elementele geometrice ale firului se determină din condițiile de echilibru:

$$\bar{R}=0 \qquad \bar{M}_0=0 \tag{10.4}$$

ale firului întreg, ale unei porțiuni din fir sau ale fiecărui nod în parte.

În cazul unui fir acționat numai de greutatea proprie, curba de echilibru va fi o curbă plană situată în planul vertical ce conține cele două puncte de suspensie *A* și *B*, iar proiecția tensiunii pe orizontală este constantă:

$$T\cos\alpha=H \tag{10.5}$$

α este unghiul dintre tangenta la fir și orizontală (fig. 10. *c*) iar *H* tensiunea din punctul cel mai de jos al firului *C*, tensiunea minimă.

În cazul *firului greu omogen*, firul ia forma unui lănțișor. Raportînd curba la sistemul de referință din figura 10. *c*, avînd

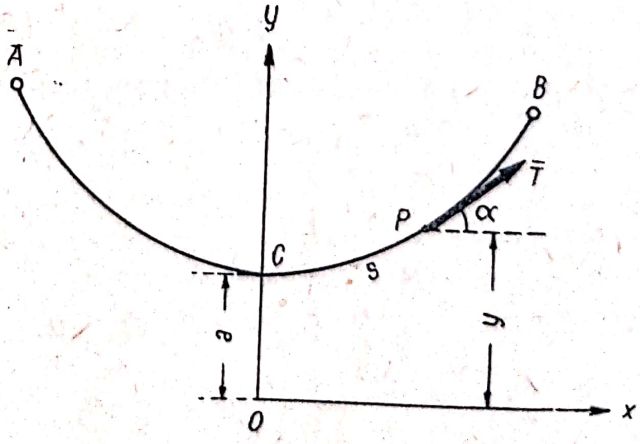


Fig. 10. *c*

axa Ox orizontală, axa Oy verticala ce trece prin punctul cel mai de jos al firului C, iar $OC = a$, ecuația lănțișorului este:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \tag{10.6}$$

unde:

$$a = \frac{H}{p} \tag{10.7}$$

este parametrul lănțișorului, iar p este greutatea unității de lungime de fir.

Lungimea unui arc de lănțișor $s = CP$ măsurată din punctul C este:

$$s = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \tag{10.8}$$

iar panta tangentei la lănțișor este:

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}. \tag{10.9}$$

Tensiunea într-un punct P al firului este proporțională cu ordonata y:

$$T = py \tag{10.10}$$

sau ținînd seama de (10.6):

$$T = pa \operatorname{ch} \frac{x}{a}. \tag{10.10'}$$

Reamintim cu această ocazie unele relații privind funcțiile hiperbolice:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = e^x \qquad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \tag{10.11}$$

Adesea problemele privind echilibrul firului greu omogen se pot rezolva punînd condițiile de echilibru (10.4) pentru întregul fir sau pentru porțiuni din fir și folosind relația foarte simplă (10.10), $T = py$. Numai atunci cînd intervine abscisa x sîntem obligați să recurgem la formulele în care intervin funcțiile hiperbolice.

În cazul unui *fir supus la o sarcină p, uniform distribuită pe orizontală*, adică practic în cazul unui fir greu omogen foarte întins, forma de echilibru a firului este parabola:

$$y = \frac{px^2}{2H} \tag{10.12}$$

raportată la axele din figura 10 *d*.

Tensiunea în punctul cel mai de jos O va fi:

$$H = \frac{pl^2}{8f} \tag{10.13}$$

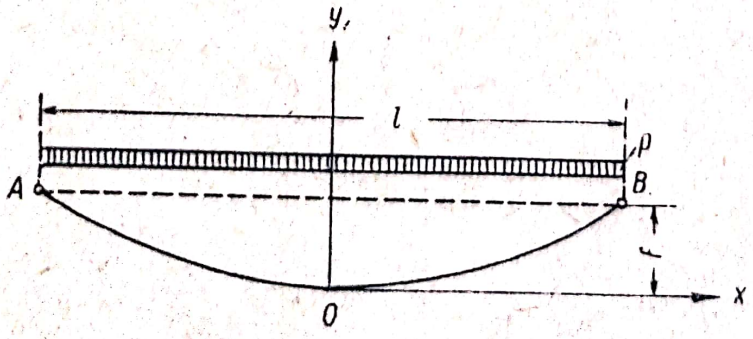


Fig. 10 *d*

Scanned with OKEN Scanner

iar:

$$T_A = T_B = \sqrt{H^2 + \left(\frac{pl}{2}\right)^2} = \frac{pl^2}{8f}\sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2}} \qquad (10.14)$$

unde l este distanța între punctele de suspensie A și B (situate pe aceeași orizontală) iar f săgeata firului. Lungimea întregului fir este dată cu aproximație de formula:

$$L = l + \frac{8f^2}{3l}. \qquad (10.15)$$

În cazul firelor foarte întinse, dacă ținem seama de efectul temperaturii și de alungirea firului, putem folosi ecuația de stare a firului:

$$\frac{pl^2}{24H^2} - \frac{p_1 l^2}{24H_1^2} = \alpha(\theta - \theta_1) + \beta(H - H_1) \qquad (10.16)$$

care ne permite să determinăm tensiunea H_1 corespunzînd încărcării p_1, dacă se cunosc tensiunea H, încărcarea p, temperaturile θ și θ_1 din cele două situații de încărcare. Coeficientul de dilatare liniară este α iar β este un coeficient ce ține seama de alungirea elastică a firului, $\beta = \frac{1}{EA}$ unde E este modulul de elasticitate longitudinal, iar A aria secțiunii firului.

După ce am determinat tensiunea H_1, cu ajutorul ecuației (10.13) determinăm săgeata f_1, iar cu formula (10.15) lungimea L_1 a firului.

Frecarea firelor. Pentru un fir înfășurat pe un disc fix, dacă greutatea firului este neglijabilă pentru echilibru, trebuie ca:

$$T_2 \leqslant T_1 e^{f\theta} \qquad (10.17)$$

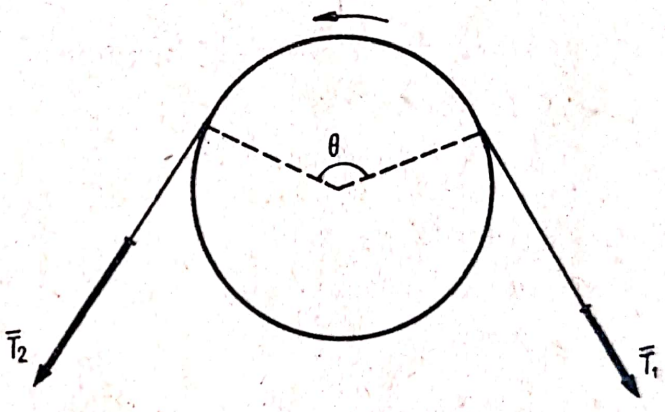


Fig. 10. *e*

unde T_2 este forța motoare, T_1 forța rezistentă ($T_2 > T_1$, tendința de deplasare este în sensul lui T_2), f este coeficientul de frecare dintre fir și disc, iar θ unghiul de înfășurare al firului măsurat în radiani (fig. 10. *e*).

B. PROBLEME REZOLVATE

10.1. Se dă firul acționat de forțele din figura 10.1 *a* avînd dimensiunile indicate în aceeași figură. Să se determine tensiunile din fir, lungimea firului și săgeata din punctul C.

Rezolvare. Din condițiile de echilibru (10.4) ale întregului fir (fig. 10.1 *b*) avem:

$$X = -T_1 \cos\alpha + T_3 \cos\gamma = 0$$

$$Y = T_1 \sin\alpha + T_3 \sin\gamma - \frac{3P}{2} = 0$$

$$M_D = 2Pa + \frac{Pa}{2} - 3a\,T_1 \sin\alpha = 0$$

unde $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. În ecuațiile de mai sus necunoscute sînt T_1, T_3 și γ.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvîndu-le obţinem:

$$T_1 = \frac{5\sqrt{5}\,P}{6} \qquad T_3 = \frac{P\sqrt{29}}{3} \qquad \operatorname{tg}\gamma = \frac{2}{5}$$

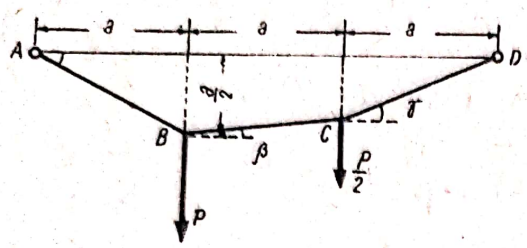


Fig. 10.1 *a*

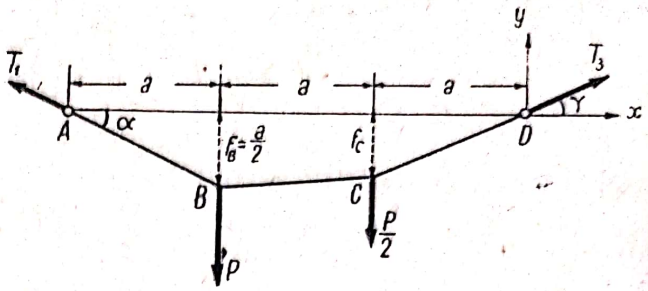


Fig. 10.1 *b*

de unde săgeata în punctul C este:

$$f_C = a\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}\,a$$

iar $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{f_B - f_C}{a} = \dfrac{1}{10}$. Lungimea firului este:

$$l = AB + BC + CD = \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a\sqrt{101}}{10} + \frac{a\sqrt{29}}{5} \approx 3{,}2\ a.$$

Pentru a determina tensiunea T_2 din porţiunea BC izolăm de exemplu punctul B (fig. 10.1 *c*).

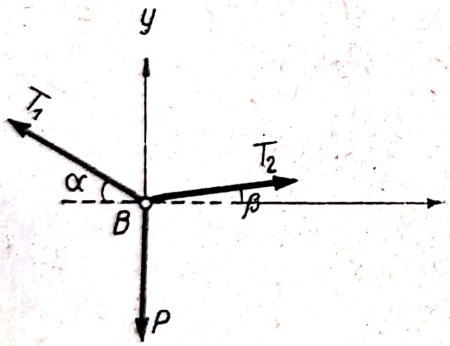


Fig 10.1 *c*

Scriind una dintre ecuaţiile de proiecţii, de exemplu pe axa Ox:

$$X = -T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\beta = 0$$

determinăm singura necunoscută:

$$T_2 = \frac{P\sqrt{101}}{6}.$$

Cititorul poate singur verifica că celelalte ecuaţii de echilibru (de exemplu ecuaţia de proiecţii pe axa Oy) se vor reduce la identităţi.

10.2. Un fir omogen şi greu, de lungime l şi greutate p pe unitatea de lungime este suspendat în două puncte A şi B nesituate pe aceeaşi orizontală, unghiurile dintre tangentele la fir duse în aceste puncte şi orizontală fiind α şi β. Să se determine tensiunile din punctele A şi B şi diferenţa de înălţime h între aceste puncte.

Rezolvare. Tensiunile se pot determina prin scrierea ecuaţiilor de proiecţii considerînd întregul fir în echilibru (fig. 10.2 *a*). Din:

$$X = -T_A \cos\alpha + T_B \cos\beta = 0$$
$$Y = T_A \sin\alpha + T_B \sin\beta - pl = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

se obține:

$$T_A = \frac{pl\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad T_B = \frac{pl\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Pentru a determina înălțimea $h = y_B - y_A$ scriem relația (10.10) în punctele A și B:

$$T_A = p\,y_A \qquad T_B = p\,y_B$$

deci:

$$h = \frac{T_B - T_A}{p} = \frac{l(\cos\alpha - \cos\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\,l.$$

Tot prin metode elementare putem determina și alte elemente ca de exemplu tensiunea H din punctul C, lungimile de fir $l_1 = AC$ și $l_2 = CB$ și denivelarea f dintre punctele A și C. Izolînd porțiunea de fir AC (fig. 10.2 *b*) și scriind ecuațiile de proiecții:

$$X = H - T_A\cos\alpha = 0$$

$$Y = T_A\sin\alpha - pl_1 = 0$$

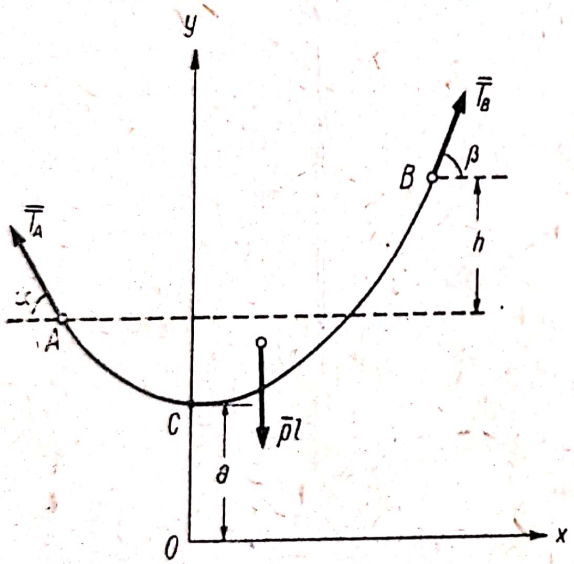


Fig. 10.2 *a*

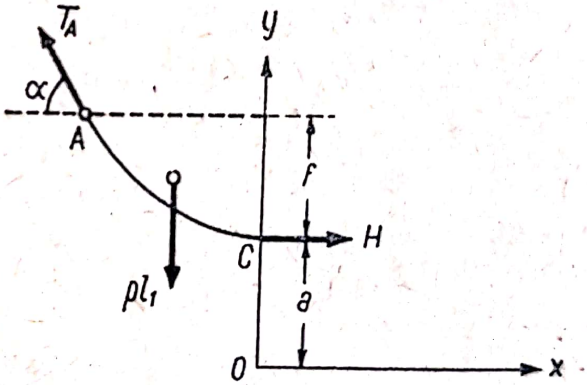


Fig. 10.2 *b*

obținem:

$$H = \frac{pl\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad l_1 = \frac{l\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

iar

$$l_2 = l - l_1 = \frac{l\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

În sfîrșit $f = y_A - a$ unde conform (10.10) $y_A = \frac{T_A}{p}$ și $a = \frac{H}{p}$ și făcînd înlocuirile:

$$f = \frac{l\cos\beta(1-\cos\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

10.3. Dintr-un fir omogen și greu, o bucată de lungime l_1 se găsește pe un plan aspru înclinat sub unghiul α iar o bucată de lungime l_2 atîrnă liber, firul fiind petrecut printr-un inel situat la înălțimea h deasupra planului (fig. 10.3 *a*). Știind că firul este pe punctul de-a aluneca în sus pe planul înclinat, să se determine coeficientul de frecare f al planului, lungimea l a porțiunii AB și unghiul de înclinare β al firului din punctul B. Ce lungime l_1 de fir ar trebui să se găsească pe planul înclinat ca firul să lunece în jos pe plan.

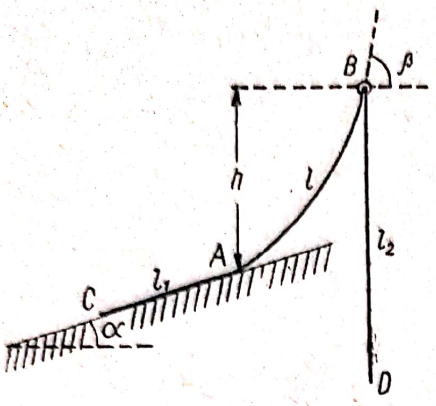


Fig. 10.3 *a*

Rezolvare. Izolînd cele trei porțiuni de fir CA, AB și BD (fig. 10.3 *b*...*d*), ecuațiile de echilibru sînt:

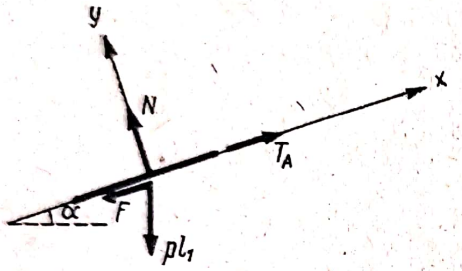


Fig. 10.3 *b*

$$X = T_A - pl_1 \sin\alpha - F = 0$$
$$Y = N - pl_1 \cos\alpha = 0$$

și cum sîntem în poziția limită de echilibru: $F = fN$

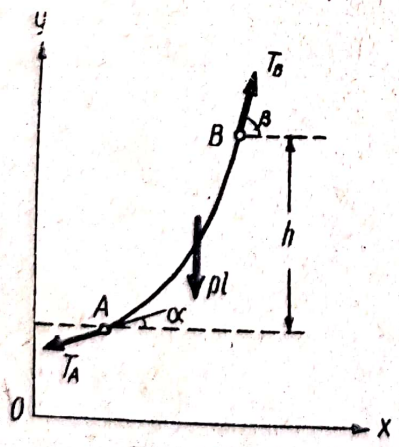


Fig. 10.3 *c*

$$X = T_B \cos\beta - T_A \cos\alpha = 0$$
$$Y = T_B \sin\beta - T_A \sin\alpha - pl = 0$$

unde conform (10.10):

$$T_B - T_A = p\,(y_B - y_A) = ph.$$

Fig. 10.3 *d*

$$Y = T_B - pl_2 = 0$$

Rezolvînd sistemul obținem:

$$T_A = pl_1 (\sin\alpha + f\cos\alpha) = p\,(l_2 - h)$$
$$T_B = pl_2$$

de unde:

$$f = \frac{l_2 - h}{l_1 \cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha \qquad \cos\beta = \frac{l_2 - h}{l_2}\cos\alpha$$

$$l = \sqrt{l_2^2 - (l_2 - h)^2 \cos^2\alpha} - (l_2 - h)\sin\alpha.$$

Scanned with OKEN Scanner

Evident $f \geqslant 0$ deci $l_2 \geqslant h + l_1 \sin \alpha$ adică punctul C se găsește deasupra punctului D. În poziția limită cînd firul ar luneca în jos am avea:

$$T_A = pl_1' (\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

de unde:

$$l_1' = \frac{l_2 - h}{\sin \alpha - f \cos \alpha} = \frac{(l_2 - h)l_1}{2\, l_1 \sin \alpha - l_2 + h}$$

deci firul lunecă în jos pentru:

$$l_1' > \frac{(l_2 - h)l_1}{2l_1 \sin \alpha - l_2 + h.}.$$

Ca lunecarea în jos să poată apare trebuie ca $\sin \alpha - f \cos \alpha \geqslant 0$ adică $f \leqslant \operatorname{tg} \alpha$, de unde:

$$l_2 \leqslant h + 2\, l_1 \sin \alpha.$$

10.4. Un fir omogen și greu de lungime $2l$ și greutate p pe unitatea de lungime este suspendat în două puncte situate la același nivel, săgeata firului fiind f (fig. 10.4 *a*). Să se determine tensiunile maxime și minime din fir, unghiul de înclinare α al firului în punctul A și distanța $2x$ dintre punctele de suspensie A și B ale firului.

Rezolvare. Vom nota cu T tensiunea maximă, din punctul cel mai de sus A

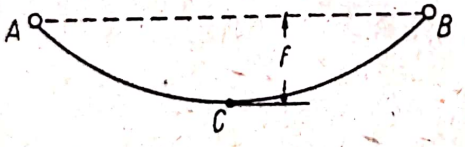


Fig. 10.4 *a*

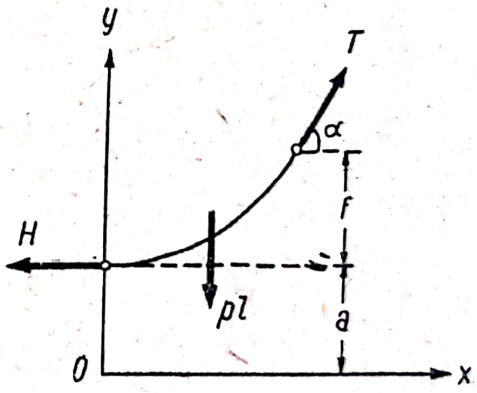


Fig. 10.4 *b*

sau B și cu H tensiunea minimă din punctul cel mai de jos C. Izolînd o jumătate din fir (fig. 10.4 *b*) și scriind ecuațiile de proiecții și ecuațiile (10.10):

$$X = T \cos \alpha - H = 0$$

$$Y = T \sin \alpha - pl = 0$$

$$H = pa$$

$$T = py_B = p\,(a + f)$$

obținem:

$$T = p\,\frac{l^2 + f^2}{2f} \qquad H = p\,\frac{l^2 - f^2}{2f} \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2lf}{l^2 - f^2}. \qquad (1)$$

Pentru a determina distanța dintre punctele de suspensie din (10.9) și (10.10') avem:

$$\operatorname{sh}\frac{x}{a} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{2lf}{l^2 - f^2} \qquad \operatorname{ch}\frac{x}{a} = \frac{T}{pa} = \frac{T}{H} = \frac{l^2 + f^2}{l^2 - f^2}$$

deci din (10.11):

$$e^{\frac{x}{a}} = \operatorname{sh}\frac{x}{a} + \operatorname{ch}\frac{x}{a} = \frac{l + f}{l - f}$$

și

$$x = a \ln \frac{l + f}{l - f}.$$

Însă:

$$a = \frac{H}{p} = \frac{l^2 - f^2}{2f}$$

deci distanța dintre punctele de suspensie este:

$$2x = \frac{l^2 - f^2}{f} \ln \frac{l + f}{l - f}. \qquad (2)$$

10.5. Un fir omogen și greu de lungime $2l$ este atîrnat de două inele A și B de greutate neglijabilă care pot luneca cu frecare pe o bară orizontală (fig. 10.5). Cunoscînd unghiul de frecare să se determine distanța $AB = 2d$ dintre inele în pozițiile de echilibru ale firului.

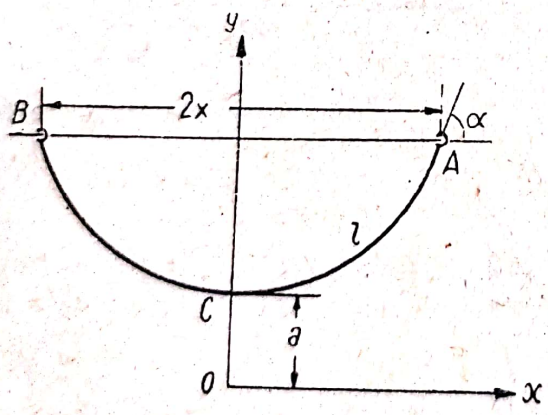


Fig. 10.5

Rezolvare. Condiția de echilibru a unui inel este ca forța efectiv aplicată, tensiunea $\overline{T}$ din fir să formeze un unghi $\alpha \geqslant \frac{\pi}{2} - \varphi$ cu bara [v. formula (2.6)].

În poziția limită de echilibru $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Dar conform (10.9):

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{sh}\frac{x}{a} \qquad (1)$$

iar jumătate din lungimea firului este conform (10.8):

$$l = a \operatorname{sh}\frac{x}{a}. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă:

$$a = l \operatorname{tg}\varphi.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (10.11) avem:

$$\operatorname{ch}\frac{x}{a} = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}} = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi}$$

$$e^{\frac{x}{a}} = \operatorname{sh}\frac{x}{a} + \operatorname{ch}\frac{x}{a} = \frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi} = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$$

de unde în poziția limită:

$$2x = 2a \ln \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = 2l \operatorname{tg}\varphi \cdot \ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)$$

iar pentru echilibru trebuie ca:

$$2x \leqslant 2l \operatorname{tg}\varphi \cdot \ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right).$$

10.6. Un fir omogen și greu este trecut peste doi scripeți mici situați la același nivel, la distanța d unul de altul, capetele firului atîrnînd liber. Să se afle lungimea minimă a firului pentru care este posibil echilibrul.

Rezolvare. Tensiunile în B din lănțișor și din porțiunea verticală fiind egale și ținînd seama de (10.10) avem:

$$T = p\,s_1 = p\,y_B$$

deci:

$$s_1 = y_B$$

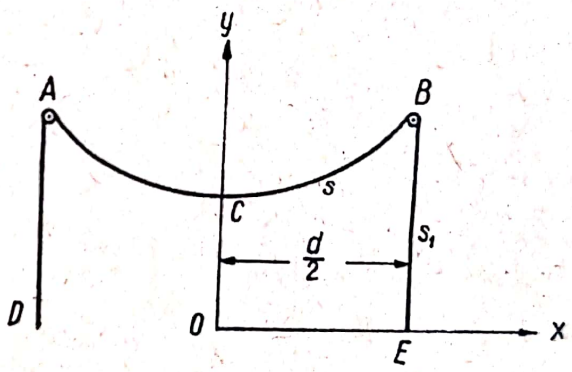


Fig. 10.6

capetele D și E fiind pe axa Ox a lănțișorului.

Notînd $CB = s$, lungimea firului este:

$$l = 2(s + y_B)$$

iar din (10.6) și (10.8):

$$l = 2ae^{\frac{d}{2a}}. \qquad (1)$$

Valoarea parametrului a pentru care lungimea este minimă se obține din:

$$\frac{dl}{da} = 2e^{\frac{d}{2a}} - \frac{d}{a}e^{\frac{d}{2a}} = 0 \qquad a = \frac{d}{2}.$$

Pentru această valoare avem într-adevăr un minim căci $\frac{d^2l}{da^2} = \frac{d^2}{2a^3}e^{\frac{a}{2a}} > 0$

Înlocuind în (1) rezultă:

$$l_{min} = d \cdot e \approx 2{,}718\ d.$$

10.7. Un fir omogen și greu este suspendat în două puncte situate pe aceeași orizontală, distanța dintre puncte fiind $2x$. Să se determine lungimea $2s$ a firului pentru care tensiunea T din capătul firului este minimă.

Rezolvare. Din (10.10′) și (10.8) avem:

$$T = p\ a\ \mathrm{ch}\frac{x}{a}$$

$$s = a\ \mathrm{sh}\frac{x}{a}.$$

Pentru ca tensiunea să fie minimă trebuie ca:

$$\frac{dT}{ds} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{d^2T}{ds^2} \geqslant 0.$$

Însă:

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{da} \cdot \frac{da}{ds} = \frac{p}{a}\left(a\ \mathrm{ch}\frac{x}{a} - x\ \mathrm{sh}\frac{x}{a}\right)\frac{a}{a\ \mathrm{sh}\frac{x}{a} - x\ \mathrm{ch}\frac{x}{a}} =$$

$$= p\,\frac{a\ \mathrm{ch}\frac{x}{a} - x\ \mathrm{sh}\frac{x}{a}}{a\ \mathrm{sh}\frac{x}{a} - x\ \mathrm{ch}\frac{x}{a}}.$$

Notînd $\frac{x}{a} = \alpha$, tensiunea va fi minimă pentru:

$$\frac{\mathrm{ch}\ \alpha - \alpha\ \mathrm{sh}\ \alpha}{\mathrm{sh}\ \alpha - \alpha\ \mathrm{ch}\ \alpha} = 0$$

adică pentru:

$$\mathrm{th}\ \alpha = \frac{1}{\alpha}. \tag{1}$$

Pentru valoarea α dată de ecuația transcendentă (1) cititorul poate verifica că $\frac{d^2T}{ds^2} \geqslant 0$ deci într-adevăr tensiunea este minimă. Ținînd seama că:

$$\mathrm{sh}\ \alpha = \frac{\mathrm{th}\ \alpha}{\sqrt{1 - \mathrm{th}^2\ \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \qquad \mathrm{ch}\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{th}^2\ \alpha}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

valorile tensiunii minime și ale lungimii corespunzătoare ale firului sînt:

$$T_{min} = \frac{px}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \tag{2}$$

$$s = \frac{x}{\alpha\sqrt{\alpha^2 - 1}} \tag{3}$$

unde α este dat de ecuația (1). Cum:

$$\alpha \approx 1{,}2$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă:

$$T_{min} \approx 1{,}508\ px$$

$$s \approx 1{,}256\ x.$$

Distanța $2x$ dintre doi stîlpi fiind dată, aceasta este lungimea optimă de cablu $2s$ pentru obținerea tensiunii minime.

10.8. Un cablu de lungime $2l$ și greutate p pe unitatea de lungime suspendat în două puncte A și A' situate pe aceeași orizontală suportă la mijlocul său B o sarcină concentrată P, săgeata în acest punct fiind f. Să se determine tensiunile din punctele A și B, unghiurile de înclinare α și β ale firului și distanța $AA' = 2d$ (fig. 10.8 *a*).

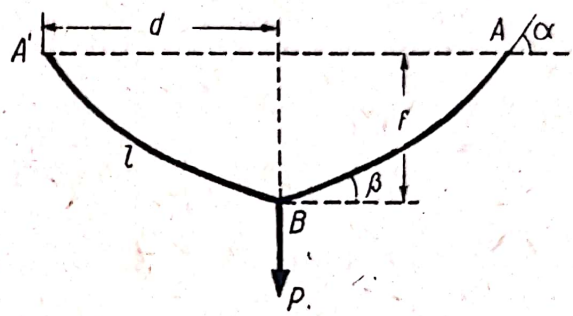


Fig. 10.8 *a*

Rezolvare. Izolînd o jumătate de fir (fig.10.8 *b*) și scriind ecuațiile de echilibru și ecuația (10.10) obținem:

$$X = T_A \cos \alpha - T_B \cos \beta = 0$$

$$Y = T_A \sin \alpha - T_B \sin \beta - pl = 0$$

$$T_A - T_B = p\,(y_A - y_B) = pf$$

iar izolînd punctul B obținem:

$$T_B = \frac{P}{2 \sin \beta}.$$

Rezolvînd sistemul obținem:

$$T_A = \frac{Pl + p\,(l^2 + f^2)}{2f} \qquad T_B = \frac{Pl + p\,(l^2 - f^2)}{2f}$$

$$\sin \alpha = \frac{(P + 2pl)\,f}{Pl + p\,(l^2 + f^2)} \qquad \sin \beta = \frac{Pf}{Pl + p\,(l^2 - f^2)}.$$

Pentru a determina distanța $d = x_A - x_B$ din (10.9) și (10.10′) avem:

$$\operatorname{sh} \frac{x_A}{a} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{(P + 2\,pl)\,f}{\sqrt{(l^2 - f^2)\,[(P + pl)^2 - p^2 f^2]}}, \qquad \operatorname{ch} \frac{x_A}{a} = \frac{T_A}{pa},$$

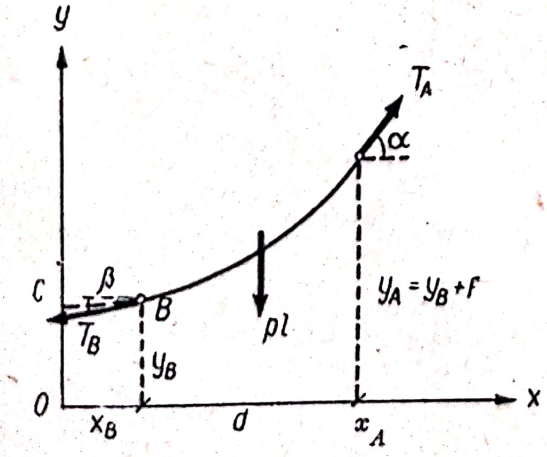


Fig. 10.8 *b*

$$\operatorname{sh} \frac{x_B}{a} = \operatorname{tg} \beta =$$

$$= \frac{Pf}{\sqrt{(l^2 - f^2)\,[(P + pl)^2 - p^2 f^2]}}, \quad \operatorname{ch} \frac{x_B}{a} = \frac{T_B}{pa}.$$

Însă din (10.7) și (10.5):

$$a = \frac{H}{p} = \frac{T_A \cos \alpha}{p} =$$

$$= \frac{\sqrt{(l^2 - f^2)\,[(P + pl)^2 - p^2 f^2]}}{2pf}$$

Scanned with OKEN Scanner

și ținînd seama de valorile lui T_A, T_B și a și de (10.11) obținem:

$$e^{\frac{x_A}{a}} = \frac{(l+f)\,[P+p\,(l+f)]}{\sqrt{(l^2-f^2)\,[(P+pl)^2-p^2f^2]}} \qquad e^{\frac{x_B}{a}} = \frac{(l+f)\,[P+p\,(l-f)]}{\sqrt{(l^2-f^2)\,(P+pl)^2-p^2f^2}}$$

iar:

$$d = x_A - x_B = a\left[\ln\frac{(l+f)\,[P+p\,(l+f)]}{\sqrt{(l^2-f^2)\,[(P+pl)^2-p^2f^2]}} - \ln\frac{(l+f)\,[P+p\,(l-f)]}{\sqrt{(l^2-f^2)\,[(P+pl)^2-p^2f^2)]}}\right]$$

deci:

$$2d = \frac{\sqrt{(l^2-f^2)\,[(P+pl)^2-p^2f^2]}}{pf}\ln\frac{P+p\,(l+f)}{P+p\,(l-f)}.$$

Dacă nu acționează forța, P, $P=0$ se obține:

$$2d = \frac{l^2-f^2}{f}\ln\frac{l+f}{l-f}$$

același rezultat cu cel obținut la problema (10.4), relația (2).

10.9. Un cablu avînd greutatea $p = 0{,}6$ kgf/m și lungimea $L = 61{,}6$ m este suspendat în două puncte A și B situate pe aceeași orizontală. Cunoscîndu-se săgeata $f = 6$ m a cablului, să se determine distanța $AB = l$ dintre punctele de suspensie, tensiunea H din punctul cel mai de jos și tensiunea maximă T. Se vor folosi formulele exacte (10.6)...(10.10) și cele aproximative (10.13) ... (10.15) și se vor compara rezultatele.

Rezolvare. În problema (10.4) s-a determinat distanța dintre punctele de suspensie ale lănțișorului precum și tensiunile H și T [formulele (2) și (1)]. Expresiile lor, ținînd seama de notațiile din problema noastră sînt:

$$l = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - f^2}{f}\ln\frac{\frac{L}{2}+f}{\frac{L}{2}-f}$$

$$T = p\,\frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2+f^2}{2f} \qquad H = p\,\frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2-f^2}{2f}.$$

Făcînd înlocuirile numerice obținem:

$$l = \frac{(30{,}8)^2-6^2}{6}\ln\frac{30{,}8+6}{30{,}8-6} = 152{,}107\ \ln 1{,}4838 = 152{,}107\cdot 0{,}394 = 59{,}93\ \text{m}$$

$$T = 0{,}6\,\frac{(30{,}8)^2+6^2}{2\cdot 6} = 49{,}232\ \text{kgf}$$

$$H = 0{,}6\,\frac{(30{,}8)^2-6^2}{2\cdot 6} = 45{,}632\ \text{kgf}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum raportul $\frac{f}{l} \approx \frac{1}{10}$ firul intră în categoria firelor foarte întinse. Folosind formule aproximative din (10.15) avem:

$$3l^2 - 3l\,L + 8\,f^2 = 0 \qquad l = \frac{3\,L + \sqrt{9L^2 - 96\,f^2}}{6} = 60 \text{ m}$$

soluția cu semnul minus în fața radicalului neavînd sens căci dă pentru l o valoare mai mică decît f, adică ar rezulta că firul nu este întins și deci nici formula (10.15) nu ar fi aplicabilă.

Din formulele (10.13) și (10.14) obținem:

$$H = \frac{pl^2}{8f} = 45 \text{ kgf} \qquad T = \frac{pl^2}{8f}\sqrt{1 + \frac{16\,f^2}{l^2}} = 48{,}465 \text{ kgf.}$$

Diferențele obținute prin cele două metode sînt pentru distanța l între punctele de suspensie de 0,12% iar pentru tensiuni de 1,4...1,6%. De aceea în general în cazul firelor întinse se preferă să se folosească formulele aproximative, considerînd că firul ia forma unei parabole.

10.10. Un cablu electric de înaltă tensiune de cupru avînd diametrul $d = 1$ cm este suspendat pe stîlpi la distanța $l = 200$ m. Terenul fiind orizontal fără denivelări, să se determine înălțimea stîlpilor știind că regulile de securitate impun o înălțime minimă $h_1 = 20$ m a cablului deasupra solului, iar tensiunea maximă nu trebuie să depășească $T_{max} = 500$ kgf. Greutatea specifică a cuprului este $\gamma = 8{,}9$ kgf/dm³.

Rezolvare. Deoarece cablurile de înaltă tensiune au săgeata f mică în raport cu deschiderea l, greutatea cablului poate fi considerată ca o sarcină uniform distribuită pe orizontală, curba de echilibru a firului fiind o parabolă.

Greutatea unui metru de cablu este:

$$p = \gamma \frac{\pi d^2}{4} \times 1 = 8{,}9 \times 10^3 \times \frac{\pi \cdot 0{,}01^2}{4} \times 1 = 0{,}7 \text{ kgf/m.}$$

Din formula (10.14) avem:

$$H = \sqrt{T^2 - \left(\frac{pl}{2}\right)^2} = \sqrt{500^2 - 70^2} = 495 \text{ kgf.}$$

Săgeata firului va fi dată de (10.13):

$$f = \frac{pl^2}{8H} = 7{,}07 \text{ m.}$$

Raportul $\frac{f}{l} = \frac{7{,}07}{200} \approx \frac{1}{28}$ deci firul este foarte întins.

Înălțimea stîlpilor va fi:

$$h = h_1 + f = 20 + 7{,}07 \text{ m} \approx 27 \text{ m.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Lungimea cablului va fi dată de (10.15):

$$L = l + \frac{8f^2}{3l} = 200 + \frac{8 \times 7{,}07^2}{3 \times 200} = 200{,}667 \text{ m}.$$

10.11. Un cablu electric de înaltă tensiune din oţel avînd aria secţiunii $A = 3{,}2$ cm², greutatea pe unitatea de lungime $p = 2{,}5$ kgf/m, coeficientul de dilatare liniară $\alpha = 11.10^{-6}$, modulul de elasticitate longitudinal $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm² şi tensiunea maximă admisibilă $H = 6\,400$ kgf este suspendat pe stîlpi la distanţa $l = 250$ m. Să se determine înălţimea stîlpilor ştiind că înălţimea cablului deasupra solului este 20 m. Calculul se va face în următoarele ipoteze:

Temperatura mediului ambiant : cea mai scăzută $\theta = -30°$ C ($p = 2{,}5$ kgf/m), cea mai ridicată $\theta_1 = +40$ °C ($p_1 = 2{,}5$kgf/m), cînd apare chiciura $\theta_2 = -5$°C ($p_2 = 4{,}3$ kgf/m, deoarece cablul este acoperit cu un strat de chiciură de 1,7 cm grosime).

Temperatura la montaj: $\theta_3 = +15$°C ($p_3 = 2{,}5$ kgf/m) Temperatura cea mai ridicată a conductorului: $\theta_4 = +70$°C ($p_4 = 2{,}5$ kgf/m).

Rezolvare. Cablul fiind foarte întins vom putea presupune că tensiunea $T \approx H$. În general tensiunea este maximă fie la temperatura cea mai scăzută, fie cînd cablul este acoperit de chiciură. Vom presupune că tensiunea este maximă în prima situaţie, adică pentru $\theta = -30$°C, $p = 2{,}5$ kgf/m avem $H = 6\,400$ kgf.

Aplicînd ecuaţia de stare (10.16):

$$\frac{pl^2}{24H^2} - \frac{p_i l^2}{24H_i^2} = \alpha(\theta - \theta_i) + \beta(H - H_1) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

unde:

$$\beta = \frac{1}{AE} = \frac{1}{6{,}4} \cdot 10^{-6} \text{ kgf}^{-1}$$

determinăm tensiunile $H_i (i = 1, 2, 3, 4)$.

Astfel la temperatura cea mai ridicată $\theta_1 = +40$°C ($i = 1$) avem:

$$\frac{2{,}5 \times 250^2}{24 \times 6\,400^2} - \frac{2{,}5 \times 250^2}{24 \times H_1^2} = 11.10^{-6}(-30 - 40) + \frac{1}{6{,}4} 10^{-6} (6\,400 - H_1)$$

de unde:

$$H_1 = 3\,625 \text{ kgf}.$$

Analog cînd apare chiciura:

$$H_2 = 5\,773 \text{ kgf} < 6\,400 \text{ kgf}$$

deci tensiunea este mai mare la temperatura cea mai scăzută.

Scanned with OKEN Scanner

La montaj:

$$H_3 = 4\,384 \text{ kgf}$$

iar cînd conductorul este în bătaia razelor soarelui, $\theta_4 = +70°$ tensiunea

$$H_4 = 2\,993 \text{ kgf}.$$

Cu ajutorul ecuației (10.13) obținem săgețile corespunzătoare:

$$f_i = \frac{p_i l^2}{8H_i}$$

și anume:

$f = 3{,}052$ m, $f_1 = 5{,}388$ m, $f_2 = 5{,}819$ m, $f_3 = 4{,}455$ m și $f_4 = 6{,}526$ m.

Săgeata este maximă cînd conductorul este în bătaia razelor soarelui $f_4 = 6{,}526$ m și deci înălțimea stîlpilor este $h = 20 + 6{,}526 \approx 26{,}5$ m. Dacă conductorul este ferit de razele soarelui, săgeata este maximă iarna, cînd conductorul este acoperit de chiciură $f_2 = 5{,}819$ m, iar $h = 20 + 5{,}819 \approx 25{,}8$ m.

Lungimea conductorului în cele cinci situații considerate se obține cu ajutorul relației (10.15):

$$L_i = l + \frac{8f_i^2}{3l}$$

și anume:

$L = 250{,}099$ m, $L_1 = 250{,}309$ m, $L_2 = 250{,}362$ m, $L_3 = 250{,}212$ m și

$$L_4 = 250{,}454 \text{ m}$$

deci lungimea la montaj este:

$$L_3 = 250{,}212 \text{ m}$$

iar săgeata la montaj este:

$$f_3 = 4{,}455 \text{ m}.$$

Observăm că la variații mici ale lungimii firului corespund variații mari ale săgeții deoarece firul este foarte întins. Astfel:

$$\Delta L = L_4 - L = 0{,}355 \text{ m} \quad \text{iar} \quad \Delta f = f_4 - f = 3{,}474 \text{ m}.$$

10.12. Firul $ABCD$ (fig. 10.12*a*) suportă o sarcină uniform distribuită p pe orizontală pe porțiunea centrală $BC = \frac{AD}{2}$, $(AD = 2l)$. Cunoscînd săgeata h a firului să se determine legea de variație a tensiunii din fir, săgeata f a porțiunii BC și lungimea L a firului.

Rezolvare. Izolînd o bucată de fir OP (fig. 10.12 *b*) unde O este punctul cel mai de jos al firului și $P(x, y)$ un punct oarecare cuprins între O și C și scriind ecuațiile de echilibru (10.4) :

$$X = T\cos\alpha - H = 0$$

$$Y = T\sin\alpha - px = 0$$

$$M_P = -Hy + \frac{px^2}{2} = 0$$

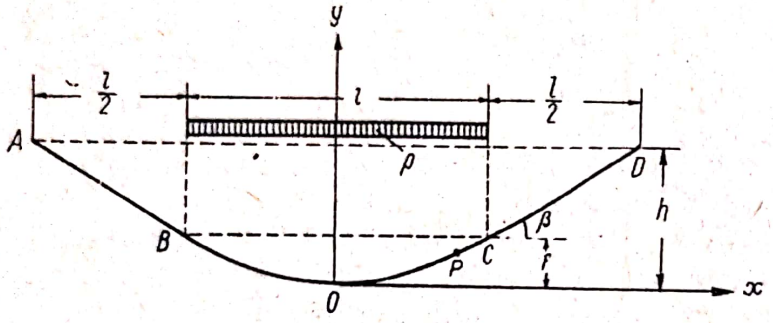


Fig. 10.12 *a*

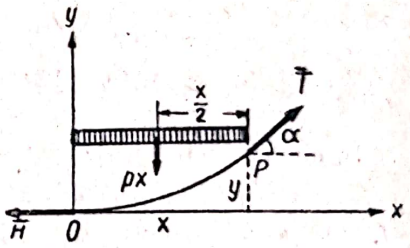


Fig.10.12 *b*

obținem:

$$y = \frac{px^2}{2H} \tag{1}$$

deci firul ia forma unei parabole, iar tensiunea:

$$T = \sqrt{H^2 + p^2 x^2}. \tag{2}$$

Unghiul de înclinare al firului este dat de:

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = \frac{px}{H} \tag{3}$$

relație ce se obține fie direct din ecuațiile de echilibru, fie prin derivarea ecuației (1). Pentru porțiunile de fir AB și CD, cum încărcarea $\bar{p} = 0$ din (10.1) rezultă că tensiunea este constantă și anume:

$$\overline{T}_{CD} = \overline{T}_C \qquad \overline{T}_{AB} = \overline{T}_D$$

și deci firul este rectiliniu, unghiul de înclinare al firului fiind:

$$\beta = \alpha_C$$

adică:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{pl}{2H} \tag{4}$$

Cum săgeata este:

$$h = f + \frac{l}{2}\operatorname{tg}\beta$$

Scanned with OKEN Scanner

unde din (1):

$$f = y_C = \frac{pl^2}{8H} \tag{5}$$

rezultă:

$$h = \frac{pl^2}{8H} + \frac{pl^2}{4H} = \frac{3pl^2}{8H}$$

$$H = \frac{3pl^2}{8h}.$$

Înlocuind în relațiile (1)... (5) rezultă:

$$y = \frac{4}{3}\frac{h}{l^2}x^2 \qquad \operatorname{tg}\alpha = y' = \frac{8h}{3l^2}x \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{4h}{3l}$$

$$T = p\sqrt{\left(\frac{3l^2}{8h}\right)^2 + x^2} \quad \left(|x| \leqslant \frac{l}{2}\right) \qquad T_{CD} = T_{AB} = T_C = \frac{pl}{2}\sqrt{\left(\frac{3l}{4h}\right)^2 + 1}$$

$$f = \frac{h}{3}.$$

Lungimea firului este:

$$L = L_{BC} + 2L_{CD}$$

unde din (10.15):

$$L_{BC} = l + \frac{8f^2}{3l} = l + \frac{8h^2}{27l}$$

iar:

$$L_{CD} = \frac{l}{2\cos\beta} = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{2h}{3}\right)^2}$$

deci:

$$L = l + \frac{8h^2}{27l} + 2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{2h}{3}\right)^2}$$

10.13. O lampă de greutate $P = 20$ kgf este suspendată de un inel O cu ajutorul a două fire OA înclinat sub un unghi de $\frac{\pi}{4}$ radiani și OB înfășurat peste un disc fix, de capătul firului atîrnînd o greutate $Q = 10$ gf (fig. 10.13 *a*). Cunoscînd coeficientul de frecare $f = 0{,}2$ dintre fir și disc să se determine numărul n de înfășurări ale firului peste disc, pentru ca sistemul să fie în echilibru.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Izolînd punctul O putem determina tensiunile T_1 și T_2 din firele OA și OB (fig. 10.13, *b*). Ecuațiile de proiecții sînt:

$$X = T_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - T_2 = 0$$

$$Y = T_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - P = 0$$

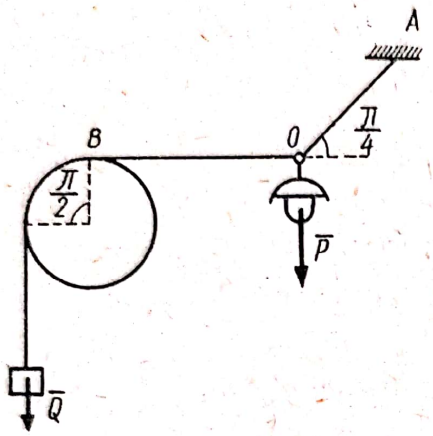


Fig. 10.13 *a*

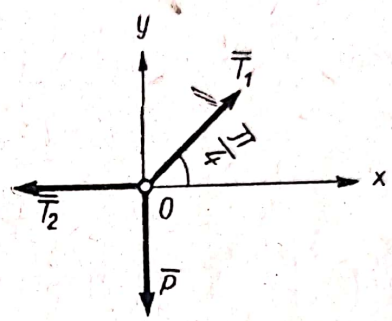


Fig. 10.13 *b*

de unde:

$$T_1 = P\sqrt{2} \text{ și } T_2 = P.$$

Tensiunile la capetele firului înfășurat pe disc sînt deci Q și $T_2 = P$ și cum $T_2 > Q$ conform (10.17) trebuie ca:

$$T_2 \leqslant Q\, e^{f\theta} \tag{1}$$

unde unghiul de înfășurare este:

$$\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}\,.$$

Făcînd înlocuirile numerice în ecuația (1) avem:

$$20 \leqslant 0{,}01\; e^{0{,}2\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

de unde:

$$n \geqslant \frac{\ln 2\,000 - 0{,}1\,\pi}{0{,}4\,\pi} = 5{,}8$$

și cum numărul de înfășurări este întreg $n = 6$. În acest caz echilibrul este posibil și pentru alte valori ale lui Q. Ca greutatea Q să nu se ridice trebuie îndeplinită relația (1) adică:

$$Q \geqslant \frac{20}{e^{0{,}2\left(12\pi + \frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{20}{2\,580}\ \text{kgf} = 7{,}75\ \text{gf}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ca greutatea Q să nu coboare în jos trebuie ca:

$$Q \leqslant T_2 e^{f\theta}$$

deci:

$$Q \leqslant 20\, e^{0{,}2\left(12\,\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = 20 \times 2\,580 \text{ kgf} = 51{,}6 \text{ tf}.$$

În aceste condiții lampa poate fi menținută în echilibru cu o greutate Q cuprinsă între 7,75 gf și 51,6 tf. Din acest exemplu se poate vedea ce efect mare poate avea frecarea unui fir înfășurat pe un disc.

10.14. O frînă acționează asupra arborelui unei roți de rază r, banda de frînare fiind acționată de pîrghia DAB_1B_2 din fig. 10.14 *a*. Cunoscînd momentul cuplului motor M care acționează asupra roții, dimensiunile a și b ale pîrghiei și coeficientul de frecare f dintre banda de frînare și arbore, să se determine forța F necesară pentru a menține arborele în echilibru. Greutatea proprie a dispozitivului de frînare este neglijabilă. Aplicație numerică: $M = 30$ kgf m, $a = 80$ cm, $b = 5$ cm, $R = 20$ cm, $f = 0{,}25$.

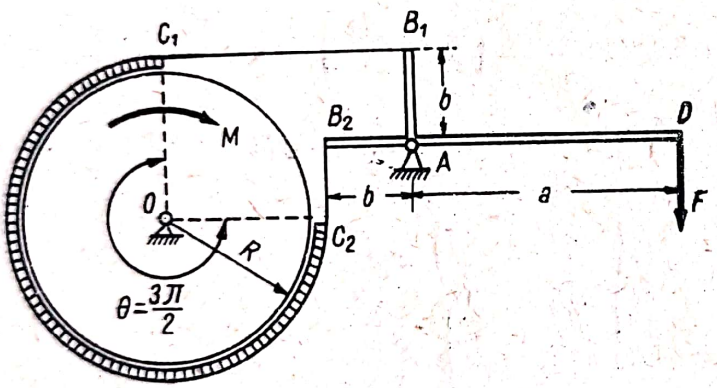


Fig. 10.14 *a*

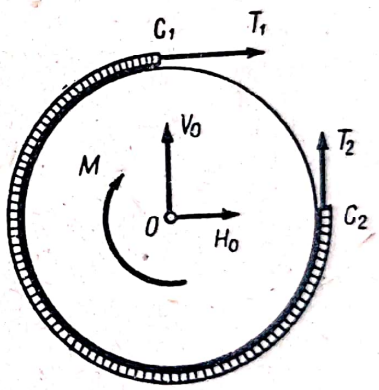


Fig. 10.14 *b*

Rezolvare. Izolînd corpurile, forțele care acționează asupra lor sînt reprezentate în figura 10.14 *b* și *c*. (S-a presupus că arborele se rotește în sensul acelor de ceasornic.) Scriind ecuațiile de momente față de articulația O pentru arbore și față de articulația A pentru pîrghie eliminăm reacțiunile din articulații:

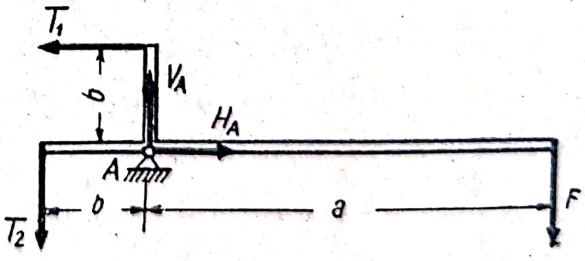


Fig. 10.14 *c*

$$M_0 = -M - T_1R + T_2R = 0 \tag{1}$$

$$M_A = T_1 b + T_2 b - Fa = 0. \tag{2}$$

Ținînd seama de (10.17), cum din ecuația (1) rezultă $T_2 > T_1$ în poziția limită de echilibru:

$$T_2 = T_1 e^{\frac{3\,\pi f}{2}} \qquad \left(\theta = \frac{3\pi}{2}\right). \tag{3}$$

Din ecuațiile (1)... (3) rezultă:

$$T_1 = \frac{M}{R\left(e^{\frac{3\pi f}{2}} - 1\right)} \qquad T_2 = \frac{Me^{\frac{3\pi f}{2}}}{R\left(e^{\frac{3\pi f}{2}} - 1\right)}$$

$$F = \frac{bM\left(e^{\frac{3\pi f}{2}} + 1\right)}{aR\left(e^{\frac{3\pi f}{2}} - 1\right)}$$

Făcînd înlocuirile numerice rezultă: $F = \frac{0{,}05 \times 30 \times (3{,}25 + 1)}{0{,}8 \times 0{,}2 \times (3{,}25 - 1)} = 17{,}7$ kgf.

Dacă roata se rotește în sens invers, ecuația de momente față de O devine:

$$M_0 = M - T_1R + T_2R = 0 \qquad (1')$$

deci $T_1 > T_2$ iar condiția (10.17) se va scrie:

$$T_1 = T_2 e^{\frac{3\pi}{2} f} \qquad \left(\theta = \frac{3\pi}{2}\right). \qquad (3')$$

Rezolvînd ecuațiile (1), (2), și (3') obținem aceeași valoare pentru F, deci pentru echilibru:

$$F \geqslant \frac{bM\left(e^{\frac{3\pi}{2} f} + 1\right)}{aR\left(e^{\frac{3\pi}{2} f} - 1\right)}$$

indiferent de sensul cuplului motor, frîna fiind reversibilă.

Pentru ca forța de frînare să ia valori cît mai mici trebuie ca raportul dintre brațele pîrghiei $\frac{b}{a}$ să fie cît mai mic. Mărirea coeficientului de frecare dintre bandă și arbore nu duce la micșorare considerabilă a forței de frînare căci:

$$\lim_{f \to \infty} \frac{e^{f\theta} + 1}{e^{f\theta} - 1} = 1$$

iar:

$$\lim_{f \to \infty} F = \frac{bM}{aR}$$

10.15. Două sfere mici A și B fiecare de greutate P sînt legate printr-un fir inextensibil și așezate pe un cilindru fix. Cunoscînd unghiul

Scanned with OKEN Scanner

la centru θ al arcului AB, unghiul de frecare φ al sferelor pe cilindru și coeficientul de frecare f dintre fir și cilindru, pentru ce valori ale unghiului α (figura 10.15 *a*) este posibil echilibrul.

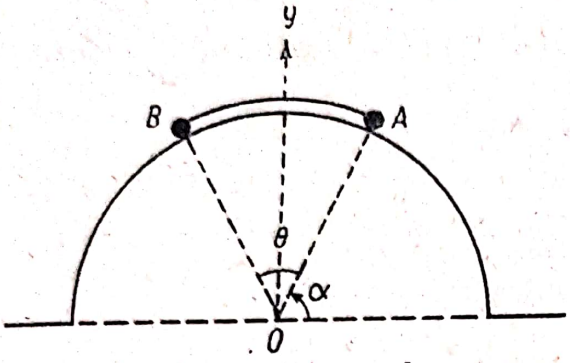


Fig. 10.15 *a*

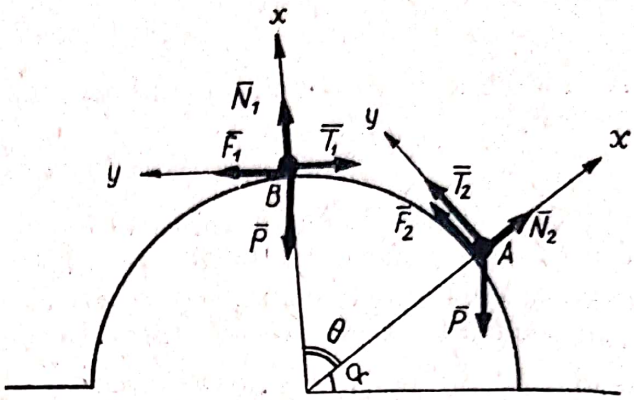


Fig. 10.15 *b*

Rezolvare. În poziția de echilibru limită cînd sfera A tinde să lunece în jos, izolînd sferele, forțele care acționează asupra lor sînt reprezentate în fig. 10.15 *b*.

Condițiile de echilibru din punctul A sînt:

$$X = N_2 - P \sin \alpha = 0$$

$$Y = T_2 + F_2 - P \cos \alpha = 0$$

unde forța de frecare este:

$$F_2 = N_2 \operatorname{tg} \varphi.$$

În punctul B condițiile de echilibru sînt:

$$X = N_1 - P \sin (\alpha + \theta)$$

$$Y = -T_1 + F_1 - P \cos (\alpha + \theta)$$

$$F_1 = N_1 \operatorname{tg} \varphi.$$

Din aceste ecuații obținem tensiunile din fir:

$$T_2 = \frac{P \cos (\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} \qquad T_1 = \frac{P \cos (\pi - \theta - \alpha - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Cum tendința de lunecare este de la B spre A, $T_2 > T_1$ și conform (10.17) în poziția limită:

$$T_2 = T_1 e^{f\theta}.$$

Făcînd înlocuirile rezultă:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e^{f\theta} \cos (\theta + \varphi) + \cos \varphi}{e^{f\theta} \sin (\theta + \varphi) + \sin \varphi}. \qquad (1)$$

A doua poziție limită se poate obține înlocuind în (1) unghiul φ prin $-\varphi$ și coeficientul f prin $-f$, adică:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{e^{-f\theta}\cos(\theta-\varphi)+\cos\varphi}{e^{-f\theta}\sin(\theta-\varphi)-\sin\varphi}. \qquad (2)$$

Notînd cu α_1 și α_2 valorile lui arctg α date de (1) și (2) echilibrul este posibil pentru:

$$\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2 .$$

Printr-un calcul elementar se vede că $\alpha_2 = \pi - (\alpha_1 + \theta)$ rezultat evident din cauză că sferele A și B sînt identice și deci pozițiile limită corespunzătoare sînt simetrice în raport cu axa Oy din fig. 10.15 *a*.

Dacă nu există frecare între fir și cilindru, $f = 0$ atunci:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\cos(\theta+\varphi)+\cos\varphi}{\sin(\theta+\varphi)+\sin\varphi} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}-\varphi\right)$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}+\varphi\right)$$

de unde:

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}-\varphi \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}+\varphi$$

iar dacă și $\varphi = 0$ rezultă:

$$\alpha = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

10.16. Un fir avînd greutatea q pe unitatea de lungime este înfășurat pe un disc fix de rază R, porțiunea BC de lungime l atîrnînd de pe disc, ca în fig. 10.16 *a*. Cunoscînd coeficientul de frecare $f = \operatorname{tg}\varphi$ dintre fir și disc să se determine valoarea maximă a lungimii l ca echilibrul să fie posibil.

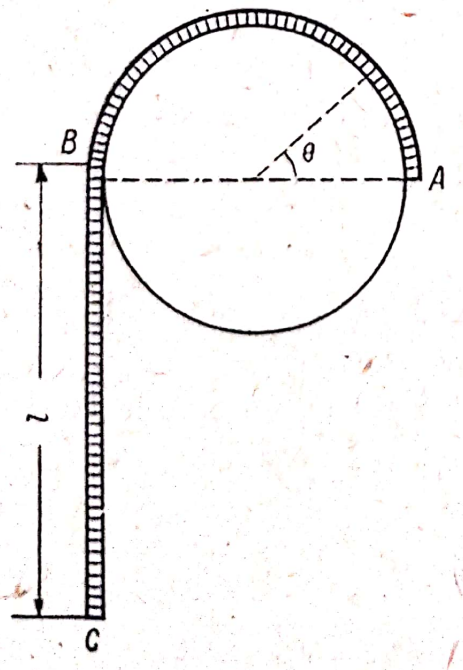


Fig. 10.16 *a*

Rezolvare. Forța elementară care acționează asupra unității de lungime din firul AB este:

$$\bar{p} = \bar{q} + \bar{n} + \bar{t}$$

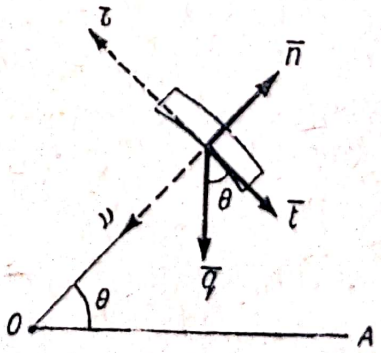


Fig. 10.16 *b*

unde n este rezultanta reacțiunilor normale ce se exercită asupra firului datorită discului, iar t rezultanta forțelor de frecare (fig. 10.16 *b*). Folosind ecuația generală de echilibru a firelor proiectată pe tangenta τ și normala principală ν la fir (10.3):

$$\frac{dT}{ds} + p_\tau = 0 \qquad \frac{T}{\rho} + p_\nu = 0$$

unde raza de curbură $\rho = R$ avem:

$$\frac{dT}{ds} - t - q\cos\theta = 0 \tag{1}$$

$$\frac{T}{R} - n + q\sin\theta = 0. \tag{2}$$

În poziția limită de echilibru:

$$t = fn \tag{3}$$

Cum $ds = R\,d\theta$ eliminînd pe n și t din ecuațiile (1), (2) și (3) obținem:

$$\frac{dT}{d\theta} - fT = qR\,(\cos\theta + f\sin\theta). \tag{4}$$

Integrala generală a ecuației diferențiale liniare cu coeficienți constanți și parte dreaptă (4) este de forma:

$$T = Ce^{f\theta} + T_0$$

unde soluția particulară T_0 este de forma:

$$T_0 = A\cos\theta + B\sin\theta. \tag{5}$$

Înlocuind expresia (5) în (4) se determină coeficienții:

$$A = -\frac{2f}{1+f^2}qR = -qR\sin 2\varphi \qquad B = \frac{1-f^2}{1+f^2}qR = qR\cos 2\varphi$$

deci:

$$T = Ce^{f\theta} + qR\sin(\theta - 2\varphi). \tag{6}$$

Din condiția la limită din punctul A:

$$\theta = 0 \qquad T = 0$$

determinăm constanta:

$$C = qR\sin 2\varphi$$

deci:

$$T = qR\sin 2\varphi\, e^{f\theta} + qR\sin(\theta - 2\varphi). \tag{7}$$

În punctul B:

$$\theta = \pi; \qquad T = ql$$

Scanned with OKEN Scanner

și înlocuind în ecuația (7) obținem valoarea lungimii l în poziția de echilibru limită:

$$l = R \sin 2\varphi \, (e^{f\pi} + 1).$$

10.17. Pe două plane înclinate sub unghiurile α și β se găsește un lanț omogen greu de lungime l. Cunoscînd unghiul de frecare φ dintre lanț și cele două plane și neglijînd frecarea pe curba de racordare a planelor, să se determine valorile lungimii l_1 (fig. 10.17 *a*) pentru care este posibil echilibrul.

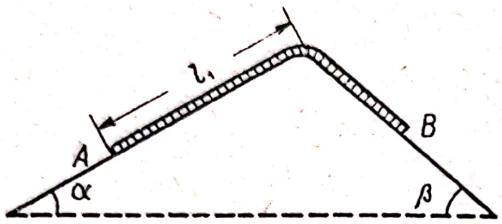


Fig. 10.17 *a*

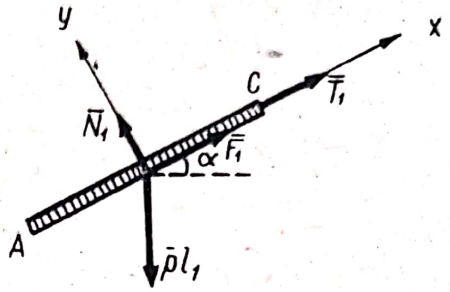


Fig.10.17 *b*

Rezolvare. Presupunînd că tendința de lunecare a capătului A al lanțului este în jos, forțele care acționează asupra porțiunilor AC și CB de lanț sînt reprezentate în fig. 10.17 *b* și *c*. Scriind ecuațiile de proiecții:

$$X = T_1 + F_1 - pl_1 \sin\alpha = 0$$
$$Y = N_1 - pl_1 \cos\alpha = 0$$
$$X = T_2 - F_2 - p\,(l - l_1) \sin\beta = 0$$
$$Y = N_2 - p\,(l - l_1) \cos\beta = 0$$

și condițiile de frecare la limită:

$$F_1 = N_1 \operatorname{tg}\varphi$$
$$F_2 = N_2 \operatorname{tg}\varphi.$$

Obținem tensiunile:

$$T_1 = \frac{pl_1 \sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi} \qquad T_2 = \frac{p\,(l - l_1) \sin(\beta + \varphi)}{\cos\varphi}.$$

Însă în vecinătatea punctului C putem considera că tensiunea variază foarte puțin în modul (căci neglijăm frecarea pe curba de racordare a planelor) deci $T_1 = T_2$ de unde în poziția limită:

$$l_1 = \frac{l \sin(\beta + \varphi)}{\sin(\alpha - \varphi) + \sin(\beta + \varphi)}.$$

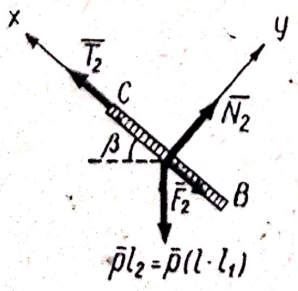


Fig. 10.17 *c*

În cea de-a doua poziție limită cînd capătul B lunecă în jos:

$$l_1 = \frac{l \sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi) + \sin(\beta - \varphi)}$$

deci echilibrul este posibil pentru:

$$\frac{l \sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi) + \sin(\beta - \varphi)} \leqslant l_1 \leqslant \frac{l \sin(\beta + \varphi)}{\sin(\alpha - \varphi) + \sin(\beta + \varphi)}. \qquad (1)$$

Dacă planele sînt lucii $\varphi = 0$ deci:

$$l_1 = \frac{l \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}.$$

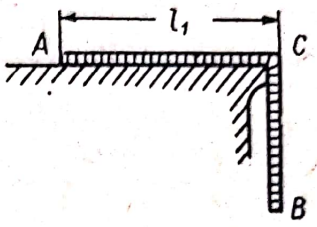


Fig. 10.17 *d*

Ca un caz particular se poate considera cazul unui lanț care atîrnă de pe un plan orizontal (fig. 10.17 *d*). Făcînd pe $\alpha = 0$ și $\beta = \frac{\pi}{2}$ din prima inegalitate (1) rezultă:

$$l_1 \geqslant \frac{l \cos \varphi}{\sin \varphi + \cos \varphi} = \frac{l}{1 + \operatorname{tg} \varphi}$$

a doua inegalitate neavînd sens căci capătul B nu poate luneca în sus.

10.18. Un fir greu neomogen este suspendat în două puncte. Cunoscînd legile de variație ale greutății p pe unitatea de lungime și ale tensiunii T precum și tensiunea H din punctul cel mai de jos al firului, să se determine raza de curbură ρ a firului.

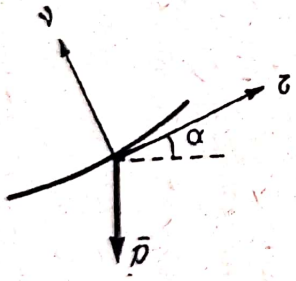


Fig. 10.18

Rezolvare. Notînd cu α unghiul dintre tangenta la fir și orizontală (fig. 10.18) ecuațiile (10.3) se pot scrie:

$$\frac{dT}{ds} - p \sin \alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{T}{\rho} - p \cos \alpha = 0. \qquad (2)$$

Însă din (10.5):

$$T \cos \alpha = H. \qquad (3)$$

Din (2) și (3) obținem raza de curbură:

$$\rho = \frac{T^2}{pH}.$$

10.19. Care este legea de variație a greutății unității de lungime a unui fir greu suspendat în două puncte A și B situate pe aceeași orizontală dacă curba de echilibru este un semicerc de rază r (fig. 10.19). Să se determine legea de variație a tensiunii. Se dă greutatea p_0 din punctul cel mai de jos C al firului.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Din ecuațiile (10.3) ținînd seama că $\rho = r$ avem:

$$\frac{dT}{ds} - p \sin\theta = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{T}{r} - p \cos\theta = 0. \qquad (2)$$

Eliminînd greutatea p între ecuațiile (1) și (2) și ținînd seama că arcul $ds = r\,d\theta$ obținem ecuația diferențială:

$$\frac{dT}{T} = \operatorname{tg}\theta\, d\theta. \qquad (3)$$

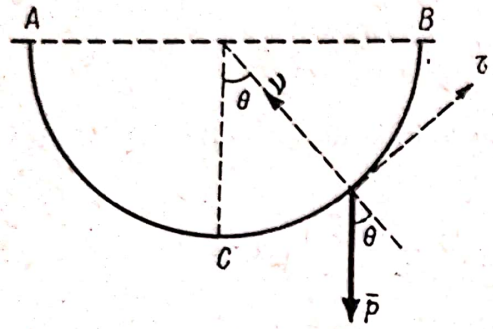


Fig. 10.19

Integrînd această ecuație, rezultă:

$$\ln T = -\ln\cos\theta + \ln C.$$

Punînd condițiile la limită:

$$\theta = 0 \qquad p = p_0 \qquad T = H = p_0 r$$

rezultă:

$$T = \frac{H}{\cos\theta} = \frac{p_0 r}{\cos\theta} \qquad (4)$$

rezultat ce se putea obține direct din ecuația (10.5) și înlocuind în (2) se obține:

$$p = \frac{p_0}{\cos^2\theta}. \qquad (5)$$

Practic firul nu va putea lua niciodată forma unui semicerc căci în punctele A și B din (4) și (5) avem:

$$\lim_{\theta \to +\frac{\pi}{2}} p = \infty \qquad \lim_{\theta \to \pm\frac{\pi}{2}} T = \infty.$$

10.20. Un fir greu este suspendat între două puncte A și B situate pe aceeași orizontală, $AB = l$. Știind că greutatea firului pe unitatea de lungime este $p = p_0 \cos\alpha$ unde p_0 este greutatea în punctul cel mai de jos C al firului, iar α este unghiul dintre tangenta la fir și orizontală și cunoscînd săgeata f a firului, să se determine curba de echilibru a firului.

Rezolvare. Considerînd sistemul de referință din fig. 10.20 ecuațiile de proiecții (10.2) sînt:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) - p = 0 \qquad (2)$$

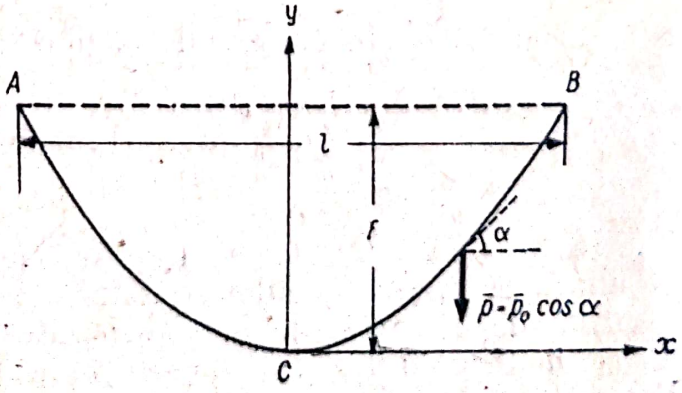


Fig. 10.20

Integrînd ecuația (1) obținem:

$$T\frac{dx}{ds} = H \tag{3}$$

unde constanta H este tensiunea din punctul cel mai de jos a firului. Înlocuind tensiunea:

$$T = H\frac{ds}{dx}$$

în ecuația (2) și ținînd seama că $p = p_0 \cos\alpha = p_0\frac{dx}{ds}$ obținem succesiv:

$$\frac{d}{ds}\left(H\frac{dy}{dx}\right) = p_0\frac{dx}{ds}$$

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{p_0}{H}dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p_0}{H}x + C$$

$$y = \frac{p_0 x^2}{2H} + Cx + C_1. \tag{4}$$

Cu sistemul de referință ales condițiile la limită sînt:

în punctul C: $\quad x = 0 \qquad y = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = 0$

de unde:

$$C = C_1 = 0;$$

în punctul B: $\quad x = \frac{l}{2} \qquad y = f$

de unde:

$$H = \frac{p_0 l^2}{8f}. \tag{5}$$

Ecuația curbei de echilibru a firului (4) este:

$$y = \frac{4f}{l^2}x^2 \tag{4'}$$

firul luînd forma unei parabole. Tensiunea este:

$$T = \frac{p_0 l^2}{8f}\sqrt{1 + \frac{64f^2x^2}{l^4}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

10.21. Se dă firul acționat de forțele din fig. 10.21 avînd dimensiunile indicate pe aceeași figură. Să se determine tensiunile din fir și săgețile din punctele B și D.

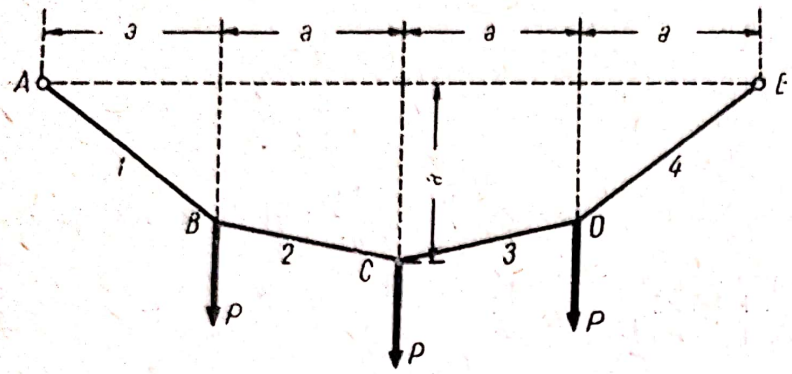


Fig. 10.21

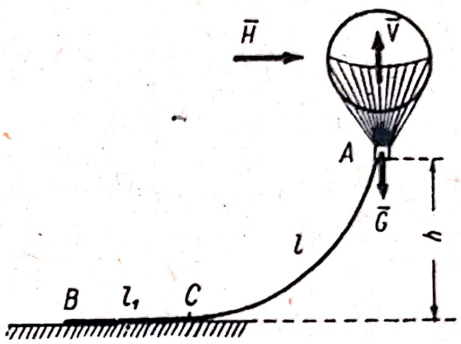


Fig. 10.22

Răspuns. $T_1 = T_4 = \frac{5P}{2}$, $T_2 = T_3 = \frac{P\sqrt{17}}{2}$, $f_B = f_D = \frac{3a}{4}$.

10.22. De un balon captiv de greutate $G = 320$ kgf avînd forța ascensională $V = 360$ kgf este atîrnat un cablu avînd greutatea $p = 0{,}2$ kgf/m. Cunoscînd presiunea vîntului $H = 30$ kgf, să se determine înălțimea h, la care se găsește balonul, lungimea l de cablu care s-a desprins de pe sol și lungimea l_1 de cablu care se găsește pe sol (fig. 10.22). Coeficientul de frecare dintre cablu și sol este $f = 0{,}4$.

Răspuns. $h = \frac{\sqrt{(V-G)^2 + H^2} - H}{p} = 100$ m, $l = \frac{V-G}{p} = 200$ m,

$$l_1 \geqslant \frac{H}{pf} = 375 \text{ m}.$$

10.23. Un fir omogen și greu avînd greutatea p pe unitatea de lungime este suspendat în două puncte A și B situate pe aceeași orizontală. Cunoscînd unghiul $\alpha = \frac{\pi}{6}$ format de tangenta în punctul A cu orizontala și lungimea $2s$ a firului, să se determine tensiunea maximă T și cea minimă H din fir, săgeata f și distanța $AB = 2x$ dintre punctele de suspensie.

Răspuns. $T = 2ps$, $H = ps\sqrt{3}$, $f = (2 - \sqrt{3})s \approx 0{,}268\,s$,

$$2x = s\sqrt{3} \cdot \ln 3 \approx 1{,}903\,s.$$

10.24. Un fir este suspendat între doi stîlpi situați la distanța $l = 100$ m, săgeata fiind $f = 3$ m. Cunoscînd greutatea $p = 0{,}3$ kgf/m, să se

Scanned with OKEN Scanner

determine tensiunea din fir şi lungimea L a firului. Se poate considera că firul este foarte întins aproximîndu-se lănţişorul cu o parabolă.

Răspuns. $H = 125$ kgf, $T = 125{,}9$ kgf, $L = 100{,}24$ m.

10.25. O roată de rază r asupra căreia acţionează un cuplu motor de moment M este oprită cu ajutorul frînei cu bandă de frînare din fig. 10.25. Cunoscînd lungimea $l = OA$ a barei de greutate neglijabilă OA şi coeficientul de frecare f dintre banda de frînare şi roată, să se determine forţa F necesară pentru a menţine roata în echilibru.

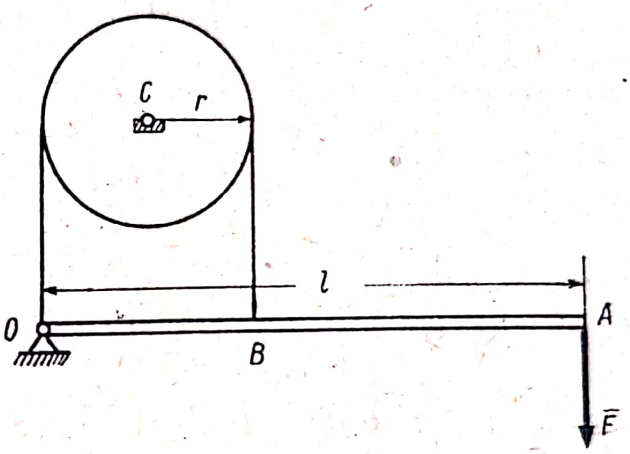


Fig. 10.25

Răspuns. Dacă cuplul roteşte roata în sensul acelor de ceasornic $F = \dfrac{2M}{l\,(e^{f\pi} - 1)}$ iar dacă cuplul acţionează în sens invers, $F = \dfrac{2\,Me^{f\pi}}{l(e^{f\pi} - 1)}$, deci este mai avantajos să folosim această frînă în primul caz.

Capitolul XI

APLICAŢII TEHNICE ALE STATICII

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

În acest capitol vor fi examinate cîteva dispozitive simple folosite în tehnică ca, de exemplu, pîrghia, planul înclinat, pana, şurubul, scripetele simplu etc.

Forţele care acţionează asupra unui asemenea dispozitiv sînt: *forţa motoare* F_m (sau cuplul motor), *forţa rezistentă* F_r (sau cuplul rezistent) şi forţele de legătură. În general urmărim să învingem o forţă rezistentă mare cu ajutorul unei forţe motoare mici.

Randamentul η al unui astfel de dispozitiv poate fi exprimat ca raportul între forţa motoare F'_m în cazul legăturilor ideale (fără frecare) şi forţa motoare reală F_m:

$$\eta = \frac{F'_m}{F_m} \leqslant 1. \qquad (11.1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Pîrghia este un solid articulat acţionat de F_m, F_r şi de reacţiunea:

$$R = \sqrt{F_m^2 + F_r^2 + 2 F_m F_r \cos\alpha} \qquad (11.2)$$

din articulaţia O (fig. 11. *a*).

Condiţia de echilibru se obţine din ecuaţia de momente faţă de articulaţia O:

$$F_m a - F_r b - \mu r R = 0 \qquad (11.3)$$

unde r este raza fusului articulaţiei şi μ — coeficientul de frecare din articulaţie.

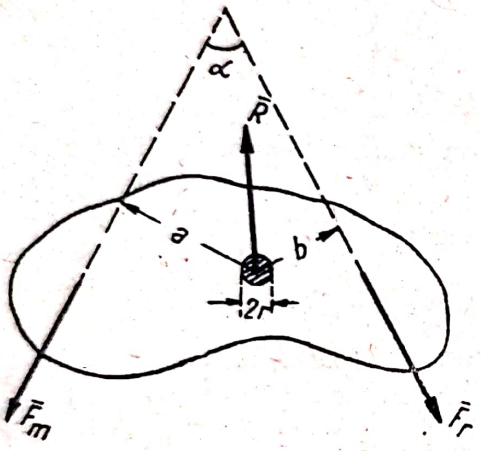


Fig. 11. *a*

Dacă $\alpha = 0$ se obţine:

$$F_m = \frac{b + \mu r}{a - \mu r} F_r \qquad (11.4)$$

iar randamentul este:

$$\eta = \frac{1 - \frac{\mu r}{a}}{1 + \frac{\mu r}{b}} . \qquad (11.5)$$

În sfîrşit dacă nu există frecări din (11.3) avem:

$$F_m = \frac{b}{a} F_r . \qquad (11.6)$$

Pentru ca forţa motoare să fie cît mai mică este necesar ca raportul $\frac{b}{a}$ să fie cît mai mic.

Planul înclinat (fig. 11. *b*) serveşte la ridicarea sarcinilor. Forţa motoare este:

$$F_m = F_r (\sin\alpha + f \cos\alpha) = F_r \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos\varphi} \qquad (11.7)$$

iar randamentul planului este:

$$\eta = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + f\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha \cos\varphi}{\sin(\alpha + \varphi)} \qquad (11.8)$$

unde α este unghiul de înclinare al planului iar $f = \mathrm{tg}\varphi$ coeficientul de frecare dintre plan şi corpul ridicat.

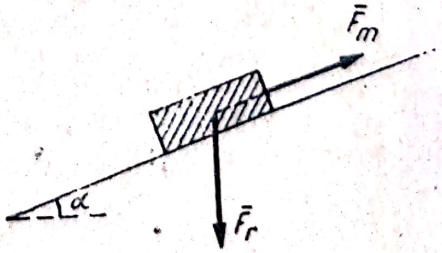


Fig. 11. *b*

Pana (fig. 11. *c*) serveşte la îndepărtarea a două piese. Dacă φ este unghiul de frecare

dintre pana *1* și corpurile *2* și *3* și nu există frecare între aceste corpuri și planele pe care se reazemă, atunci:

$$F_m = 2F_r \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \qquad (11.9)$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}. \qquad (11.10)$$

Condiția de autofixare a panei este:

$$\varphi > \alpha \qquad (11.11)$$

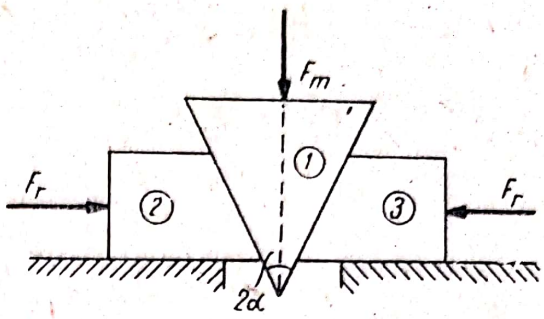


Fig. 11. *c*

în care caz forța $\bar{F}$ necesară pentru a scoate pana este:

$$F = 2F_r \operatorname{tg}(\varphi - \alpha). \qquad (11.12)$$

Sensul forței F este opus lui F_m.

Scripetele simplu (fig. 11. *d*) este alcătuit dintr-o roată peste care este petrecut un cablu. Dacă ținem seama de frecările din lagăr (μ coeficient

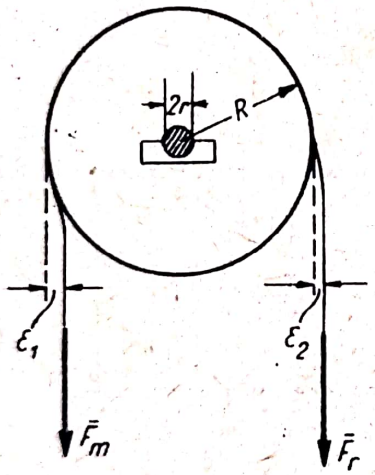


Fig. 11. *d*

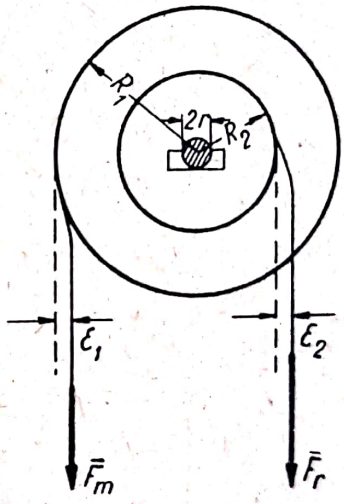


Fig. 11. *e*

de frecare, r raza fusului articulației) și de rigiditatea firelor (ε_1 distanța cu care se apropie suportul forței motoare și ε_2 distanța cu care se îndepărtează suportul forței rezistente de axul de rotație):

$$F_m = \lambda F_r \qquad (11.13)$$

unde coeficientul:

$$\lambda = \frac{R + \varepsilon_2 + \mu r}{R - \varepsilon_1 - \mu r} > 1 \qquad (11.14)$$

este inversul randamentului scripetelui $\eta = \frac{1}{\lambda}$.

Dacă neglijăm efectul frecărilor și al rigidității firelor:

$$F_m = F_r, \qquad (11.15)$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul scripetelui simplu format din două roți solidare (fig. 11. *e*) :

$$F_m = F_r \frac{R_2 + \varepsilon_2 + \mu r}{R_1 - \varepsilon_1 - \mu r} \tag{11.16}$$

iar dacă neglijăm efectul frecărilor și al rigidității firelor:

$$F_m = F_r \frac{R_2}{R_1} . \tag{11.17}$$

Palanul exponențial (fig. 11. *f*) este un sistem format dintr-un scripete fix și n scripeți mobili. Dacă ținem seama de rigiditatea firelor și de frecări:

$$F_m = \frac{\lambda^{n+1}}{(1+\lambda)^n} F_r \tag{11.18}$$

$$\eta = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1+\lambda}{2\lambda} \right)^n \tag{11.19}$$

iar dacă nu ținem seama, $\lambda = 1$ și din (11.18) rezultă:

$$F_m = \frac{F_r}{2^n} . \tag{11.20}$$

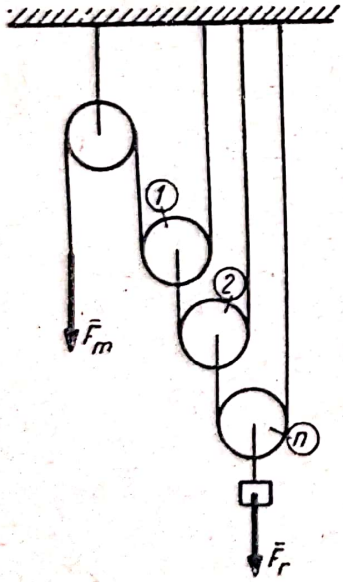


Fig. 11. *f*

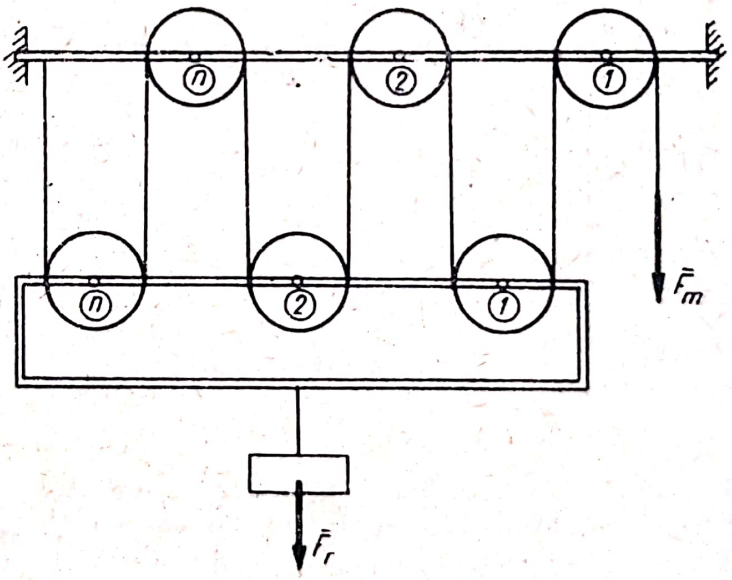


Fig. 11. *g*

Palanul este un alt sistem de scripeți alcătuit ca în fig. 11. *g*. Dacă $2n$ este numărul scripeților, din care n sînt fixați de cadrul fix și n de cadrul mobil, atunci:

$$F_m = \frac{\lambda^{2n}}{1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots + \lambda^{2n-1}} F_r = \frac{(\lambda - 1)\lambda^{2n}}{(\lambda^{2n} - 1)} F_r \tag{11.21}$$

$$\eta = \frac{\lambda^{2n} - 1}{2\, n\lambda^{2n} (\lambda - 1)} \tag{11.22}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar dacă neglijăm efectul frecărilor şi al rigidităţii firelor:

$$F_m = \frac{F_r}{2n}. \tag{11.23}$$

Macaraua diferenţială (fig. 11. *h*) este un sistem de scripeţi pentru ridicarea greutăţilor foarte mari. Pentru ca să nu lunece cablul pe scripeţi se folosesc roţi dinţate şi lanţuri. Presupunînd legături fără frecare:

$$F_m = \frac{R - r}{2R} F_r. \tag{11.24}$$

Dacă diferenţa $R - r$ este foarte mică în raport cu raza R, forţa motoare este şi ea mică.

Şurubul (fig. 11. *i*) este alcătuit dintr-un cilindru de rază r pe care se află un filet în formă de elice, pasul elicei fiind:

$$p = 2\pi r \operatorname{tg} \alpha \tag{11.25}$$

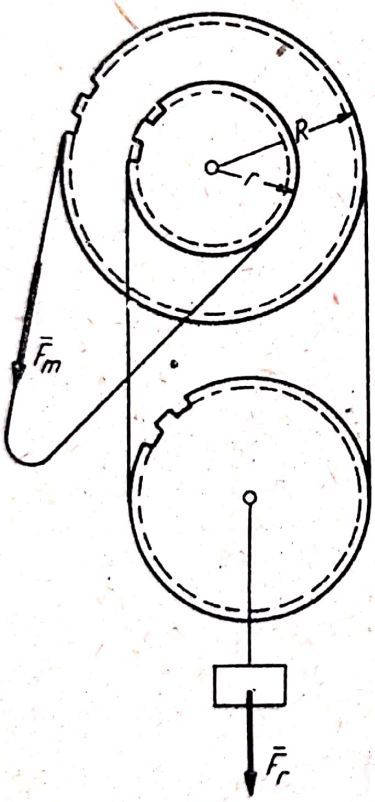


Fig. 11. *h*

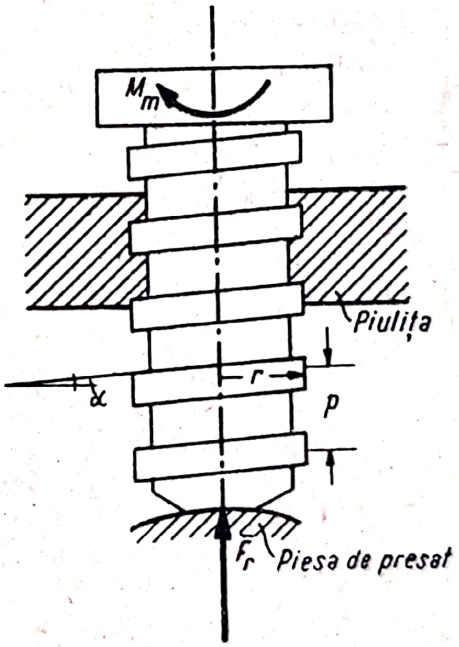


Fig. 11. *i*

unde α este panta elicei. El se înşurubează într-o piuliţă, vîrful şurubului apăsînd cu forţa F_r asupra piesei de presat. Pentru şurubul cu filet dreptunghiular dacă M_m este momentul motor aplicat piuliţei şi φ unghiul de frecare dintre şurub şi piuliţă, atunci:

$$M_m = F_r\, r \operatorname{tg} (\alpha + \varphi) \tag{11.26}$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \varphi)}. \tag{11.27}$$

Şurubul se autofixează pentru:

$$\alpha < \varphi \tag{11.28}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care caz pentru a desface șurubul este necesar un cuplu de moment:

$$M = F_r r \operatorname{tg}(\varphi - \alpha) \tag{11.29}$$

M fiind de sens invers lui M_m.

În afară de rezultatele de mai sus, în capitolul de față vom presupune cunoscute condițiile de echilibru ale unui sistem de corpuri (v. cap. VIII):

$$\bar{R} = 0 \qquad \bar{M}_0 = 0 \tag{11.30}$$

precum și condițiile de echilibru cînd intervin frecările (v. cap. VII).

B. PROBLEME REZOLVATE

11.1. La balanța zecimală reprezentată schematic în fig. 11.1 *a* avem prin construcție:

$$\frac{l_1}{l_1 + l_2} = \frac{l_1'}{l' + l_2'} \qquad \frac{l_1'}{l} = \frac{1}{10}. \tag{1}$$

Să se arate că indiferent de locul în care este așezat corpul de cîntărit pe platformă, condiția de echilibru este $G = \frac{1}{10} G_1$. Balanța este în echilibru sub acțiunea greutății proprii.

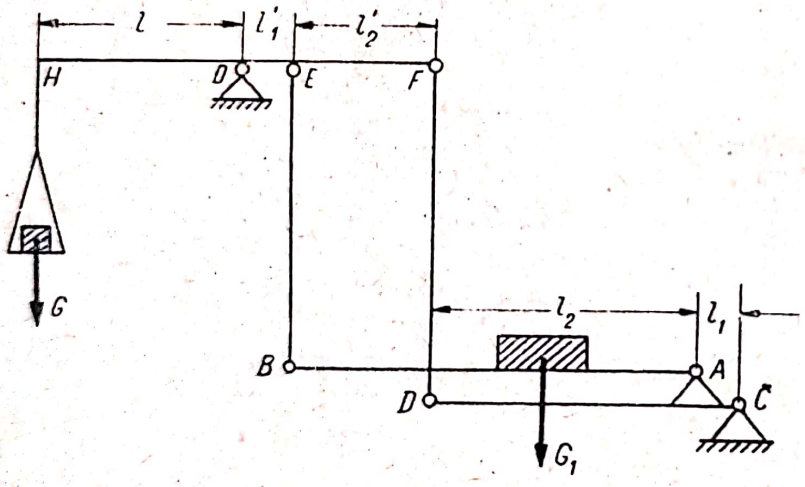


Fig. 11.1 *a*

Rezolvare. Cum balanța este în echilibru sub acțiunea greutății proprii și a forțelor de legătură corespunzătoare vom căuta condițiile de echilibru pentru sistemul de forțe efectiv aplicate G și G_1.

Barele EB și FD nefiind supuse la forțele efectiv aplicate și fiind articulate la ambele capete vor fi întinse sau comprimate. Fie S_1 și S_2 eforturile din aceste bare. Izolînd pîrghia HF (fig. 11.1 *b*) și scriind ecuația de momente:

$$M_0 = Gl - S_1 l_1' - S_2 (l_1' + l_2') = 0 \tag{2}$$

eliminăm reacțiunea $\bar{R}_0$.

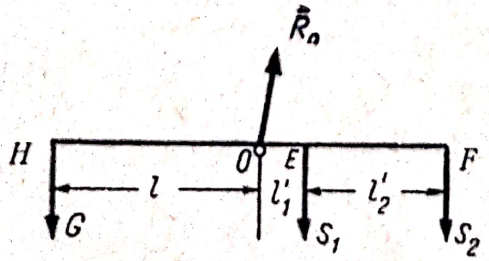


Fig. 11.1 *b*

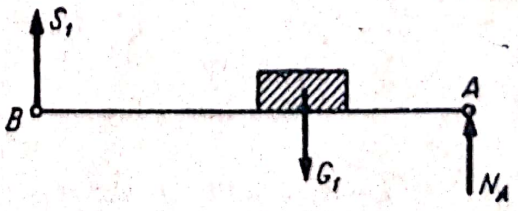


Fig. 11.1 *c*

Izolînd platforma AB (fig. 11.1 *c*) și proiectînd forțele pe verticală rezultă:

$$G_1 = S_1 + N_A . \tag{3}$$

Izolînd pîrghia DC (fig. 11.1 *d*) și scriind ecuația de momente:

$$M_C = N_A\, l_1 - S_2\,(l_1 + l_2) = 0. \tag{4}$$

Eliminînd forțele S_2 și N_A din ecuațiile (2), (3) și (4) obținem:

$$Gl + S_1\left(\frac{l_1' + l_2'}{l_1 + l_2}\, l_1 - l_1'\right) - G_1 \frac{l_1' + l_2'}{l_1 + l_2}\, l_1 = 0$$

și ținînd seama de prima relație (1) rezultă:

$$Gl - G_1 l_1' = 0$$

deci:

$$G = \frac{l_1'}{l}\, G_1 = \frac{1}{10}\, G_1 .$$

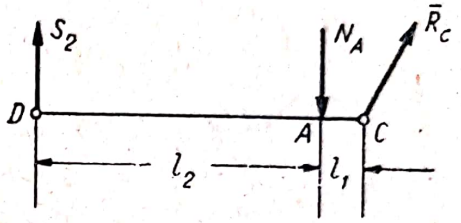


Fig. 11.1 *d*

Se poate arăta că platforma AB rămîne orizontală. Fie δy_A deplasarea elementară pe verticală a punctului A. Atunci:

$$\delta y_D = \frac{\delta y_A}{l_1}(l_1 + l_2) = \delta y_F$$

$$\delta y_E = \frac{\delta y_F}{l_1' + l_2'}\, l_1' = \frac{l_1 + l_2}{l_1' + l_2'}\, \frac{l_1'}{l_1}\, \delta y_A = \delta y_B$$

și ținînd seama de prima relație (1):

$$\delta y_B = \delta y_A .$$

Punctele A și B deplasîndu-se cu aceeași distanță pe verticală, platforma rămîne orizontală.

11.2. O presă este alcătuită ca în fig. 11.2 *a*. Dîndu-se distanțele a, b, unghiul α, forța F_m aplicată pîrghiei OA și știind că greutatea pieselor care alcătuiesc presa este neglijabilă în raport cu celelalte forțe, să se determine presiunea F_r exercitată asupra corpului I. Platanul GH poate luneca fără frecare pe cadrul presei. Aplicație numerică: $F_m = 10$ kgf, $a = 1{,}5$ m, $b = 0{,}1$ m, $\alpha = 5°$;

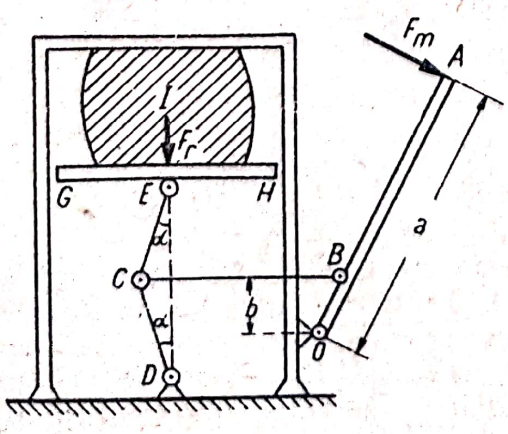


Fig. 11.2 *a*

Rezolvare. Barele CB, CE și CD nefiind acționate de forțe efectiv aplicate și fiind articulate la ambele capete vor fi supuse la forțe axiale. Izolînd pîrghia OA (fig. 11.2 *b*) și scriind o ecuație

de momente față de articulația O:

$$M_0 = S_1 b - F_m a = 0$$

rezultă:

$$S_1 = \frac{a}{b} F_m$$

expresie ce se putea obține direct din (11.6).

Izolînd punctul C (fig. 11.2 *c*) și scriind ecuațiile de proiecții:

$$X = S_1 + S_2 \sin \alpha + S_3 \sin \alpha = 0$$

$$Y = S_3 \cos \alpha - S_2 \cos \alpha = 0$$

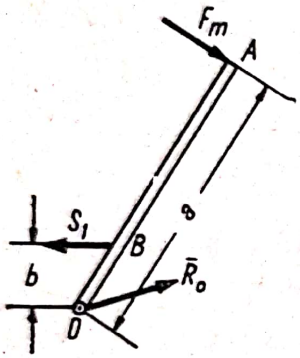


Fig. 11.2 *b*

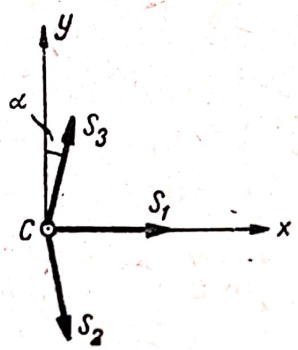


Fig. 11.2 *c*

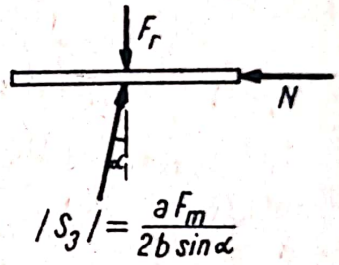


Fig. 11.2 *d*

obținem :

$$S_2 = S_3 = -\frac{S_1}{2 \sin \alpha} = -\frac{a F_m}{2 b \sin \alpha}$$

barele CE și CD fiind comprimate. În sfîrșit izolînd platanul GH (fig. 11.2 *d*) și proiectînd forțele pe verticală obținem:

$$F_r = \frac{a}{2b \operatorname{tg} \alpha} F_m .$$

Făcînd înlocuirile numerice raportul de transformare este:

$$\frac{a}{2b \operatorname{tg} \alpha} = 85{,}7$$

deci:

$$F_r = 857 \text{ kgf.}$$

11.3. O pană cu secțiunea trapezoidală este așezată într-un canal cu secțiune triunghiulară (fig. 11.3 *a*). Fiind cunoscute unghiul α, forța G și coeficientul de frecare f, între pană și pereții canalului, se cere: valoarea forței P în starea de repaus la limită și raportul între forța P în cazul din figura 11.3 *a* și forța P_1 în cazul panei de secțiune dreptunghiulară din figura 11.3 *b*.

Rezolvare. a) Izolăm pana introducînd reacțiunile normale N și forțele de frecare $T = fN$. Din ecuațiile de proiecții:

$$Y = -G + 2N \sin \alpha = 0$$

$$Z = -P + 2fN = 0$$

obținem:

$$P = \frac{fG}{\sin \alpha}.$$

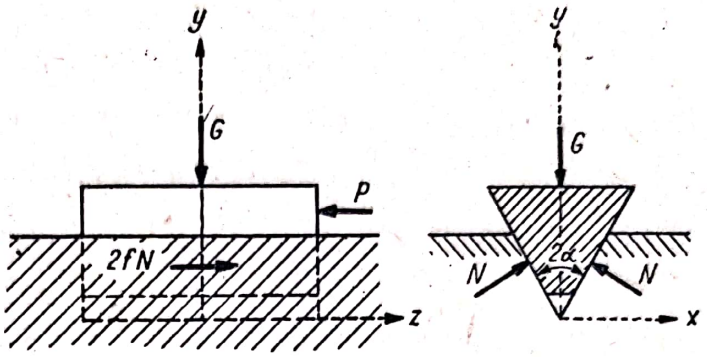


Fig. 11.3 *a*

b) În cazul panei din figura 11.3 *b*:.

$$P_1 = fN_1 = fG$$

deci raportul căutat este:

$$k = \frac{P}{P_1} = \frac{1}{\sin \alpha} \geqslant 1.$$

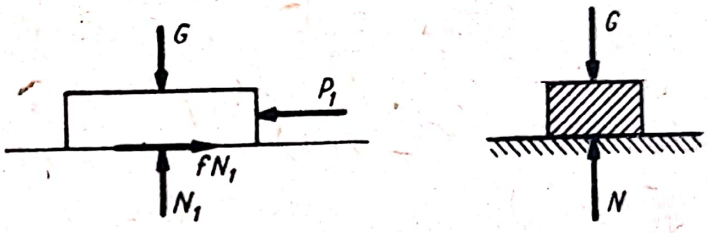


Fig. 11.3 *b*

Observație. Proprietatea este folosită la transmisiile cu curele unde se adoptă secțiunea trapezoidală cînd frecarea între curea și roată trebuie mărită. Exemplu: cu $\alpha = 30°$ frecarea crește în raportul:

$$k = \frac{1}{\sin 30°} = 2$$

în comparație cu cureaua cu secțiune dreptunghiulară.

11.4. Pana *1* asupra căreia acționează forța F_m ridică pana *2* prin intermediul piesei *3* (fig. 11.4 *a*). Să se determine sarcina F_r care poate fi ridicată de pana *2* dacă se cunosc unghiurile 2α, 2β și unghiurile de frecare φ_1, φ_2 și φ_3. Greutatea panelor și a piesei intermediare este neglijabilă.

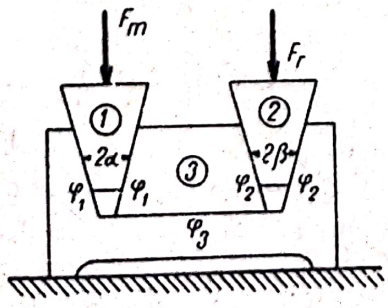


Fig. 11.4 *a*

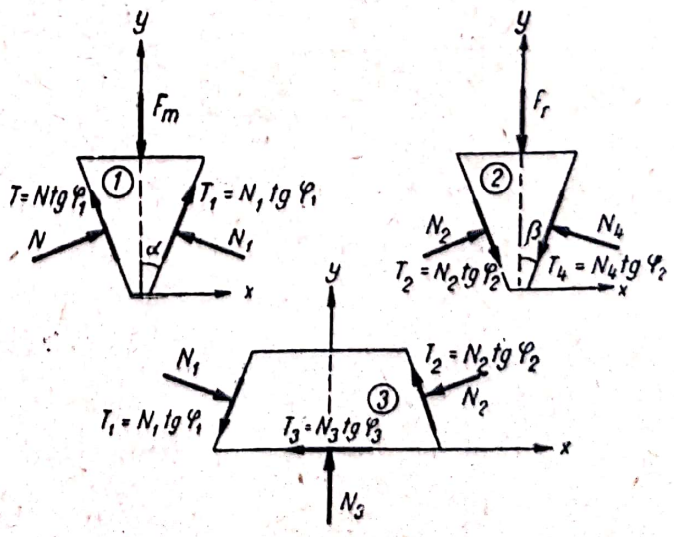


Fig.11.4 *b*

Rezolvare. Izolînd cele trei corpuri (fig. 11.4 *b*) ecuațiile de echilibru în poziția limită sînt:

Pentru pana *1*: $X = (N - N_1)\cos\alpha - (N - N_1)\operatorname{tg}\varphi_1 \sin\alpha = 0$

$Y = -F_m + (N + N_1)\sin\alpha + (N + N_1)\operatorname{tg}\varphi_1 \cos\alpha = 0.$

Pentru pana *2*: $X = (N_2 - N_4)\cos\beta + (N_2 - N_4)\operatorname{tg}\varphi_2 \sin\beta = 0$

$Y = -F_r + (N_2 + N_4)\sin\beta - (N_2 + N_4)\operatorname{tg}\varphi_2 \cos\beta = 0.$

Pentru corpul *3*:

$$X = N_1\cos\alpha - N_3\operatorname{tg}\varphi_3 - N_2\cos\beta - N_1\operatorname{tg}\varphi_1\sin\alpha - N_2\operatorname{tg}\varphi_2\sin\beta = 0$$

$$Y = N_3 - N_1\sin\alpha - N_2\sin\beta - N_1\operatorname{tg}\varphi_1\cos\alpha + N_2\operatorname{tg}\varphi_2\cos\beta = 0.$$

Rezolvînd aceste ecuații obținem:

$$N = N_1 = \frac{F_m\cos\varphi_1}{2\sin(\alpha+\varphi_1)} \qquad N_2 = N_4 = \frac{F_r\cos\varphi_2}{2\sin(\beta-\varphi_2)} \qquad N_3 = \frac{F_m + F_r}{2}$$

$$F_r = \frac{\operatorname{ctg}(\alpha+\varphi_1) - \operatorname{tg}\varphi_3}{\operatorname{ctg}(\beta-\varphi_2) + \operatorname{tg}\varphi_3} F_m. \qquad (1)$$

Dacă nu ar exista frecări

$$F_r = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} F'_m$$

deci randamentul acestei mașini este:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\,\frac{\operatorname{ctg}(\alpha+\varphi_1) - \operatorname{tg}\varphi_3}{\operatorname{ctg}(\beta-\varphi_2) + \operatorname{tg}\varphi_3}.$$

Dacă $\varphi_3 = 0$, puteam rezolva problema cu ajutorul formulelor (11.9) și (11.12). Pana *1* exercită o presiune orizontală H_1 asupra corpului *3* care din (11.9) este:

$$H_1 = \frac{F_m}{2\operatorname{tg}(\alpha+\varphi_1)}.$$

Pana *2* exercită o presiune orizontală H_2 asupra corpului *3* care din (11.12) este:

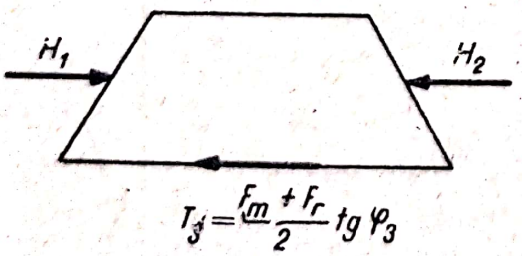


Fig. 11.4 *c*

$$H_2 = \frac{F_r}{2\operatorname{tg}(\beta-\varphi_2)}.$$

Dacă $\varphi_3 = 0$, atunci $H_1 = H_2$ de unde:

$$F_r = \frac{\operatorname{ctg}(\alpha+\varphi_1)}{\operatorname{ctg}(\beta-\varphi_2)} F_m,$$

expresie ce se putea obține din (1) prin anularea lui φ_3. În cazul general în afară de forțele H_1 și H_2 mai acționează și forța de frecare $T_3 = N_3\operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{F_m + F_r}{2}\operatorname{tg}\varphi_3$ (fig. 11.4 *c*). Proiectînd forțele pe orizontală:

$$H_1 - T_3 - H_2 = 0$$

și făcînd înlocuirile regăsim expresia (1) a forței rezistente F_r.

Scanned with OKEN Scanner

11.5. Să se determine forța motoare F_m necesară pentru ridicarea sarcinii F_r pentru sistemul de n scripeți din figura 11.5 *a*. Se va ține seama de efectul frecării și rigidității firelor dîndu-se coeficientul λ [formula (11.13)]. Greutatea proprie a scripeților este neglijabilă. Aplicație numerică: $\lambda = 1{,}07$, $n = 5$, $F_r = 500$ kgf.

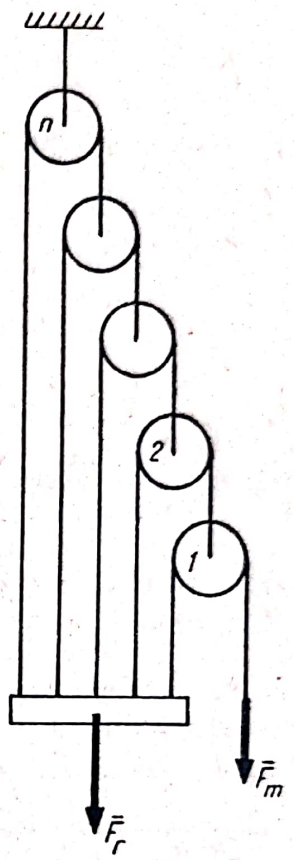


Fig. 11.5 *a*

Rezolvare. Izolînd un scripete oarecare, forțele care acționează asupra lui sînt reprezentate în figura 11.5 *b*. Din condiția de echilibru (11.13) avem:

$$T'_{i-1} = \lambda T_i \qquad (1)$$

și proiectînd forțele pe verticală:

$$T'_i = T_i + T'_{i-1} = T'_{i-1}\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right). \qquad (2)$$

Cum pentru primul scripete $i = 1$:

$$T'_{i-1} = F_m$$

din formulele (1) și (2) avem:

$$T'_i = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^i F_m$$

$$T_i = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{i-1} F_m .$$

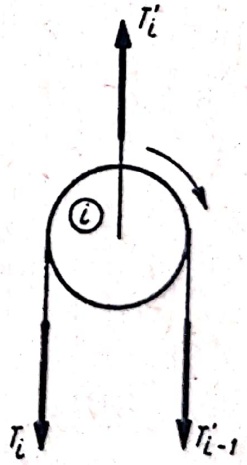


Fig. 11.5 *b*

Izolînd sarcina F_r (fig. 11.5 *c*) și proiectînd forțele pe verticală avem:

$$F_r = \sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{i-1} F_m$$

adică:

$$F_r = \left[\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^n - 1\right] F_m$$

de unde:

$$F_m = \frac{F_r}{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^n - 1} . \qquad (3)$$

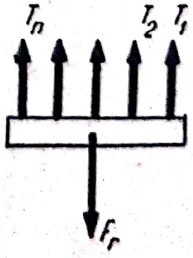


Fig. 11.5 *c*

Dacă nu există frecări și firele sînt perfect flexibile:

$$F'_m = \frac{F_r}{2^n - 1} .$$

Randamentul este:

$$\eta = \frac{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^n - 1}{2^n - 1}.$$

Făcînd aplicațiile numerice:

$$F_r = \frac{500}{26} = 19{,}25 \text{ kgf},$$

$$\eta = \frac{26}{31} = 0{,}84.$$

11.6. Se consideră sistemul de scripeți din figura 11.6 *a* alcătuit din scripetele diferențial A de raze $R = 16$ cm și $r = 14$ cm avînd randamentul $\eta_A = 0{,}9$, din palanul exponențial B cu patru scripeți mobili, din scripetele fix C și din palanul D cu trei perechi de scripeți. Pentru scripeții B, C și D, $\lambda = 1{,}05$. Cunoscînd forța rezistentă $F_r = 3\,000$ kgf, să se determine forța motoare F_m și randamentul sistemului.

Rezolvare. Ne vom folosi de rezultatele stabilite anterior pentru palan, palan exponențial și scripetele diferențial. Izolînd palanul D, tensiunea T_1 va fi forța motoare din formula (11.21) unde $n = 3$, deci:

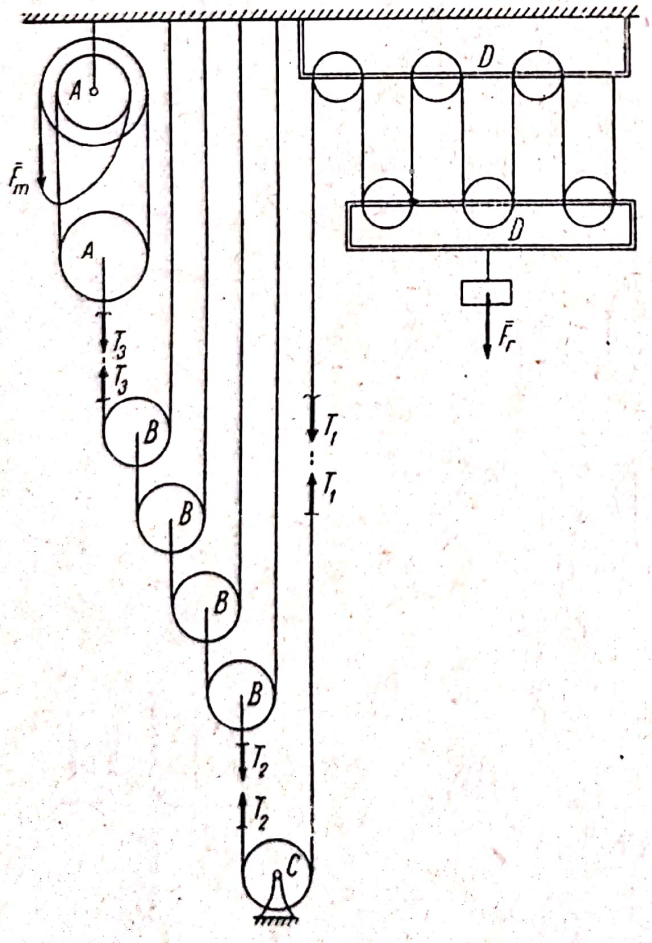


Fig. 11.6 *a*

$$T_1 = \frac{(\lambda - 1)\lambda^6}{\lambda^6 - 1} F_r.$$

Pentru scripetele fix C forța motoare este T_2 iar cea rezistentă T_1, deci conform (11.13):

$$T_2 = \lambda T_1 = \frac{(\lambda - 1)\lambda^7}{\lambda^6 - 1} F_r.$$

Palanul exponențial B are numai scripeți mobili, în acest caz prin analogie cu formula (11.18) putem stabili cu ușurință relația dintre F_m și F_r:

$$F_m = \frac{\lambda^n}{(1 + \lambda)^n} F_r. \qquad (1)$$

În cazul nostru $F_m = T_3$, $F_r = T_2$, iar $n = 4$, deci:

$$T_3 = \frac{\lambda^4}{(1 + \lambda)^4} T_2 = \frac{(\lambda - 1)\lambda^{11}}{(\lambda^6 - 1)(1 + \lambda)^4} F_r.$$

În sfîrșit pentru scripetele diferențial A dacă n-am avea frecări, cum

forța rezistentă este T_3 conform (11.24):

$$F'_m = \frac{R - r}{2R} T_3 .$$

Însă folosind relația de definiție (11.1) a randamentului:

$$F_m = \frac{F'_m}{\eta_A}$$

deci:

$$F_m = \frac{R - r}{2 \eta_A R} \frac{(\lambda - 1) \lambda^{11}}{(\lambda^6 - 1)(1 + \lambda)^4} F_r . \tag{2}$$

Dacă legăturile ar fi ideale $\lambda = 1$ și $\eta_A = 1$ și cum $\lim\limits_{\lambda=1} \frac{\lambda - 1}{\lambda^6 - 1} = \frac{1}{6}$ forța motoare ar fi:

$$F'_m = \frac{R - r}{2R} \frac{1}{6 \times 2^4} F_r \tag{2'}$$

deci randamentul este:

$$\eta = \frac{F'_m}{F_m} = \frac{(\lambda^6 - 1)(1 + \lambda)^4 \eta_A}{96 \lambda^{11} (\lambda - 1)} . \tag{3}$$

Calculînd separat randamentul fiecărei mașini simple ce alcătuiau sistemul nostru de scripeți, aveam pentru palanul exponențial B:

$$\eta_B = \left(\frac{1 + \lambda}{2\lambda}\right)^n = \frac{(1 + \lambda)^4}{16 \lambda^4} \tag{4}$$

pentru palanul D, conform (11.22) cu $n = 3$:

$$\eta_D = \frac{\lambda^6 - 1}{6 \lambda^6 (\lambda - 1)}$$

iar pentru scripetele C:

$$\eta_C = \frac{1}{\lambda} .$$

Deci expresia randamentului (3) se putea exprima ca produsul randamentelor mașinilor ce alcătuiau dispozitivul nostru:

$$\eta = \eta_A \eta_B \eta_C \eta_D .$$

Făcînd aplicațiile numerice:

$$F_m = \frac{16 - 14}{2 \times 0{,}9 \times 16} \frac{(1{,}05 - 1)\, 1{,}05^{11}}{(1{,}05^6 - 1)(1 + 1{,}05)^4} 3\,000 = \frac{3\,000}{1\,010} = 2{,}97 \text{ kgf}$$

$$\eta = \frac{0{,}9 (1{,}05^6 - 1)(1 + 1{,}05)^4}{96 \times 1{,}05^{11} \times (1{,}05 - 1)} = 0{,}659.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă legăturile ar fi fost ideale conform (2′):

$$F'_m = \frac{16 - 14}{2 \times 16} \cdot \frac{3\,000}{96} = \frac{3\,000}{1\,536} = 1{,}95 \text{ kgf.}$$

Notă. Să stabilim formulele (1) și (4) pentru palanul exponențial *B*. Izolînd un scripete al lui (fig. 11.6 *b*) avem:

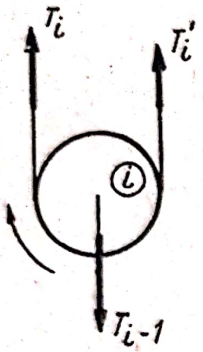


Fig. 11.6 *b*

$$T_i = \lambda T'_i$$

$$T_i + T'_i = T_{i-1}$$

de unde:

$$T_i = \frac{\lambda}{1 + \lambda} T_{i-1}.$$

Cum $T_0 = F_r$ și $T_n = F_m$ rezultă:

$$F_m = \frac{\lambda}{1 + \lambda} T_{n-1} = \frac{\lambda^2}{(1 + \lambda)^2} T_{n-2} = \ldots =$$

$$= \frac{\lambda^{n-1}}{(1 + \lambda)^{n-1}} T_1 = \frac{\lambda^n}{(1 + \lambda)^n} F_r. \qquad (1)$$

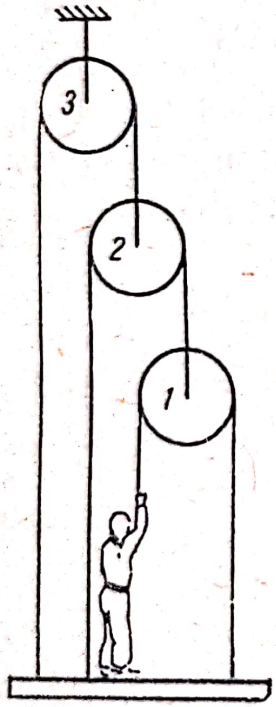


Fig. 11.7 *a*

Cînd nu există frecări:

$$F'_m = \frac{F_r}{2^n}$$

deci randamentul este:

$$\eta_B = \left(\frac{1 + \lambda}{2\lambda}\right)^n. \qquad (4)$$

11.7. Cu ce forță F trebuie să tragă un om, de cablu, pentru a ridica platforma pe care stă (fig. 11.7 *a*). Se dă greutatea platformei $G_1 = 10$ kgf, greutatea omului $G_2 = 70$ kgf, $\lambda = 1{,}02$. Pentru ce greutate a platformei nu este posibil ca omul s-o ridice?

Rezolvare. Izolînd scripeții (fig. 11.7 *b*) și platforma (fig. 11.7 *c*) avem pentru scripetele *1*, cum F este

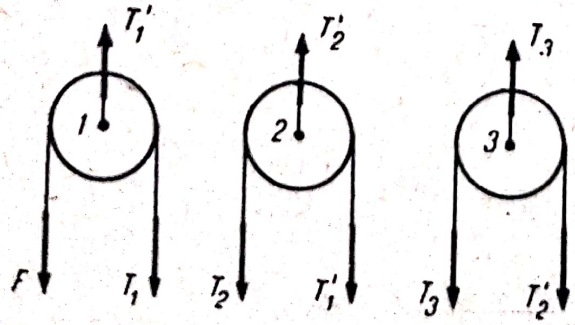


Fig. 11.7 *b*

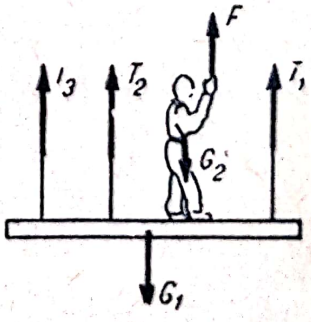


Fig. 11.7 *c*

Scanned with OKEN Scanner

forța motoare:

$$F = \lambda T_1 \qquad T_1' = F + T_1$$

de unde:

$$T_1 = \frac{F}{\lambda} \qquad T_1' = \frac{1+\lambda}{\lambda} F.$$

Pentru scripetele 2, cum T_1' este forța motoare:

$$T_1' = \lambda T_2 \qquad T_2' = T_1' + T_2$$

de unde:

$$T_2 = \frac{1+\lambda}{\lambda^2} F \qquad T_2' = \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda^2} F.$$

Pentru scripetele 3, cum T'_2 este forța motoare:

$$T_2' = \lambda T_3 \qquad T_3' = T_2' + T_3$$

de unde:

$$T_3 = \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda^3} F \qquad T_3' = \frac{(1+\lambda)^3}{\lambda^3} F.$$

Dacă am avea n scripeți:

$$T_n = \frac{(1+\lambda)^{n-1}}{\lambda^n} F.$$

Pentru platformă proiectînd forțele pe verticală avem:

$$G_1 + G_2 = F + T_1 + T_2 + \ldots + T_n$$

și înlocuind cu expresiile găsite mai sus:

$$G_1 + G_2 = F + \frac{F}{\lambda}\left[1 + \frac{1+\lambda}{\lambda} + \ldots + \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^{n-1}\right]$$

de unde:

$$F = \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^n (G_1 + G_2). \qquad (1)$$

Evident ca omul să nu se desprindă de pe platformă:

$$G_2 > F$$

de unde:

$$G_2 > \frac{\lambda^n}{(1+\lambda)^n - \lambda^n} G_1. \qquad (2)$$

Cînd nu există frecări (1) și (2) devin:

$$F = \frac{G_1 + G_2}{2^n} \qquad G_2 > \frac{G_1}{2^n - 1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În aplicația numerică $n = 3$ deci:

$$F = \left(\frac{1{,}02}{2{,}02}\right)^3 (10 + 70) = 10{,}3 \text{ kgf} < G_2 .$$

Omul nu poate ridica platforma în ipoteza că el ar putea dezvolta orice forță F dacă nu avem îndeplinită inegalitatea (2) adică pentru:

$$G_1 > \frac{(1+\lambda)^n - \lambda^n}{\lambda^n} G_2 .$$

În cazul numeric considerat $\lambda = 1{,}02$, $n = 3$, $G_2 = 70$ kgf:

$$G_1 > 6{,}767\, G_2 \approx 474 \text{ kgf}.$$

11.8. Să se determine forța motoare F_m și randamentul η pentru dispozitivul din figura 11.8 alcătuit dintr-un plan înclinat, un scripete și un palan exponențial. Se dă unghiul de înclinare $\alpha = 20°$ al planului, unghiul de frecare $\varphi = 15°$, coeficientul $\lambda = 1{,}03$ același pentru toți scripeții și sarcina de ridicat $F_r = 120$ kgf.

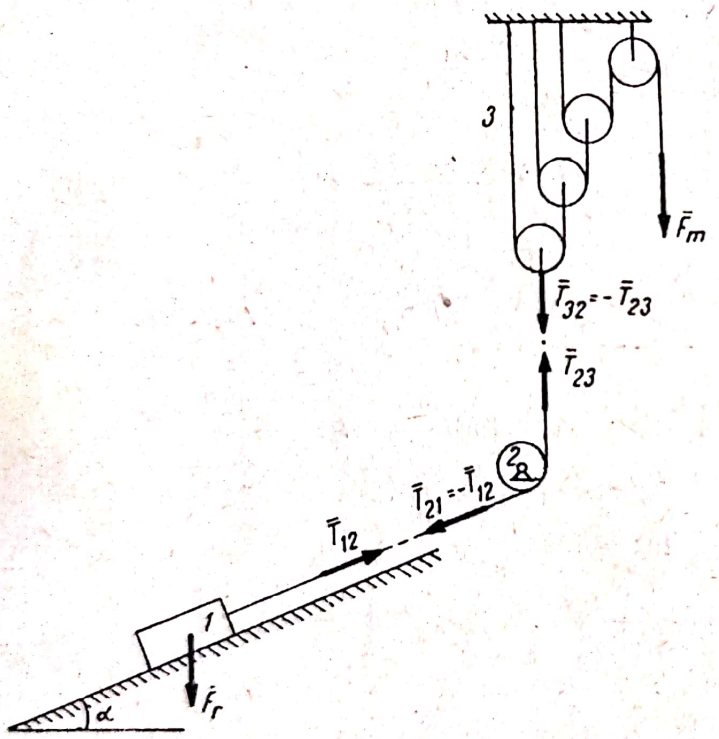


Fig. 11.8

Rezolvare. Izolînd planul înclinat, tensiunea $\bar{T}_{12}$ va fi forța motoare din formula (11.7):

$$T_{12} = F_r \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} .$$

Pentru scripete $\bar{T}_{23}$ va fi forța motoare și $\bar{T}_{21}$ forța rezistentă din formula (11.13) deci:

$$T_{23} = \lambda T_{21} = \lambda F_r \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} .$$

În sfîrșit pentru palan $\bar{T}_{32}$ este forța rezistentă și aplicînd formula (11.18), cum palanul are $n = 3$ scripeți mobili

$$F_m = \frac{\lambda^4}{(1 + \lambda)^3} T_{32}$$

adică:

$$F_m = \frac{\lambda^5 \sin(\alpha + \varphi)}{(1 + \lambda)^3 \cos \varphi} F_r .$$

Dacă n-ar exista frecări $\lambda = 1$, $\varphi = 0$ deci:

$$F'_m = \frac{\sin \alpha}{8} F_r$$

Scanned with OKEN Scanner

deci conform (11.1) randamentul este:

$$\eta = \frac{F'_m}{F_m} = \frac{\sin \alpha \cos \varphi}{\sin (\alpha + \varphi)} \frac{(1 + \lambda)^3}{8\lambda^5} .$$

Randamentul planului înclinat este (11.8):

$$\eta_1 = \frac{\sin \alpha \cos \varphi}{\sin (\alpha + \varphi)} ;$$

al scripetelui:

$$\eta_2 = \frac{1}{\lambda}$$

și al palanului exponențial (11.19):

$$\eta_3 = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1 + \lambda}{2\lambda} \right)^3 = \frac{(1 + \lambda)^3}{8\lambda^4}$$

și deci ca și la problema (11.6) randamentul este produsul randamentelor mașinilor ce alcătuiesc dispozitivul de ridicat:

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 .$$

Făcînd înlocuirile numerice:

$$F_m = \frac{1{,}03^5 \sin 35^\circ}{2{,}03^3 \cos 15^\circ} 120 = 9{,}9 \text{ kgf}$$

$$\eta = \frac{\sin 20^\circ \cos 15^\circ \, 2{,}03^3}{8 \sin 35^\circ \, 1{,}03^5} = 0{,}52.$$

11.9. Să se determine forța F_m necesară pentru a strînge șurubul cu filet trapezoidal din figura 11.9 *a*. Se dă forța F_r, raza r a șurubului, l, α unghiul de înclinare al filetului, unghiul δ (fig. 11.9 *b*) și f coeficientul de frecare dintre șurub și piuliță. Care este condiția de autofixare a șurubului? Să se compare rezultatele cu cele obținute la șurubul cu filet dreptunghiular. Aplicație numerică: diametrul exterior $D = 30$ mm, diametrul interior $d = 26$ mm, $l = 30$ cm, pasul $p = 5$ mm, $\varphi = \text{arc tg } f = 3^\circ$, pentru filetul trapezoidal $\delta = 30^\circ$, $F_r = 3\,000$ kgf.

Rezolvare. Asupra șurubului acționează forța rezistentă F_r, un cuplu motor:

$$M_m = 2 F_m l$$

iar în fiecare punct al filetului reacțiunea normală N_i și forța de frecare T_i avînd direcția tangentei la elice (fig. 11.9 *c*).

Scanned with OKEN Scanner

Reacţiunea normală N_i este în planul normal la elice (fig. 11.9 *d*), suportul ei formînd unghiul δ cu binormala. Scriind o ecuaţie de proiecţii şi una de momente pe axa Oz a cilindrului avem:

$$Z = F_r - \Sigma N_i \cos\delta \cos\alpha + \Sigma T_i \sin\alpha = 0$$
$$M_z = -M_m + r \Sigma N_i \cos\delta \sin\alpha + r \Sigma T_i \cos\alpha = 0.$$

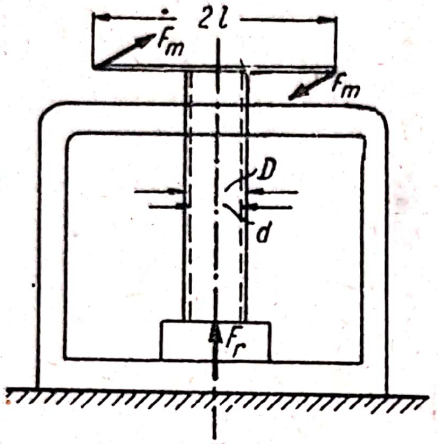


Fig. 11.9 *a*

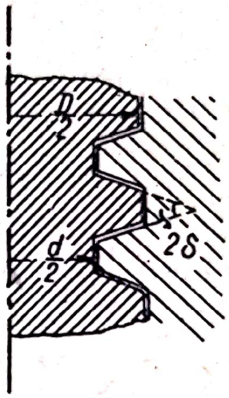


Fig. 11.9 *b*

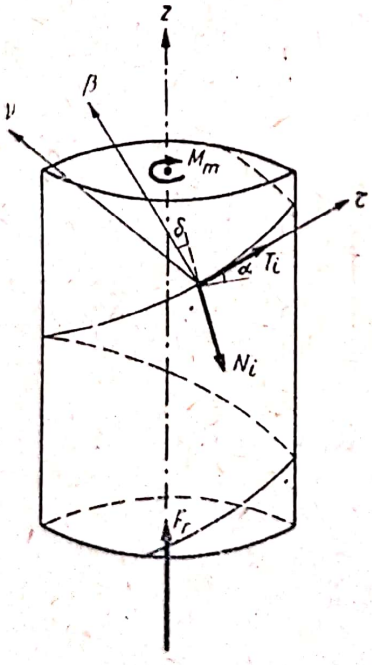


Fig. 11.9 *c*

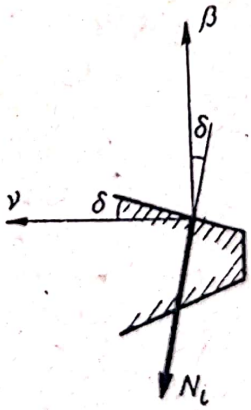


Fig. 11.9 *d*

Însă la limită:

$$T_i = fN_i$$

deci:

$$F_r = (\Sigma N_i)(\cos\alpha \cos\delta - f \sin\alpha)$$
$$M_m = r(\Sigma N_i)(\sin\alpha \cos\delta + f \cos\alpha)$$

Scanned with OKEN Scanner

și eliminînd (ΣN_i) rezultă:

$$M_m = \frac{r(\sin\alpha\cos\delta + f\cos\alpha)}{\cos\alpha\cos\delta - f\sin\alpha} F_r. \quad (1)$$

Notînd:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{f}{\cos\delta}$$

expresia (1) devine:

$$M_m = rF_r \operatorname{tg}(\alpha + \varphi_1). \quad (2)$$

Dacă nu există frecări $M'_m = r F_r \operatorname{tg}\alpha$ deci randamentul este:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi_1)}. \quad (3)$$

Pentru ca șurubul să nu se desfacă:

$$M_m = rF_r \operatorname{tg}(\alpha - \varphi_1) \quad (4)$$

Șurubul se autofixează pentru:

$$\varphi_1 > \alpha \quad (5)$$

în care caz pentru a desface șurubul este necesar un cuplu de moment M, opus ca sens lui M_m, unde:

$$M = rF_r \operatorname{tg}(\varphi_1 - \alpha). \quad (6)$$

Comparînd rezultatele obținute cu cele corespunzătoare pentru șurubul cu filet dreptunghiular (11.26)... (11.29) observăm că ele sînt asemănătoare și se puteau obține din formulele (11.26) ... (11.29) prin înlocuirea unghiului φ cu φ_1, însă cum $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\delta} > \operatorname{tg}\varphi$, $\varphi_1 > \varphi$. Rezultă că șurubul cu filet trapezoidal se autofixează mai ușor fiind mai indicat pentru strîngeri. Pentru transmiteri de mișcări este mai indicat șurubul cu filet dreptunghiular, căci are un randament mai mare.

Aplicație numerică:

$2r = \frac{D+d}{2} = 28$ mm, $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\delta} = \frac{0{,}05241}{0{,}866} = 0{,}06052$, $\varphi_1 = 3^\circ 27'50''$

din formula (11.25) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{2\pi r} = 0{,}05684$, $\alpha = 3^\circ 15'10''$, $\alpha + \varphi = 6^\circ 15'10''$, $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = 0{,}1096$, $(\alpha + \varphi_1) = 6^\circ 43'$, $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi_1) = 0{,}1177$.

Pentru filetul dreptunghiular:

$$F_m = \frac{r}{2l} F_r \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = 7{,}67 \text{ kgf}.$$

Pentru filetul trapezoidal:

$$F_m = \frac{r}{2l} F_r \operatorname{tg}(\alpha + \varphi_1) = 8{,}24 \text{ kgf}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Randamentele pentru filetul dreptunghiular și pentru cel trapezoidal sînt respectiv:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)} = 0{,}519 \text{ și } \eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)} = 0{,}483.$$

Șurubul cu filetul dreptunghiular nu se poate autofixa căci $\alpha > \varphi$, șurubul cu filet trapezoidal se poate autofixa căci $\alpha < \varphi_1$.

11.10. Se consideră presa cu șurub din figura 11.10 *a*. Cunoscînd forțele P, lungimea mînerului $2l$, unghiul de înclinare α al filetului și β al panelor și unghiurile de frecare φ dintre șurub și pana și φ_1, dintre pane și pane și cadru, să se determine forța Q cu care este presat corpul *4*. Greutatea pieselor care alcătuiesc presa este neglijabilă.

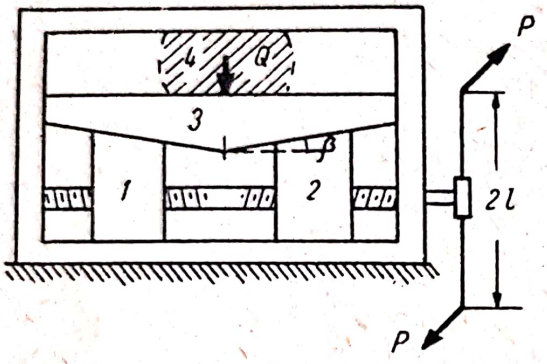


Fig. 11.10 *a*

Aplicație numerică: $P = 20$ kgf, $l = 40$ cm, $r = 2$ cm, $\alpha = 5°$, $\varphi = 6°$, $\beta = 10°$, $\varphi_1 = 4°$.

Rezolvare. Izolînd șurubul, asupra lui acționează momentul motor $M_m = 2Pl$ iar în punctele de contact între șurub și panele *1* și *2* reacțiunile normale N_{1i} și N_{2i} și forțele de frecare ale căror valori limită sînt $T_{1i} = N_{1i}\operatorname{tg}\varphi$ și $T_{2i} = N_{2i}\operatorname{tg}\varphi$ (fig. 11.10 *b*). Proiectînd forțele pe axul șurubului Ox și scriind ecuația de momente în raport cu același ax:

$$X = -\Sigma N_{1i}\cos\alpha + \Sigma N_{1i}\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha + \Sigma N_{2i}\cos\alpha - \Sigma N_{2i}\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha = 0$$

$$M_x = -M_m + \Sigma N_{1i} r\sin\alpha + \Sigma N_{1i} r\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha + \Sigma N_{2i} r\sin\alpha + \Sigma N_{2i} r\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha = 0$$

obținem:

$$\Sigma N_{1i} = \Sigma N_{2i} = \frac{M_m\cos\varphi}{2r\sin(\alpha+\varphi)}.$$

Notînd cu R_1 și R_2 rezultanta forțelor (N_{1i}, T_{1i}) respectiv (N_{2i}, T_{2i}) obținem:

$$R_1 = R_2 = \Sigma N_{1i}\cos\alpha - \Sigma N_{1i}\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha = \frac{M_m}{2r}\operatorname{ctg}(\alpha+\varphi). \qquad (1)$$

Izolînd panele *1*, *2* și *3* (fig. 11.10 *c*), asupra lor acționează forța Q (asupra panei *3*), reacțiunile dintre pane, iar din partea șurubului forțele R_1 (asupra panei *1*) și R_2 (asupra panei *2*).

Pentru pana *3* ecuațiile de echilibru sînt:

$$X = (N_1 - N_2)\sin\beta + (T_1 - T_2)\cos\beta = 0$$

$$Y = -Q + (N_1 + N_2)\cos\beta - (T_1 + T_2)\sin\beta = 0$$

$$T_1 = N_1\operatorname{tg}\varphi_1 \qquad T_2 = N_2\operatorname{tg}\varphi_1$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde:

$$N_1 = N_2 = \frac{Q \cos \varphi_1}{2 \cos (\beta + \varphi_1)} \qquad T_1 = T_2 = \frac{Q \sin \varphi_1}{2 \cos (\beta + \varphi_1)} . \tag{2}$$

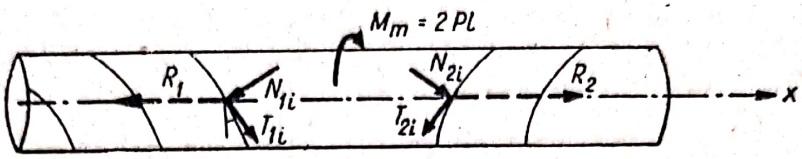


Fig. 11.10 *b*

Pentru pana *1*:

$$X = R_1 - N_1 \sin \beta - T_1 \cos \beta - T_1' = 0$$

$$Y = -N_1 \cos \beta + T_1 \sin \beta + N_1' = 0$$

$$T_1' = N_1' \operatorname{tg} \varphi_1 ,$$

de unde ținînd seama de (1) și (2):

$$N_1' = \frac{Q}{2} \qquad T_1' = \frac{Q}{2} \operatorname{tg} \varphi_1$$

iar:

$$Q = \frac{M_m \operatorname{ctg} (\alpha + \varphi)}{r [\operatorname{tg} (\beta + \varphi_1) + \operatorname{tg} \varphi_1]} = \frac{2Pl}{r} \frac{\operatorname{ctg} (\alpha + \varphi)}{\operatorname{tg} (\beta + \varphi_1) + \operatorname{tg} \varphi_1} . \tag{3}$$

Nu mai este necesar să scriem ecuațiile de echilibru pentru pana *2*, ele fiind identic satisfăcute.

Dacă nu ar exista frecări:

$$Q = \frac{M_m' \operatorname{ctg} \alpha}{r \operatorname{tg} \beta} \tag{4}$$

deci randamentul este:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \varphi)} \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} (\beta + \varphi_1) + \operatorname{tg} \varphi_1} . \tag{5}$$

Cînd presa caută să se desfacă:

$$P = \frac{Qr}{2l} \frac{\operatorname{tg} (\beta - \varphi_1) - \operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{ctg} (\alpha - \varphi)} . \tag{6}$$

Autofixarea apare pentru $P < 0$ adică pentru $\varphi > \alpha$ sau $2\varphi_1 > \beta$. Făcînd înlocuirile numerice în relațiile (3) și (5) obținem presiunea:

$$Q = \frac{2 \times 20 \times 40}{2} \frac{\operatorname{ctg} 11^\circ}{\operatorname{tg} 11^\circ + \operatorname{tg} 4^\circ} = 12\,900 \text{ kgf}$$

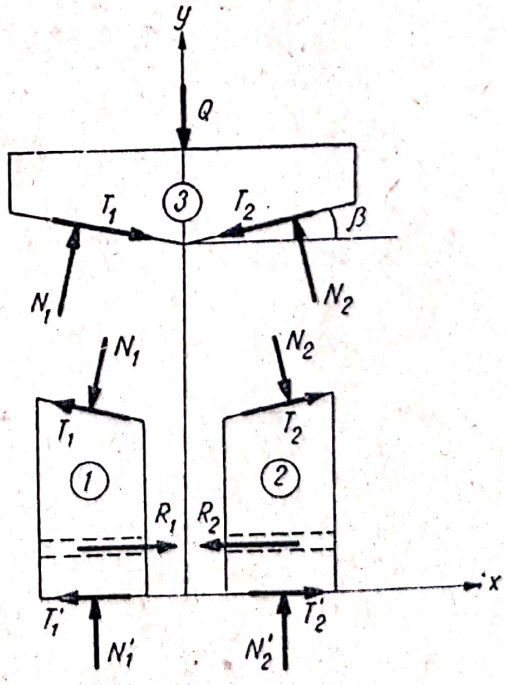


Fig. 11.10 *c*

și randamentul:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} 5^\circ}{\operatorname{tg} 11^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 10^\circ}{\operatorname{tg} 14^\circ + \operatorname{tg} 4^\circ} = 0{,}249.$$

Presa se poate autofixa căci $\varphi > \alpha$. Dacă nu ar fi frecări, atunci forța Q ar fi mult mai mare $Q \approx 52\,000$ kgf.

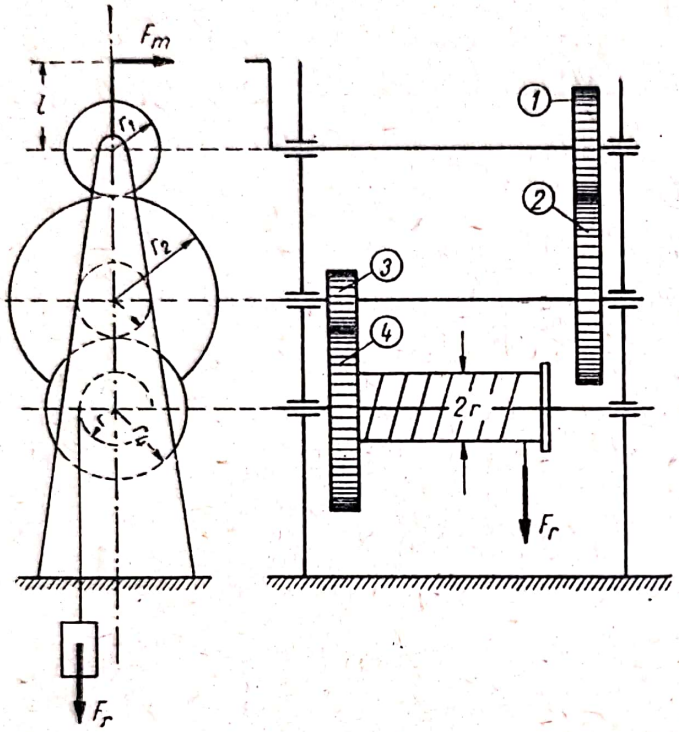


Fig. 11.11 *a*

11.11. Se consideră troliul din figura 11.11 *a* compus dintr-un tambur de rază r pe care se înfășoară un cablu, de care este atîrnată sarcina F_r. Tamburul este acționat de forța motoare F_m prin intermediul unei manivele de lungime l și unui angrenaj (r_1, r_2, r_3, r_4 sînt razele roților dințate). Cunoscînd randamentul η al acestei mașini, să se determine relația dintre F_r și F_m. Aplicație numerică: $F_r = 25$ kgf, $l = 30$ cm, $r_1 = 5$ cm, $r_2 = 40$ cm, $r_3 = 8$ cm, $r_4 = 40$ cm, $r = 13$ cm, $\eta = 0{,}65$.

Rezolvare. Izolînd roata dințată *1*, sistemul de roți coaxiale *2* și *3* și troliul

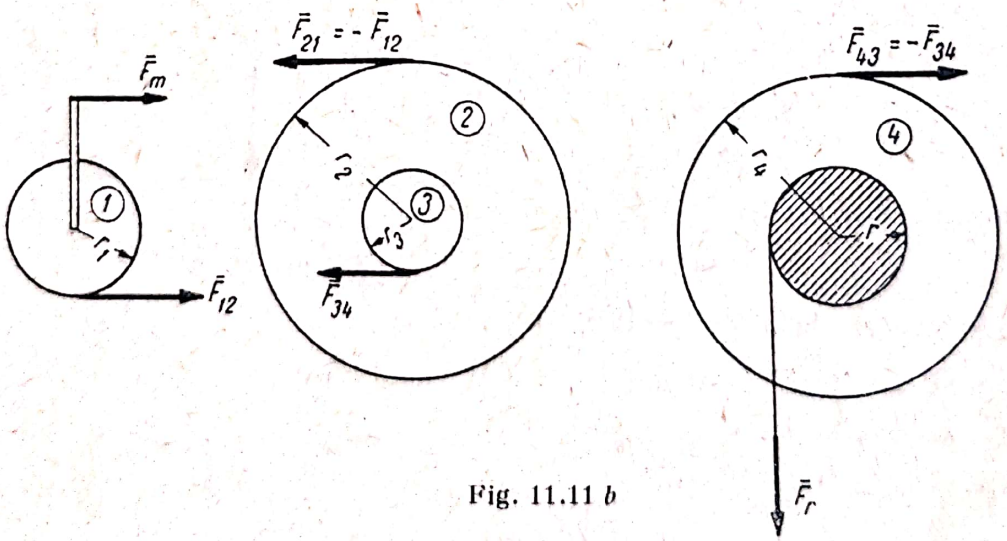


Fig. 11.11 *b*

(fig. 11.11 *b*) și scriind ecuațiile de moment față de axele respective în ipoteza că nu avem frecări:

$$-F'_m l + F_{12} r_1 = 0$$
$$F_{21} r_2 - F_{34} r_3 = 0$$
$$-F_{43} r_4 + F_r r = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem:

$$F_r = \frac{l r_2 r_4}{r_1 r_3 r} F'_m .$$

Din relația de definiție (11.1) a randamentului:

$$F_r = \frac{l r_2 r_4}{r_1 r_3 r} \eta F_m .$$

Făcînd înlocuirile numerice:

$$F_r = \frac{30 \times 40 \times 40 \times 0{,}65}{5 \times 8 \times 13} \times 25 = 1\,500 \text{ kgf}.$$

11.12. Figura 11.12 reprezintă un vinci cu cremalieră. Se cere să se stabilească ce sarcină F_r poate fi ridicată cu forța $F_m = 30$ kgf, randamentul fiind $\eta = 0{,}6$. Elementele geometrice sînt următoarele: $l = 400$ mm; $r_1 = r_2 = r_3 = 40$ mm; $R_2 = 80$ mm; $R_3 = 200$ mm.

Rezolvare. Se izolează pe rînd cremaliera, roțile dințate și pîrghia și se scriu ecuațiile de moment în raport cu axele de rotație. Dacă nu am avea frecări:

$$r_1 F_{12} - l F'_m = 0$$

$$R_2 F_{21} - r_2 F_{23} = 0$$

$$r_3 F_r - R_3 F_{32} = 0$$

de unde:

$$F_r = \frac{l R_2 R_3}{r_1 r_2 r_3} F'_m .$$

Ținînd seama de definiția (11.1) a randamentului:

$$F_r = \frac{\eta l R_2 R_3}{r_1 r_2 r_3} F_m .$$

Făcînd înlocuirile numerice:

$$F_r = \frac{0{,}6 \times 400 \times 80 \times 200}{40 \times 40 \times 40} \times 30 =$$

$$= 1\,800 \text{ kgf}.$$

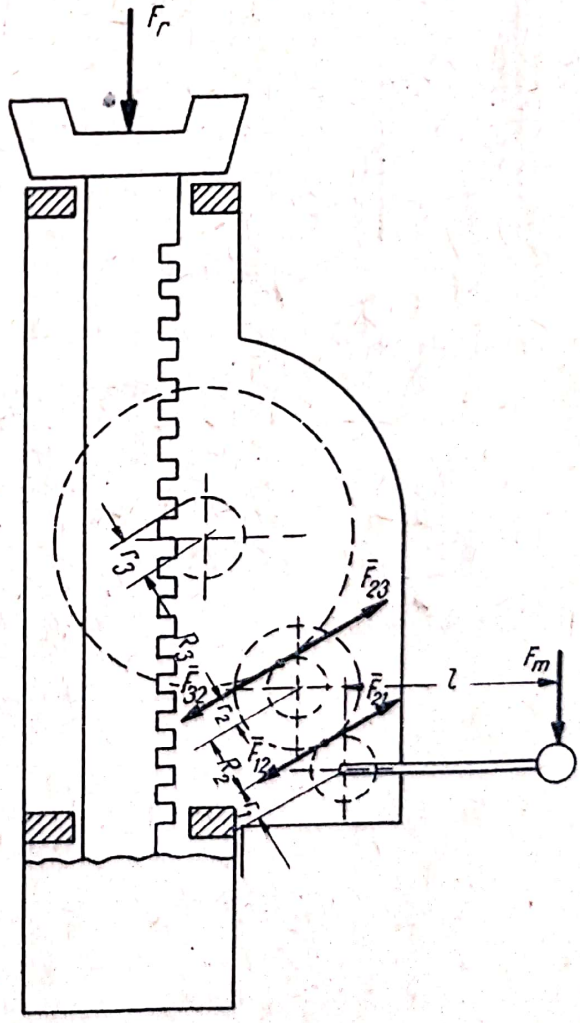


Fig. 11.12

11.13. În figura 11.13 *a* este reprezentat un palan melc, la care un șurub antrenează o roată dințată solidară cu un tambur pe care se înfășoară cablul unui scripete

mobil. Dîndu-se $R = 20$ cm, $r = 6$ cm (raza șurubului), $p = 1{,}2$ cm (pasul șurubului), $\varphi = 4°$ (unghiul de frecare al șurubului), $R_1 = 18$ cm, $r_1 = 8{,}8$ cm, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}2$ cm (distanța cu care se îndepărtează sau se apropie firul de scripete), $r_2 = 8$ cm, $\mu = 0{,}05$ (coeficientul de frecare în axul scripeților), $\rho = \rho_1 = \rho_2 = 0{,}5$ cm (raza axului scripeților), $F_r = 1\,000$ kgf, se cere F_m și η.

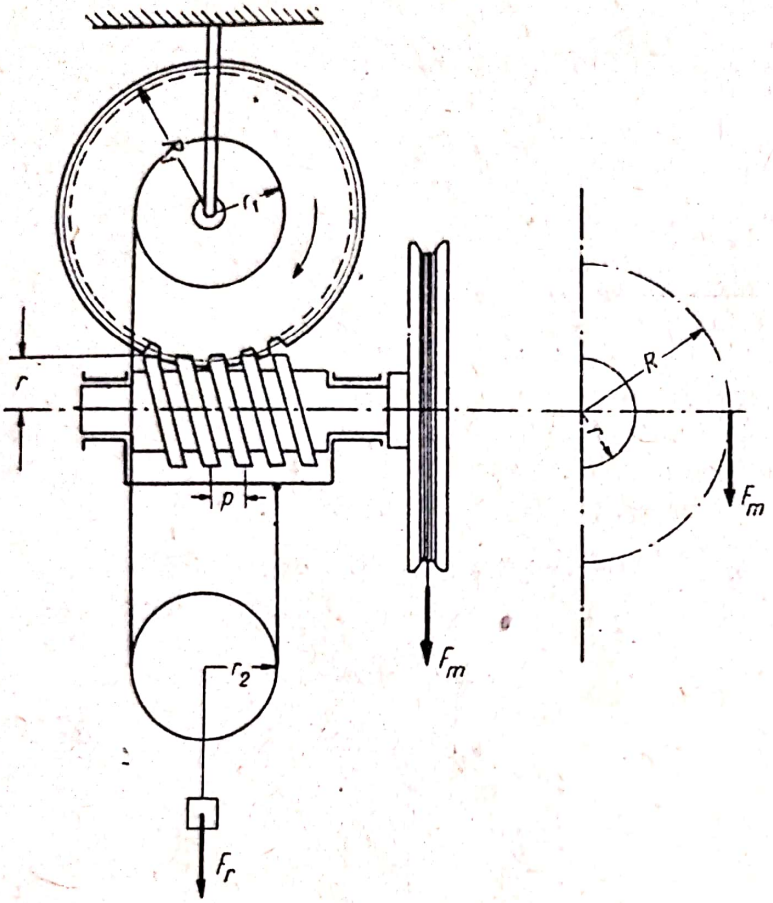


Fig. 11.13 *a*

Rezolvare. Izolînd corpurile care alcătuiesc sistemul, dacă T este forța cu care acționează șurubul asupra roții dințate, conform (11.26):

$$T = \frac{F_m R}{r \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} \qquad (1)$$

deoarece:

$$M_m = RF_m .$$

Pentru roata dințată (fig. 11.13 *b*) ecuațiile de echilibru sînt:

$$X = R_x - T = 0$$

$$Y = R_y - T_1 = 0$$

$$M_0 = T_1 (r_1 + \varepsilon_1) - TR_1 + M_f = 0$$

$$M_f = \mu\rho \sqrt{R_x^2 + R_y^2} .$$

Din aceste ecuații eliminînd forțele de legătură rezultă:

$$T_1 (r_1 + \varepsilon_1) - R_1 T + \mu\rho \sqrt{T^2 + T_1^2} = 0$$

de unde:

$$T_1 = \frac{R_1 - \mu\rho \sqrt{1 + \left(\frac{R_1}{r_1 + \varepsilon_1}\right)^2 - \left(\frac{\mu\rho}{r_1 + \varepsilon_1}\right)^2}}{r_1 + \varepsilon_1 - \frac{\mu^2\rho^2}{r_1 + \varepsilon_1}} T \approx \frac{R_1 - \mu\rho \sqrt{1 + \left(\frac{R_1}{r_1 + \varepsilon_1}\right)^2}}{r_1 + \varepsilon_1} T \qquad (2)$$

deoarece termenii care conțin factorul μ^2 sînt neglijabili în raport cu ceilalți termeni.

Pentru scripetele mobil (fig. 11.13 *c*) cum forța motoare este T_1 conform (11.13):

$$T_1 = \lambda T_2$$

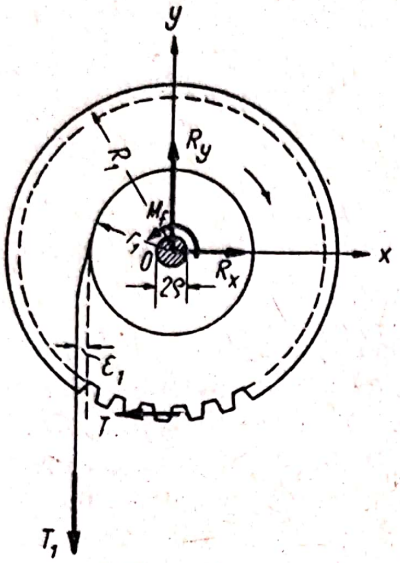


Fig. 11.13 *b*

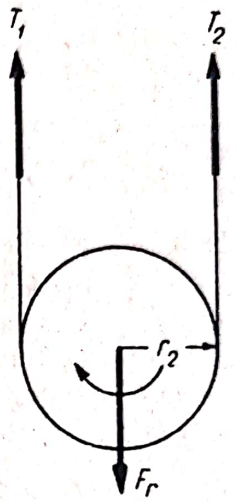


Fig .11.13 *c*

unde din (11.14):

$$\lambda = \frac{r_2 + \varepsilon_2 + \mu\rho}{r_2 - \varepsilon_1 - \mu\rho}$$

și proiectînd forțele pe verticală:

$$F_r = T_1 + T_2$$

de unde:

$$T_1 = \frac{\lambda F_r}{1+\lambda} = \frac{r_2 + \varepsilon_2 + \mu\rho}{2r_2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2} F_r . \qquad (3)$$

Din (1), (2) și (3) rezultă:

$$F_m = F_r \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \frac{r(r_1 + \varepsilon_1)(r_2 + \varepsilon_2 + \mu\rho)}{R\left[R_1 - \mu\rho\sqrt{1 + \left(\frac{R_1}{r_1 + \varepsilon_1}\right)^2}\right](2r_2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2)} . \qquad (4)$$

Dacă legăturile ar fi ideale $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\mu = 0$, $\varphi = 0$:

$$F'_m = \frac{rr_1 \operatorname{tg}\alpha}{2RR_1} F_r \qquad (5)$$

deci randamentul este:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} \cdot \frac{r_1}{r_1 + \varepsilon_1} \cdot \frac{R_1 - \mu\rho\sqrt{1 + \left(\frac{R_1}{r_1 + \varepsilon_1}\right)^2}}{R_1} \frac{(2r_2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2(r_2 + \varepsilon_2 + \mu\rho)} \qquad (6)$$

Scanned with OKEN Scanner

Făcînd înlocuirile numerice $\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{2\pi r} = 0{,}0318$; $\alpha = 1°50'$; $\operatorname{tg}(\alpha+\varphi) = 0{,}102$:

$$F_m = 1\,000 \times 0{,}102 \frac{6 \times (8{,}8 + 0{,}2) \times (8 + 0{,}2 + 0{,}025)}{20 \times \left[18 - 0{,}025 \sqrt{1 + \left(\frac{18}{8{,}8 + 0{,}2}\right)^2}\right] \times 2 \times 8} = 7{,}9 \text{ kgf}$$

$$\eta = \frac{0{,}0318}{0{,}102} \times \frac{8{,}8}{9} \times \frac{18 - 0{,}025 \sqrt{1 + \left(\frac{18}{8{,}8 + 0{,}2}\right)^2}}{18} \times \frac{16}{2(8 + 0{,}2 + 0{,}025)} = 0{,}296.$$

11.14. Un dispozitiv de ridicat (fig. 11.14 *a*) este format din două pîrghii identice ABC și $A'B'C'$ fixate prin articulații de bara BB' care se reazemă cu frecare prin intermediul penițelor A și A' pe pana D, iar prin penițele inferioare C și C' strîng corpul greu E care trebuie ridicat. Cunoscînd lungimile l_1, l_2 unghiurile α, β și unghiul de frecare φ dintre pana D și penițele A și A' și neglijînd greutatea dispozitivului de ridicat, să se determine coeficientul de frecare f dintre corpul E și penițele C și C' $\left(\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = \frac{\pi}{2}\right)$.

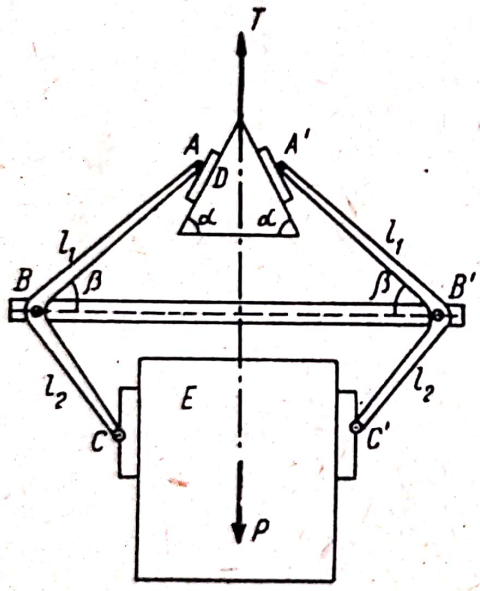


Fig. 11.14 *a*

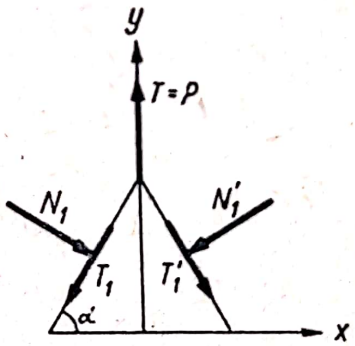


Fig. 11.14 *b*

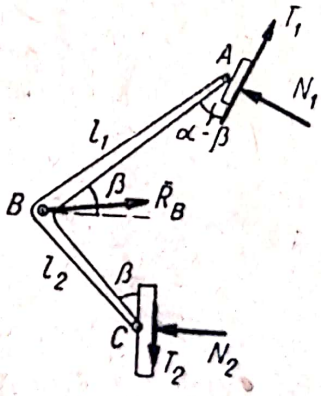


Fig. 11.14 *c*

Rezolvare. Aplicînd teorema solidificării obținem tensiunea din cablul care ridică dispozitivul:

$$T = P.$$

Vom izola corpurile care alcătuiesc sistemul. Ecuațiile de echilibru pentru pana D (fig. 11.14 *b*) sînt:

$$X = (N_1 - N_1')\sin\alpha - (T_1 - T_1')\cos\alpha = 0$$

$$Y = P - (N_1 + N_1')\cos\alpha - (T_1 + T_1')\sin\alpha = 0$$

$$T_1 = N_1 \operatorname{tg}\varphi \qquad T_1' = N_1' \operatorname{tg}\varphi$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde:

$$N_1 = N_1' = \frac{P \cos \varphi}{2 \cos (\alpha - \varphi)} \qquad T_1 = T_1' = \frac{P \sin \varphi}{2 \cos (\alpha - \varphi)} \tag{1}$$

Izolînd pîrghia ABC (fig. 11.14 *c*) cu pernițele A și C și aplicînd teorema solidificării acestor trei corpuri eliminăm reacțiunile interioare din articulațiile A și C. Scriem o ecuație de momente față de B pentru a elimina reacțiunea $\bar{R}_B$:

$$M_B = T_1 l_1 \sin (\alpha - \beta) + N_1 l_1 \cos (\alpha - \beta) - T_2 l_2 \sin \beta - N_2 l_2 \cos \beta = 0 \tag{2}$$

În sfîrșit izolînd corpul E (fig. 11.14 *d*) ecuațiile de echilibru sînt:

$$X = N_2 - N_2' = 0$$

$$Y = T_2 + T_2' - P = 0$$

$$T_2 = f N_2 \qquad T'_2 = f N_1$$

de unde:

$$N_2 = N_2' = \frac{P}{2f} \qquad T_2 = T_2' = \frac{P}{2}. \tag{3}$$

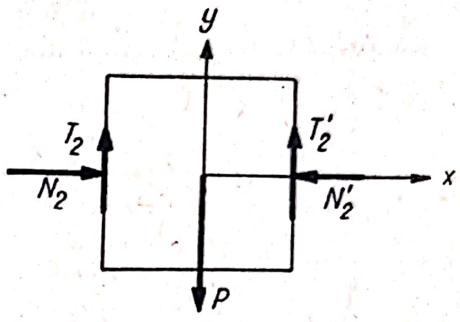


Fig. 11.14 *d*

Înlocuind valorile (1) și (3) în ecuația (2) obținem pentru poziția limită de echilibru:

$$\frac{1}{f} = \frac{l_1 \cos (\alpha - \beta - \varphi)}{l_2 \cos (\alpha - \varphi) \cos \beta} - \operatorname{tg} \beta = \frac{l_1}{l_2} + \frac{l_1}{l_2} \operatorname{tg} (\alpha - \varphi) \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta$$

și deci:

$$f \geqslant \frac{l_2}{l_1 + \operatorname{tg} \beta \, [l_1 \operatorname{tg} (\alpha - \varphi) - l_2]}.$$

11.15. Să se determine forța F cu care poate fi frînată roata *3* asupra căreia acționează momentul motor M (fig. 11.15 *a*). Se cunosc lungimile a, b, l, l_1, l_2, r, unghiul α și coeficientul de frecare f dintre saboți și frînă. Se neglijează greutatea dispozitivului de frînare precum și frecările din articulațiile A, B, C, D, E, și O.

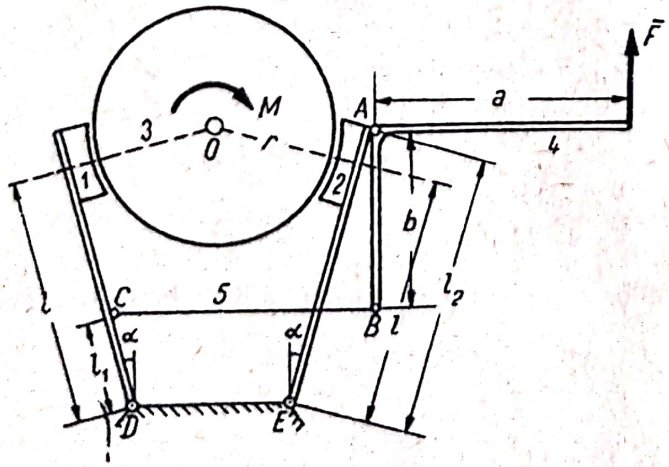


Fig. 11.15 *a*

Rezolvare. Va trebui să izolăm cele cinci corpuri care alcătuiesc sistemul și să scriem ecuațiile (11.30) de echilibru. Obținem astfel 15 ecuații care cu cele două condiții de frecare (7.1′) din sabotul *1* și *2* ne servesc la determinarea

celor 17 necunoscute ce intervin în problemă: componentele H_A, V_A, H_B, V_B, H_C, V_C, H_D, V_D, H_E, V_E, H_0, V_0 ale reacțiunilor din articulații, reacțiunile normale N_1, N_2 și forțele de frecare T_1, T_2 dintre saboți și roată și forța de frînare F (vezi fig. 11.15 *b* ... *f*).

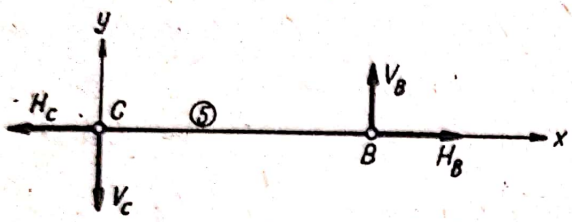


Fig. 11.15 *b*

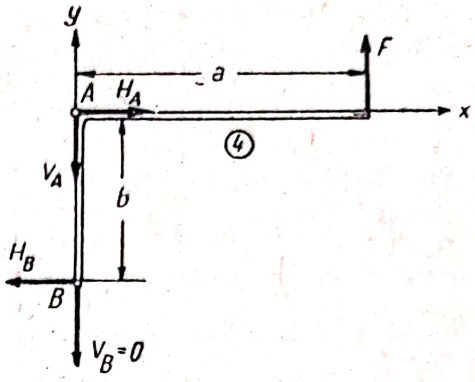


Fig. 11.15 *c*

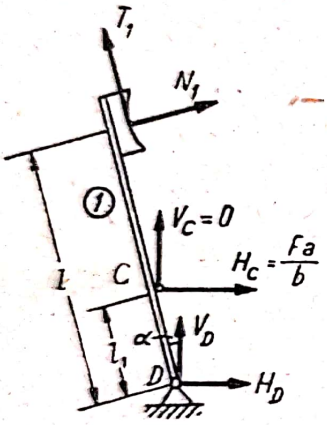


Fig. 11.15 *d*

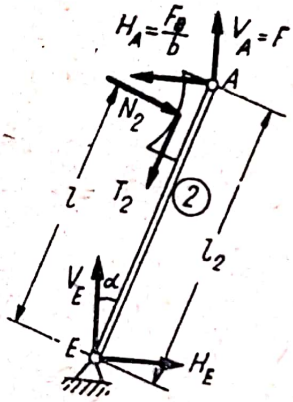


Fig. 11.15 *e*

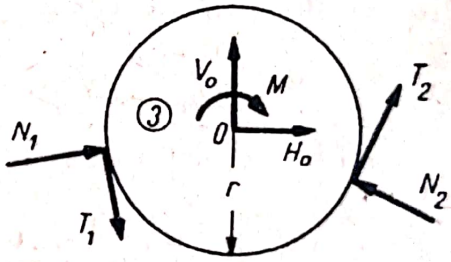


Fig. 11.15 *f*

Ecuațiile de echilibru pentru bara *5* (fig. 11.15 *b*) sînt:

$$X = H_B - H_C = 0$$
$$Y = V_B - V_C = 0$$
$$M_C = V_B \cdot CB = 0$$

deci:

$$V_B = V_C = 0$$
$$H_B = H_C$$

bara *5* fiind supusă numai la forțe axiale (bară dublu articulată acționată de forțe numai în articulații).

Pentru pîrghia *4* (fig. 11.15 *c*):

$$X = H_A - H_B = 0$$
$$Y = F - V_A = 0$$
$$M_A = Fa - H_B\, b = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde:

$$H_A = H_B = H_C = \frac{Fa}{b}$$
$$V_A = F.$$

Pentru sabotul *1* (fig. 11.15 *d*), deoarece reacțiunea din articulația D nu ne interesează, scriem ecuația de momente:

$$M_D = N_1 l - \frac{Fa}{b} l_1 \cos\alpha = 0$$

de unde:

$$N_1 = \frac{F\,a\,l_1}{b\,l} \cos\alpha.$$

Analog pentru sabotul *2* (fig. 11.15 *e*) scriem ecuația de momente:

$$M_E = -N_2 l + \frac{F\,a}{b} l_2 \cos\alpha + F l_2 \sin\alpha = 0$$

de unde:

$$N_2 = \frac{F\,a\,l_2}{b\,l} \cos\alpha + \frac{F\,l_2}{l} \sin\alpha.$$

Pentru roata *3* (fig. 11.15 *f*) scriem ecuația de momente:

$$M_0 = -M + T_1 r + T_2 r$$

unde:

$$T_1 \leqslant f N_1 \qquad T_2 \leqslant f N_2.$$

Eliminînd reacțiunile N_1, T_1, N_2, T_2 din relațiile de mai sus obținem forța de frînare:

$$F \geqslant \frac{b\,l\,M}{f\,r\,[\,a\,(l_1 + l_2)\cos\alpha + b\,l_2 \sin\alpha\,]}.$$

Pentru ca forța de frînare să fie mică trebuie ca frecarea (f) să fie mare iar raportul $\frac{b}{a}$ cît mai mic.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

11.16. Să se determine F_m pentru sistemul de pane din figura 11.16. Se cunosc F_r, unghiurile α și β ($\beta > \alpha$) și unghiul de frecare φ dintre pane. Se neglijează frecările din ghidaje. Care este condiția de autofixare a sistemului?

Răspuns.

$F_m = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\beta + \varphi)} F_r$. Sistemul se autofixează pentru $\varphi \geqslant \alpha$.

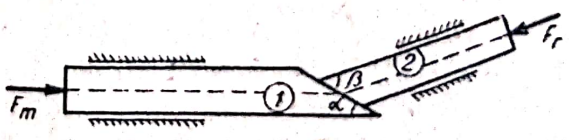


Fig. 11.16

11.17. Se consideră sistemul de scripeți din figura 11.17. Dîndu-se $F_r = 200$ kgf, $\lambda = 1{,}05$ (același pentru toți scripeții), să se determine F_m și η.

Răspuns.

$$F_m = \frac{\lambda^8 (\lambda - 1)}{(\lambda^8 - 1)(1 + \lambda)} F_r = 26{,}1 \text{ kgf}$$

$$\eta = \frac{(\lambda^8 - 1)(1 + \lambda)}{10\, \lambda^8 (\lambda - 1)} = 0{,}767.$$

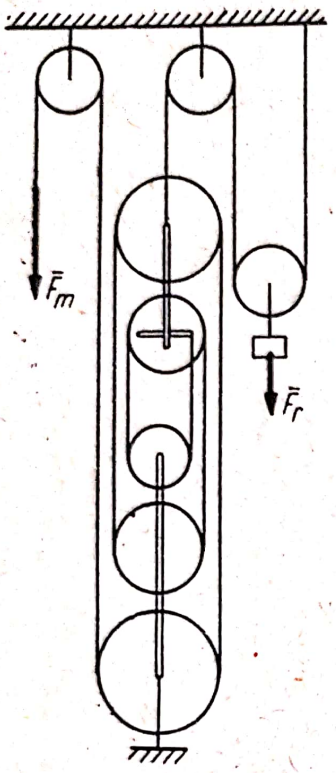


Fig. 11.17

11.18. Să se determine forța F_m necesară ridicării corpului de greutate F_r pe planul înclinat. Se dă unghiul α, unghiul de frecare φ dintre corp și planul înclinat, lungimile a și b. Se neglijează frecările din articulația C a pîrghiei.

Răspuns. $F_m = \dfrac{b \sin(\alpha + \varphi)}{a \sin \alpha \cos \varphi} F_r$.

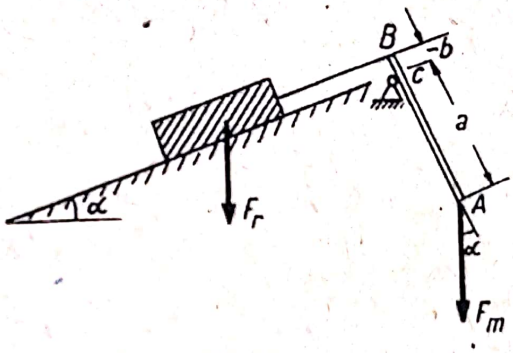


Fig. 11.18

Capitolul XII

ELEMENTE DE STATICĂ GRAFICĂ

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Cazul *forțelor concurente* a fost tratat grafic și în capitolul I.

Forțele concurente se compun cu ajutorul poligonului forțelor, rezultanta fiind reprezentată de vectorul care unește originea primei forțe cu extremitatea ultimei forțe din poligon. Dacă forțele sînt date în spațiu folosim metodele Geometriei Descriptive. Construim o epură în care reprezentăm proiecțiile $\bar{F}_i'$ și $\bar{F}_i''$ ale forțelor $\bar{F}$ pe un plan orizontal și pe un plan vertical și compunem aceste proiecții cu ajutorul a două poligoane de forțe obținînd proiecțiile:

$$\bar{R}' = \Sigma \bar{F}_i' \qquad \bar{R}_i'' = \Sigma \bar{F}_i'' \tag{12.1}$$

ale rezultantei $\bar{R} = \Sigma \bar{F}_i$ (fig. 12. *a*).

Descompunerea unei forțe $\bar{F}$ aplicată într-un punct A după trei direcții concurente necoplanare Δ_1, Δ_2, Δ_3 se face construind un paralelipiped avînd muchiile paralele cu direcțiile date și ca diagonală vectorul forță dat.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru aceasta determinăm intersecţia AB a planelor definite de suportul lui $\overline{F}$ şi de Δ_1 respectiv de Δ_2 şi Δ_3. (În epura din figura 12. *b* punctul B se obţine unind urmele orizontale C_1 şi D respectiv C_2 şi C_3 ale lui Δ_1, F, Δ_2 şi Δ_3.)

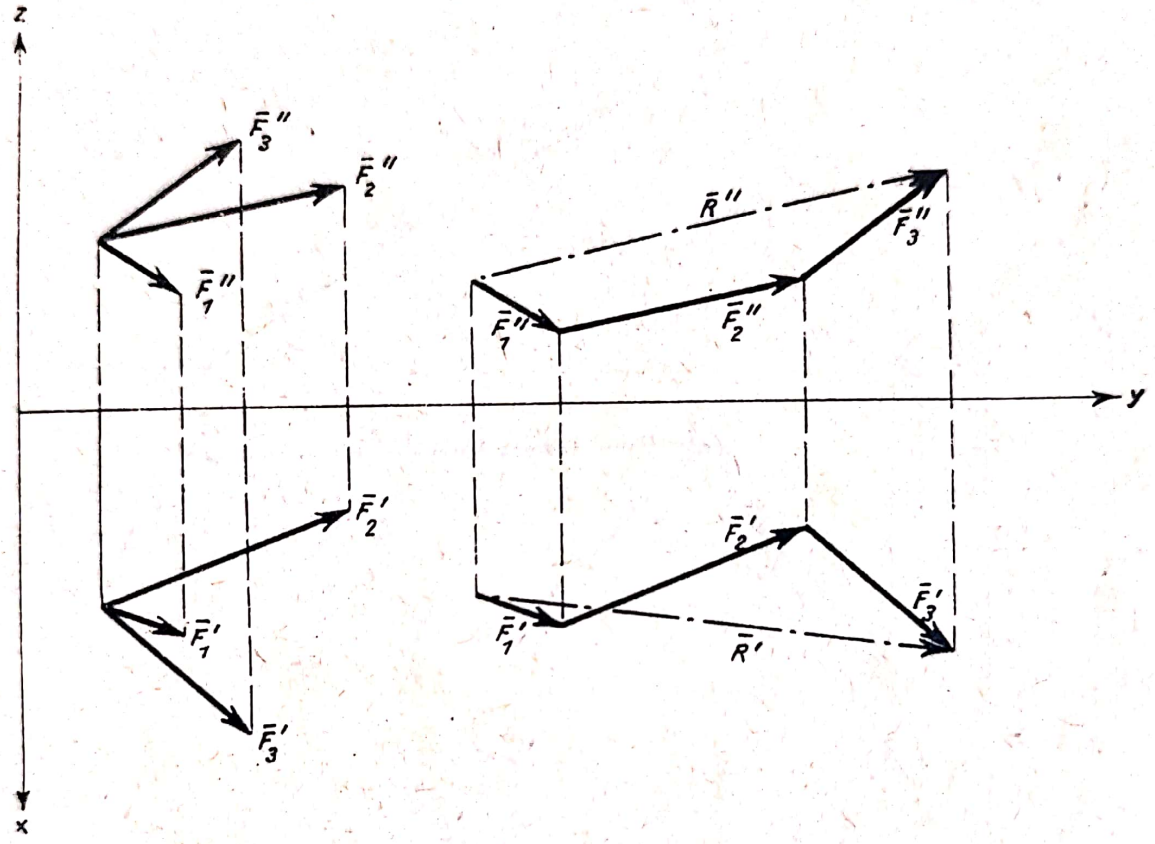


Fig. 12. *a*

Descompunem folosind regula paralelogramului, forţa $\overline{F}$ în componentele $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_{23}$ după direcţiile Δ_1 şi AB iar componenta $\overline{F}_{23}$ în componentele $\overline{F}_2$ şi $\overline{F}_3$ după direcţiile Δ_2 şi Δ_3. Notînd proiecţiile pe planul orizontal cu un accent $'$ şi cele pe planul vertical cu două accente $''$ avem:

$$\begin{aligned} \overline{F}' &= \overline{F}_1' + \overline{F}_2' + \overline{F}_3' \\ \overline{F}'' &= \overline{F}_1'' + \overline{F}_2'' + \overline{F}_3''. \end{aligned} \qquad (12.2)$$

Reducerea unui sistem de forţe plane se poate face cu ajutorul poligonului forţelor şi poligonului funicular.

Fie un sistem de forţe plane $\overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_n$ acţionînd asupra unui solid rigid (fig. 12. *c*). Cu ajutorul poligonului forţelor determinăm rezultanta $\overline{R} = \Sigma \overline{F}_i$. Alegem un punct arbitrar O şi unim acest pol cu extremităţile forţelor obţinînd razele polare notate cu $0, 1, \ldots, n$. Ducem o paralelă la raza polară 0 pînă în punctul A_1 unde întîlneşte suportul forţei $\overline{F}_1$, din A_1 ducem o paralelă la raza polară 1 pînă în punctul A_2 unde întîlneşte suportul forţei $\overline{F}_2$, ..., din A_{n-1} ducem o paralelă la raza polară $n-1$ pînă în punctul A_n unde întîlneşte suportul forţei $\overline{F}_n$ şi în sfîrşit din A_n ducem

Scanned with OKEN Scanner

o paralelă la ultima rază polară n. Poligonul astfel obținut este poligonul funicular. Sistemul de forțe $\overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_n$ este echivalent cu forțele $\overline{a_0 O}$ și $\overline{O a_n}$ aplicate pe laturile extreme 0 și n ale poligonului funicular. Unind

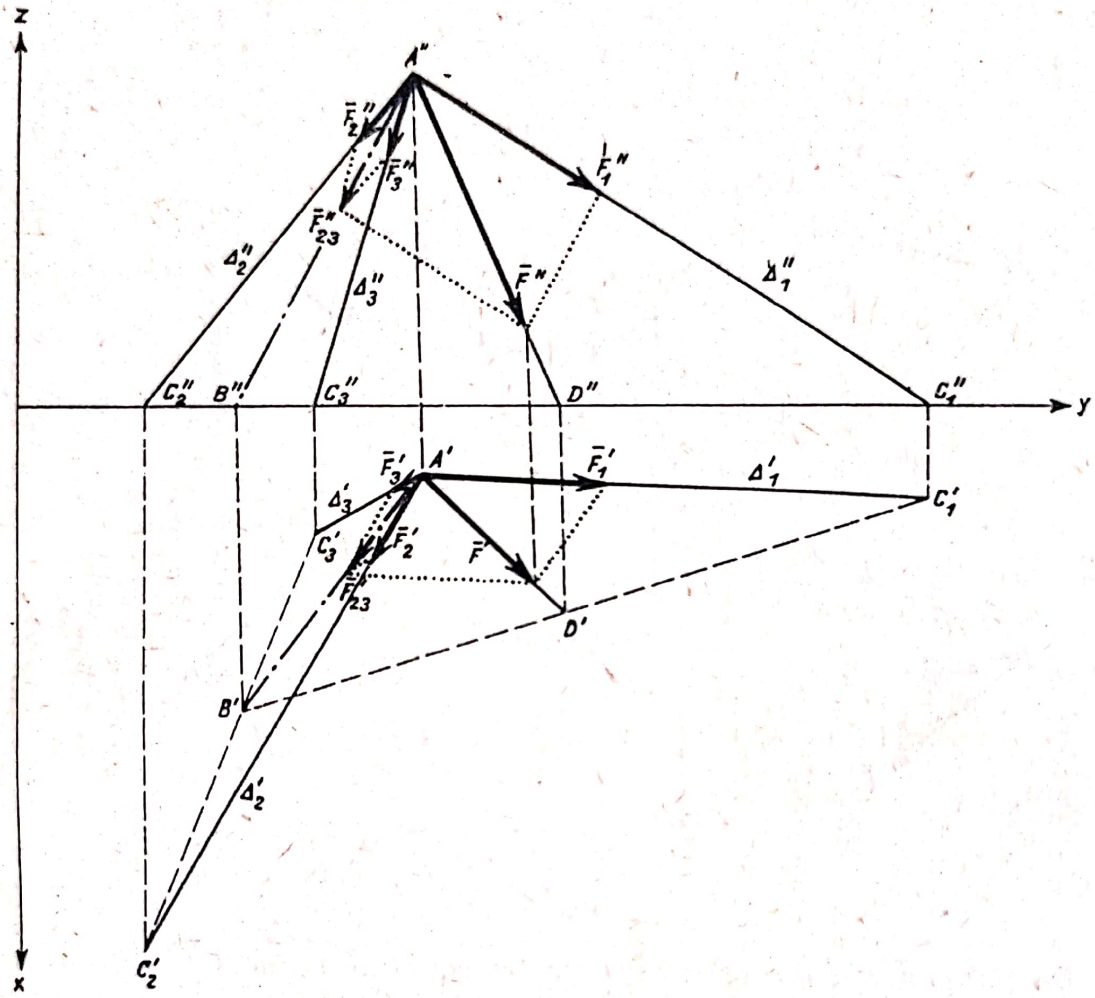


Fig. 12. *b*

aceste laturi ele se intersectează în punctul B, punct prin care trece suportul rezultantei.

Un sistem de forțe plane $\overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_n$ acționînd asupra unui solid rigid este echivalent:

1. Cu o forță unică, rezultanta

$$\overline{R} = \Sigma \overline{F}_i \neq 0 \qquad (12.3)$$

dacă poligonul forțelor nu se închide. Suportul rezultantei se determină cu ajutorul construcției din figura 12, *c*.

2. Cu un cuplu. În acest caz poligonul forțelor se închide $\overline{R} = 0$, și laturile extreme 0 și n din poligonul funicular sînt paralele și distincte. Momentul cuplului este în modul:

$$|\overline{M}| = d\,|\overline{a_0 O}| \qquad (12.4)$$

unde d este distanța dintre laturile extreme ale poligonului funicular pe care acționează forțele $\overline{a_0O}$ și $\overline{Oa_n} = -\overline{a_0O}$ (fig. 12. d).

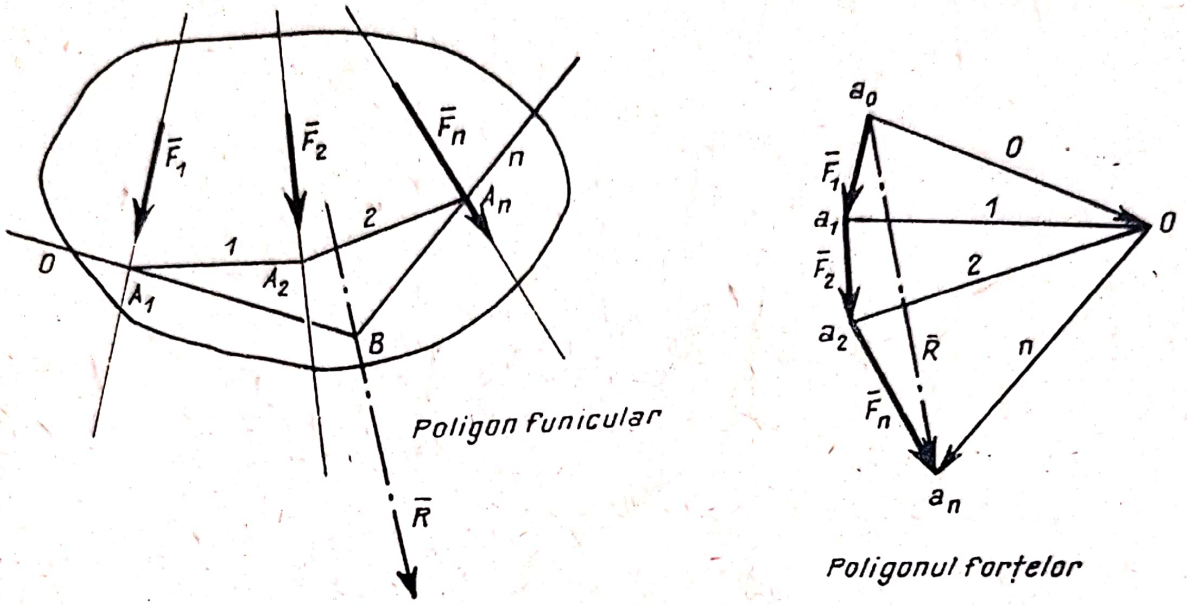


Fig. 12. c

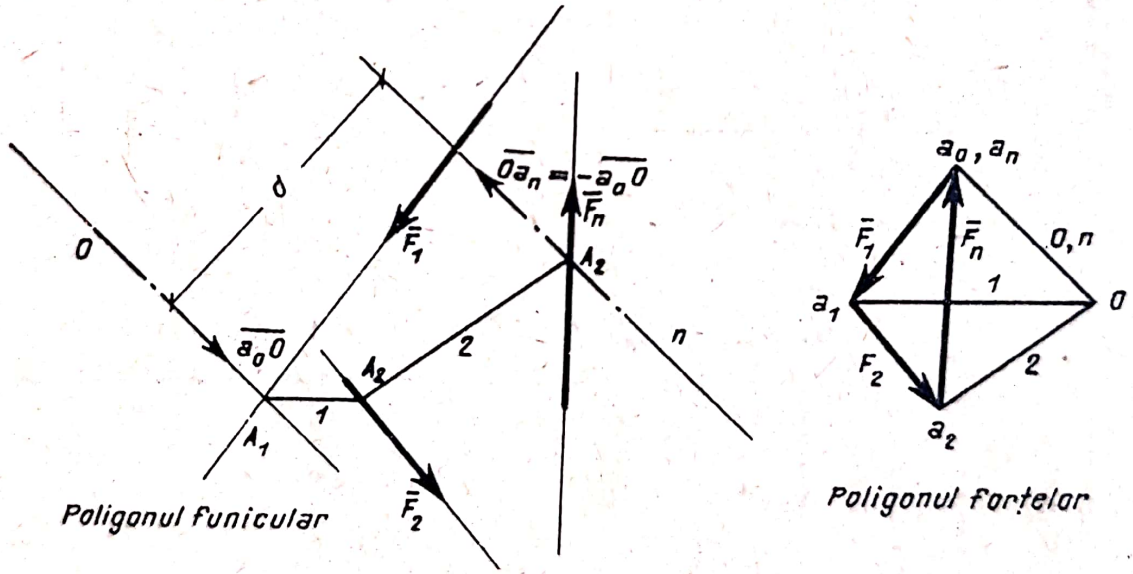


Fig. 12. d

3. Cu zero dacă poligonul forțelor se închide $\bar{R} = 0$ și laturile extreme din poligonul funicular sînt confundate.

Vom avea nevoie de următoarea proprietate a poligonului funicular.

Dacă considerăm pentru un același sistem de forțe două poligoane funiculare corespunzînd la doi poli diferiți O și O' punctele de intersecție C_i ale laturilor corespondente i și i' ($i = 0, 1, \ldots, n$) din cele două poligoane sînt situate pe o dreaptă, axa polară, paralelă cu dreapta OO' (fig. 12. e). (12.5)

Putem găsi pe cale grafică poziția centrului C al forțelor paralele coplanare $\bar{F}_i$. Determinăm cu ajutorul a două poligoane funiculare supor-

turile rezultantei pentru două direcții Δ și Δ' ale acestor forțe; la intersecția acestor suporturi se găsește centrul C. În general se preferă ca cele

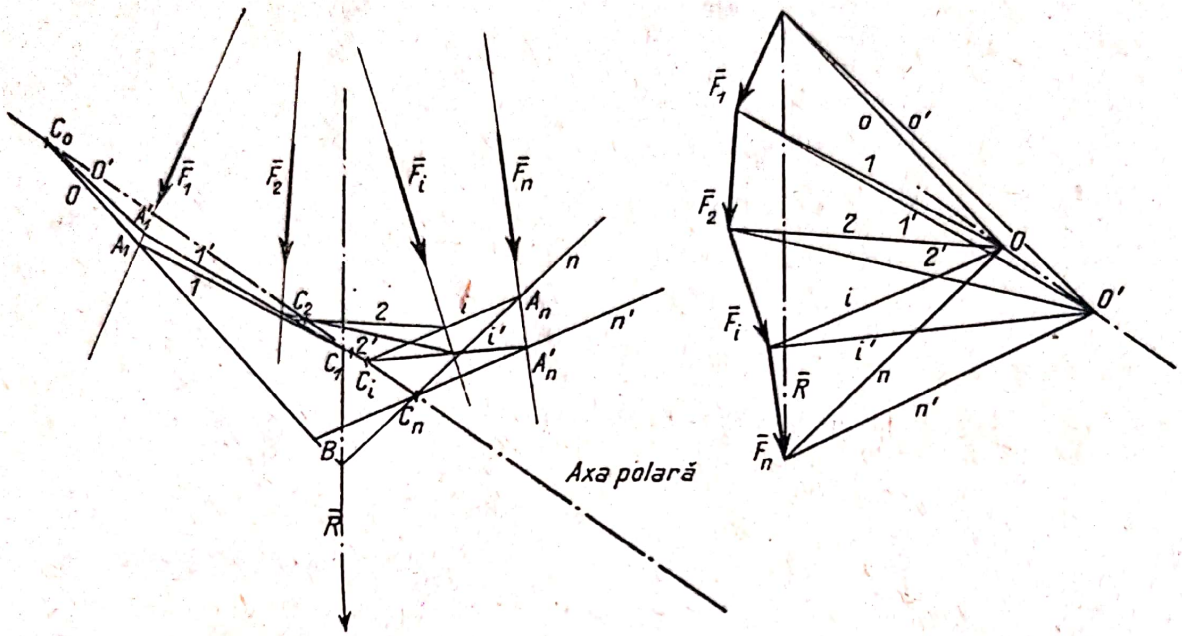


Fig. 12. *e*

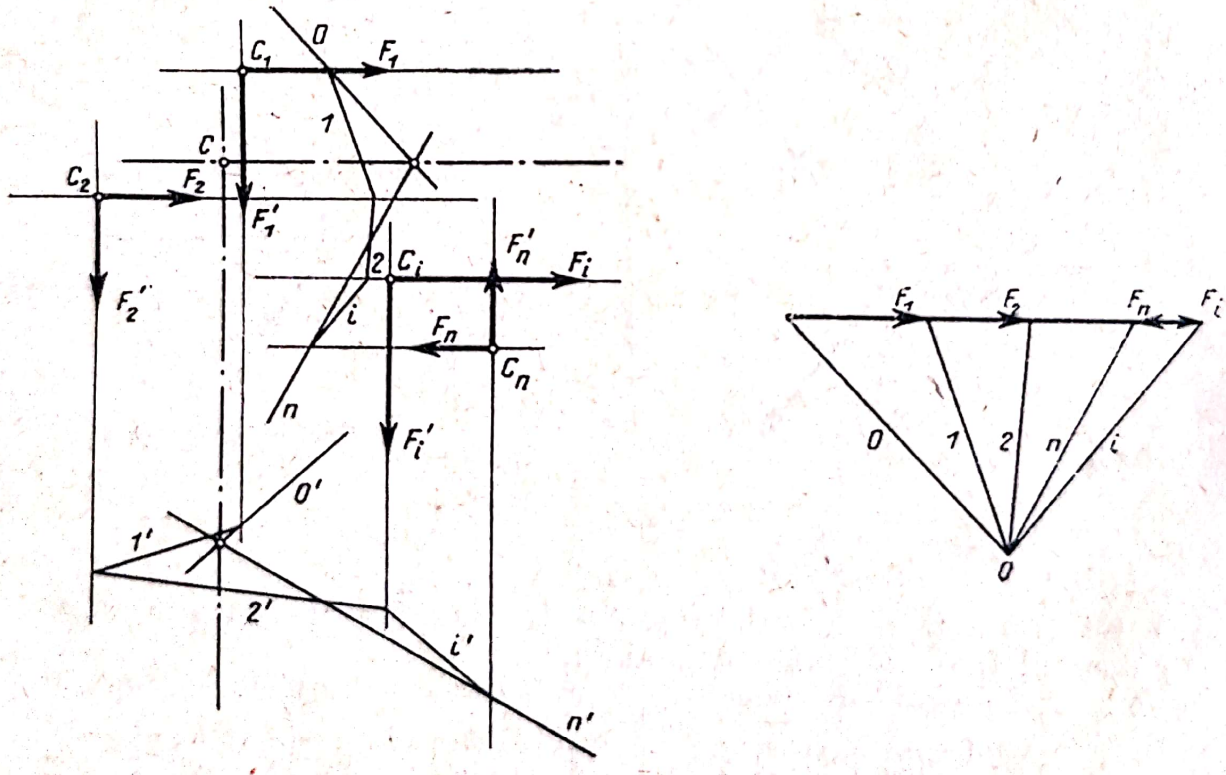


Fig. 12. *f*

două direcții să fie perpendiculare, în acest caz fiind suficient să construim poligonul forțelor pentru una dintre direcții, de exemplu Δ laturile poligonului funicular pentru direcția Δ' fiind perpendiculare pe laturile corespondente direcției Δ (fig. 12. *f*).

Aceeaşi construcţie o folosim şi la determinarea pe cale grafică a centrelor de greutate. Dacă corpul are un contur complicat calculul grafic este aproximativ, eroarea fiind însă mică ($\leqslant 2\%$) dacă împărţim corpul în suficient de multe suprafeţe (sau arce) elementare. [Suprafeţele pot fi asimilate cu dreptunghiuri sau trapeze, (v. fig. 12. *g*)]. Dacă corpul are o axă de simetrie, centrul de greutate găsindu-se pe axa de simetrie este suficient să construim un singur poligon funicular.

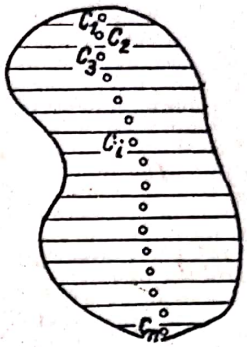


Fig. 12. *g*

Problema echilibrului punctului material a fost tratată grafic în capitolul II.

Un solid se află în echilibru sub acţiunea unui sistem de forţe situate într-un plan dacă $\overline{R} = 0$, $\overline{M}_0 = 0$ adică dacă poligonul forţelor se închide şi dacă poligonul funicular are laturile extreme confundate. În particular un solid acţionat de două forţe $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$ este în echilibru dacă forţele sînt egale şi direct opuse:

$$\overline{F}_1 = -\overline{F}_2 \tag{12.6}$$

şi se găsesc pe acelaşi suport.

Un solid acţionat de trei forţe $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ este în echilibru dacă poligonul forţelor se închide, adică

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 = 0 \tag{12.7}$$

(forţele sînt neapărat coplanare) şi dacă suporturile celor trei forţe sînt concurente.

Putem determina pe cale grafică reacţiunile unui corp cu trei reazeme simple (reacţiunile avînd suporturile coplanare neparalele sau neconcurente). Dacă $\overline{F}$ este rezultanta forţelor efectiv aplicate, descompunem forţa $\overline{F}$ în componenta $\overline{F}_1$ pe direcţia BA_1 şi $\overline{F}_{23}$ pe direcţia BC, apoi descompunem componenta $\overline{F}_{23}$ în componentele $\overline{F}_2$ pe direcţia CA_2 şi $\overline{F}_3$ pe direcţia CA_3 (fig. 12. *h*). Reacţiunile căutate sînt:

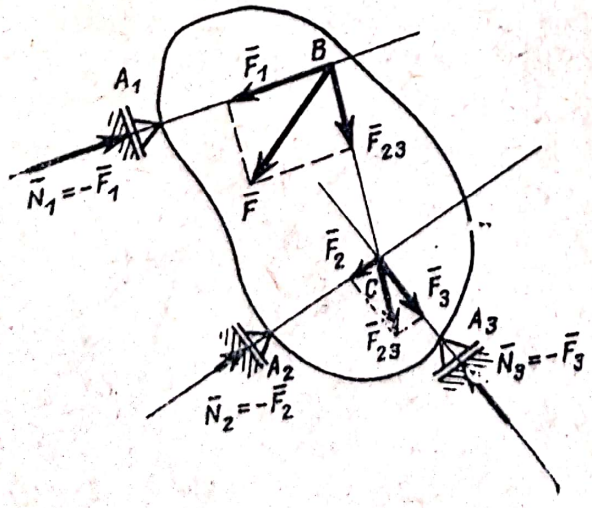


Fig. 12. *h*

$$\overline{N}_1 = -\overline{F}_1 \quad \overline{N}_2 = -\overline{F}_2 \quad \overline{N}_3 = -\overline{F}_3. \tag{12.8}$$

Punctul B este punctul de intersecţie al suportului reacţiunii $\overline{N}_1$ cu suportul forţei $\overline{F}$, iar C este punctul de intersecţie al suporturilor reacţiunilor $\overline{N}_2$ şi $\overline{N}_3$.

Determinarea reacţiunilor la un corp cu două reazeme simple avînd

suporturile reacțiunilor paralele cu rezultanta $\overline{F}$ a forțelor efectiv aplicate se face cu ajutorul poligonului funicular (fig. 12. *i*). Laturile extreme *0* și *n* ale poligonului funicular întîlnesc suporturile reacțiunilor $\overline{N}_1$ și $\overline{N}_2$

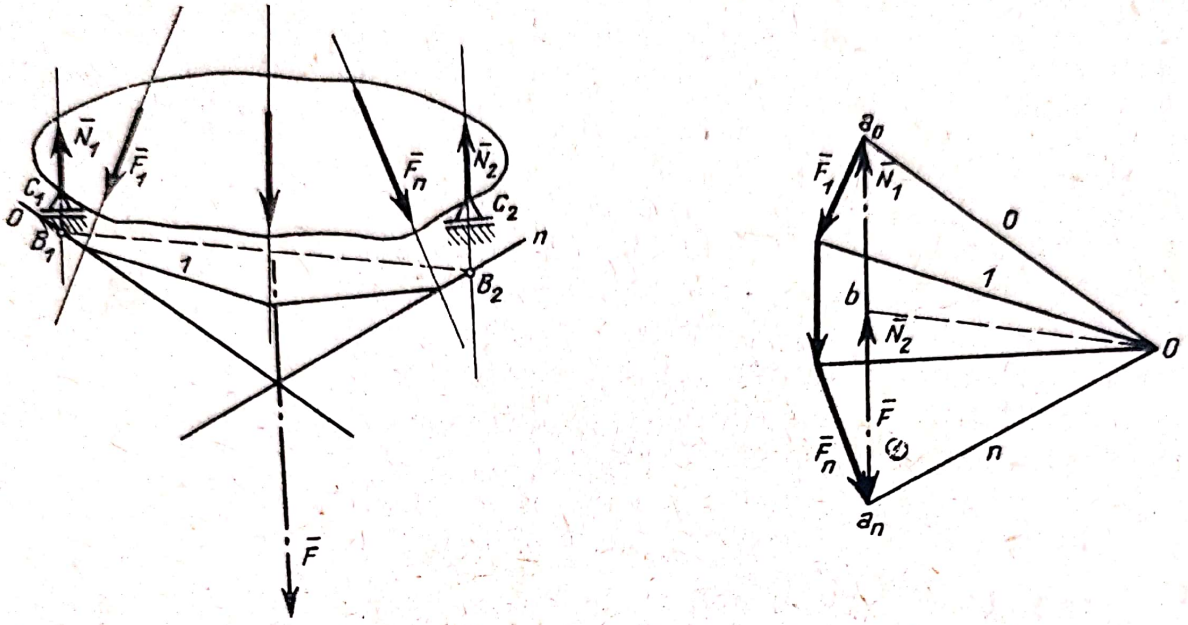


Fig. 12. *i*

din reazeme în punctele B_1 și B_2. Paralela dusă în poligonul forțelor prin *O* la dreapta de închidere B_1B_2 întîlnește rezultanta $\overline{F}$ în punctul *b* iar reacțiunile căutate sînt:

$$\overline{N}_1 = \overline{b\,a_0} \text{ și } \overline{N}_2 = \overline{a_n b}. \qquad (12.9)$$

Cazul solidului rigid rezemat și articulat (fig. 12. *j*) se reduce la cazul a trei forțe: rezultanta forțelor efectiv aplicate $\overline{F}$ cunoscută, reacțiunea $\overline{N}$ din reazemul simplu avînd suportul cunoscut și reacțiunea $\overline{R}$ din articulație al cărui suport trece prin punctul de intersecție *C* al suporturilor forțelor $\overline{F}$ și $\overline{N}$. Evident poligonul forțelor se închide:

$$\overline{F} + \overline{R} + \overline{N} = 0. \qquad (12.10)$$

În cazul cînd ținem seama de frecarea de lunecare putem folosi metoda patrulaterului frecărilor (cap. VII).

În sfîrșit în cazul sistemelor de corpuri punem condițiile de echilibru pentru fiecare corp și ținem seama de principiul acțiunii și al reacțiunii.

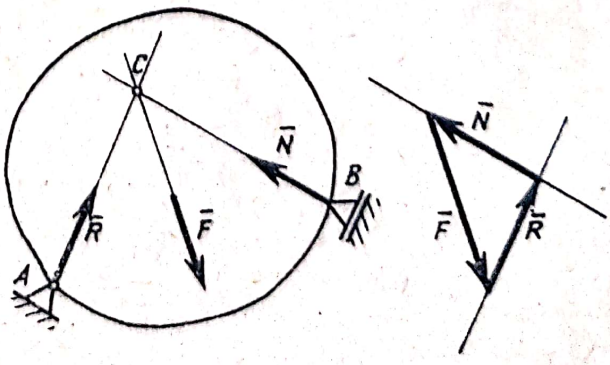


Fig. 12. *j*

12.1. Să se determine rezultanta forțelor $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_5$ din figura 12.1 *a*. Se dă $|\bar{F}_1| = \sqrt{2}\,P$, $|\bar{F}_2| = 2\sqrt{2}\,P$, $|\bar{F}_3| = 3\sqrt{2}\,P$, $|\bar{F}_4| = 4\sqrt{2}\,P$, $|\bar{F}_5| = 5P$ (soluție grafică).

Rezolvare. În epura din figura 12.1 *b* sînt figurate proiecțiile $\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \ldots \bar{F}'_5$ ale forțelor pe planul orizontal $ACBD$ și proiecțiile $\bar{F}''_1, \bar{F}''_2, \ldots \bar{F}''_5$ pe planul vertical $AEBF$.

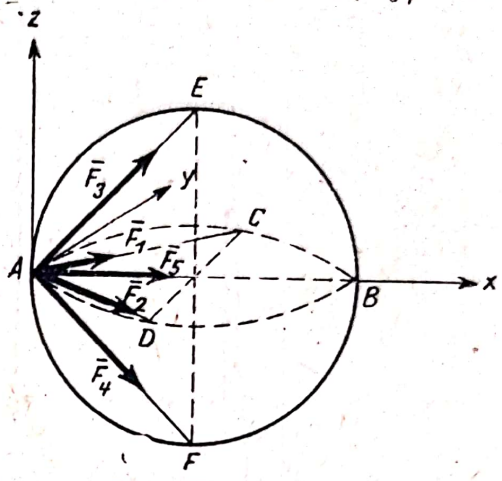


Fig. 12.1 *a*

Avem:

$$|\bar{F}'_1| = |\bar{F}_1| = \sqrt{2}\,P$$

$$|\bar{F}''_1| = |\bar{F}_1| \cos\frac{\pi}{4} = P$$

$$|\bar{F}'_2| = |\bar{F}_2| = 2\sqrt{2}P \qquad |\bar{F}''_2| = |\bar{F}_2| \cos\frac{\pi}{4} = 2P$$

$$|\bar{F}'_3| = |\bar{F}_3| \cos\frac{\pi}{4} = 3P \qquad |\bar{F}''_3| = |\bar{F}_3| = 3\sqrt{2}\,P$$

$$|\bar{F}'_4| = |\bar{F}_4| \cos\frac{\pi}{4} = 4P \qquad |\bar{F}''_4| = |\bar{F}_4| = 4\sqrt{2}\,P$$

$$|\bar{F}'_5| = |\bar{F}''_5| = |\bar{F}_5| = 5P.$$

Conform (12.1) se obțin proiecțiile $\bar{R}'$ și $\bar{R}''$ ale rezultantei (vezi epura). Cu sistemul de axe din figură:

$$\bar{R}' = 15\,P\,\bar{i} - P\,\bar{j}$$

$$\bar{R}'' = 15\,P\,\bar{i} - P\,\bar{k}$$

deci:

$$\bar{R} = 15\,P\,\bar{i} - P\,\bar{j} - P\,\bar{k}$$

iar:

$$|\bar{R}| = \sqrt{15^2 + 1^2 + 1^2}\,P = 15{,}066\,P.$$

12.2. Asupra unui trepied $AC_1C_2C_3$ (fig. 12.2 *a*) acționează forța $\bar{F}$ paralelă cu înălțimea C_3E a triunghiului echilateral $C_1C_2C_3$. Știind că punctele $AC_1C_2C_3$ sînt vîrfurile unui tetraedru regulat de latură a, să se determine eforturile din barele AC_1, AC_2 și AC_3 ce formează trepiedul (soluție grafică).

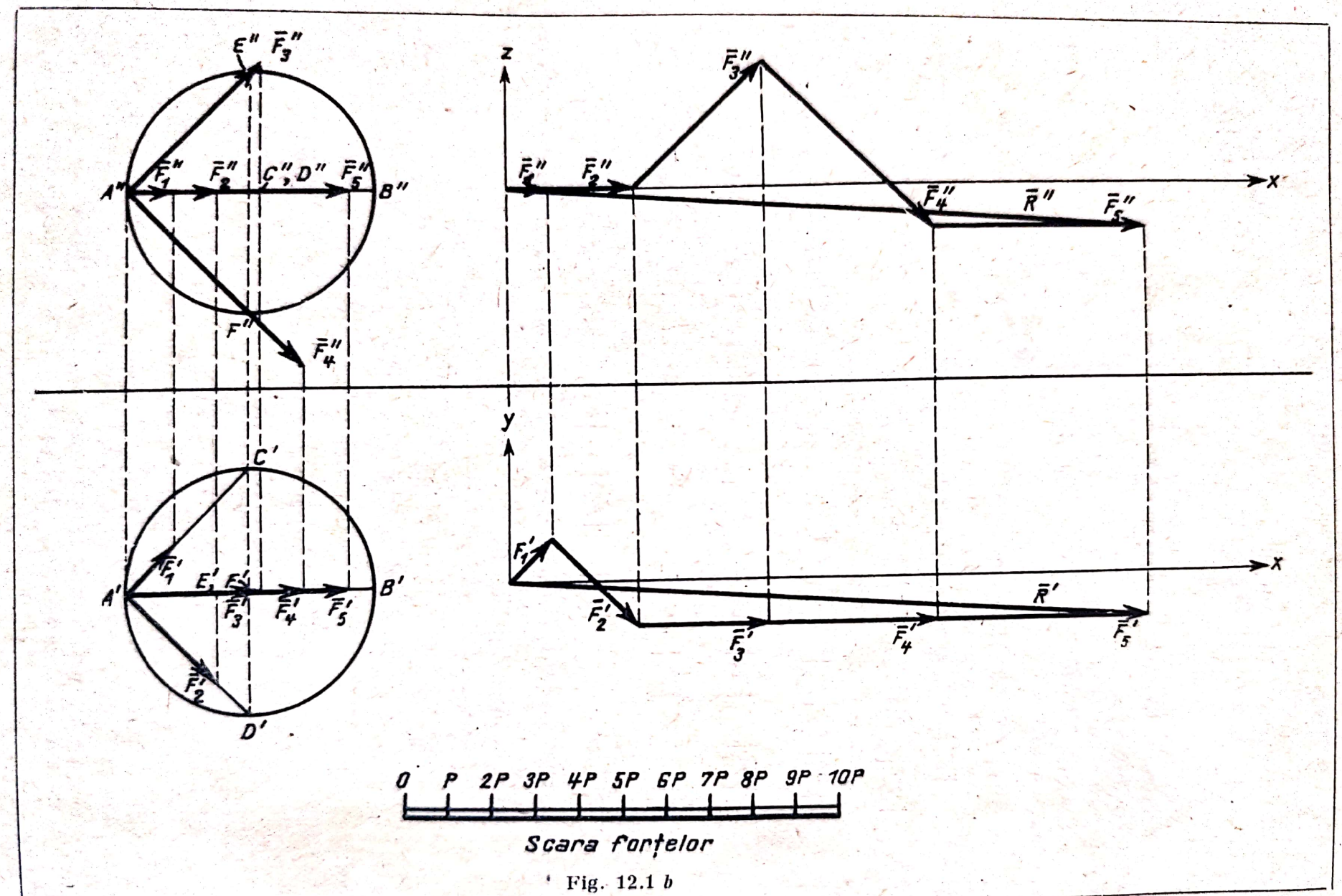

E'' F3''
A'' F1'' F2'' C'', D'' F5'' B''
F''
F4''
C'
A' F1' E' F' F3' F4' F5' B'
F2'
D'
z
F3''
F1'' F2''
F4'' R'' F5''
x
y
F1'
F2'
F3'
F4'
R'
F5'
x
0 P 2P 3P 4P 5P 6P 7P 8P 9P 10P
Scara forțelor

Fig. 12.1 *b*

Rezolvare. Descompunînd forța $\overline{F}$ pe direcțiile barelor AC_1, AC_2 și AC_3 în componentele $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ eforturile din bare vor fi:

$$\overline{S}_1 = -\overline{F}_1, \qquad \overline{S}_2 = -\overline{F}_2, \qquad \overline{S}_3 = -\overline{F}_3.$$

În epura din figura 12.2 *b* s-a efectuat descompunerea forței $\overline{F}$, mai întîi în componentele $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_{23}$ pe direcțiile AC_1 și AB, apoi componenta $\overline{F}_{23}$ în componentele $\overline{F}_2$ și $\overline{F}_3$. AB este dreapta de intersecție a planelor definite de $\overline{F}$ și CA_1 și de CA_2 și CA_3 (v. Definiții și formule, figura 12. *b*).

Proiecțiile lui $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ și $\overline{F}_3$ pe planul orizontal $C_1C_2C_3$ sînt:

$$F'_1 = F'_2 = \frac{F}{3} \qquad F'_3 = \frac{2F}{3}$$

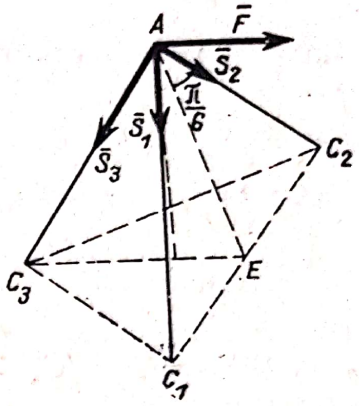


Fig. 12.2 *a*

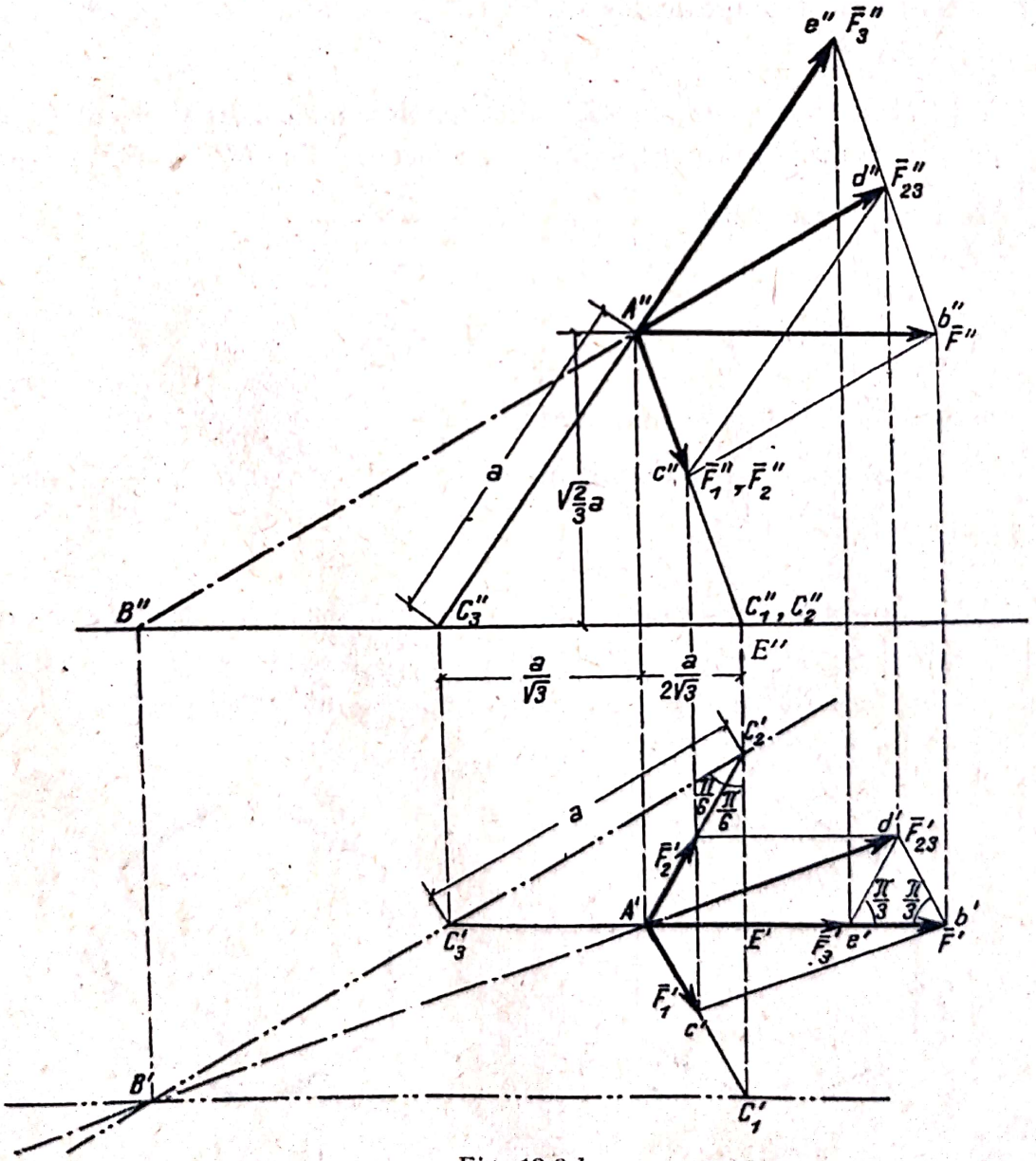


Fig. 12.2 *b*

iar pe planul vertical C_3AE sînt:

$$F_1'' = F_2'' = \frac{F}{2} \qquad F_3'' = \frac{2F}{\sqrt{3}}.$$

Într-adevăr triunghiurile $A'B'C_1'$ și $A'c'b'$ fiind asemenea $\frac{B_1'C_1'}{F'} = \frac{A'C_1'}{F_1'}$ și cum $F' = F$, $B'C_1' = a \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = a\sqrt{3}$, $A'C_1' = \frac{a}{\sqrt{3}}$ rezultă $F_1' = \frac{F}{3}$. Triunghiul $b'd'e'$ fiind echilateral $F_2' = F_1' = \frac{F}{3}$ iar $F_3' = F - \frac{F}{3} = \frac{2F}{3}$.

Triunghiurile $A''B''C_1''$ și $A''b''c''$ fiind asemenea $\frac{B''C_1''}{F''} = \frac{A''C_1''}{F_1''}$ și cum $F'' = F$, $B''C_1'' = B'C_1' = a\sqrt{3}$, $A''C_1'' = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ rezultă $F_1'' = \frac{F}{2}$. Din asemănarea triunghiurilor $A''C_3''C_1''$ și $A''b''e''$ rezultă $F_3'' = \frac{2F}{\sqrt{3}}$ iar $F_2'' = F_1''$.

Forța $\bar{F}_3$ se proiectează în adevărata mărime pe planul vertical $F_3 = F_3''$ iar unghiul dintre forțele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ și proiecțiile lor F_1'' și F_2'' pe planul vertical fiind $\frac{\pi}{6}$ rezultă $F_1 = \frac{F_1''}{\cos\frac{\pi}{6}}$, $F_2 = \frac{F_2''}{\cos\frac{\pi}{6}}$ deci:

$$F_1 = F_2 = \frac{F}{\sqrt{3}} \qquad F_3 = \frac{2F}{\sqrt{3}}$$

iar eforturile din cele trei bare sînt:

$$S_1 = S_2 = -\frac{F}{\sqrt{3}} \text{ (compresiune)} \qquad S_3 = \frac{2F}{\sqrt{3}} \text{ (tensiune)}$$

(v. fig. 12.2 *b*).

12.3. Asupra unui exagon regulat de apotemă a acționează forțele: $|\bar{F}_1| = P$, $|\bar{F}_2| = 2P$, $|\bar{F}_3| = 3P$, $|\bar{F}_4| = 4P$, $|\bar{F}_5| = 5P$ și $|\bar{F}_6| = 6P$ orientate ca în figurile 12.3 *a* și 12.3 *b*. Cu ce sînt echivalente cele două sisteme de forțe (soluție grafică)?

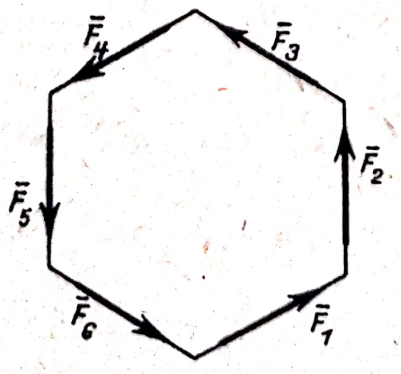


Fig. 12.3 *a*

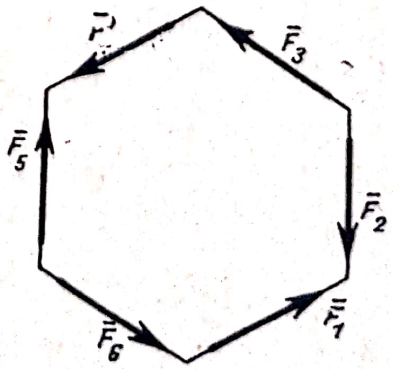


Fig. 12.3 *b*

Scanned with OKEN Scanner

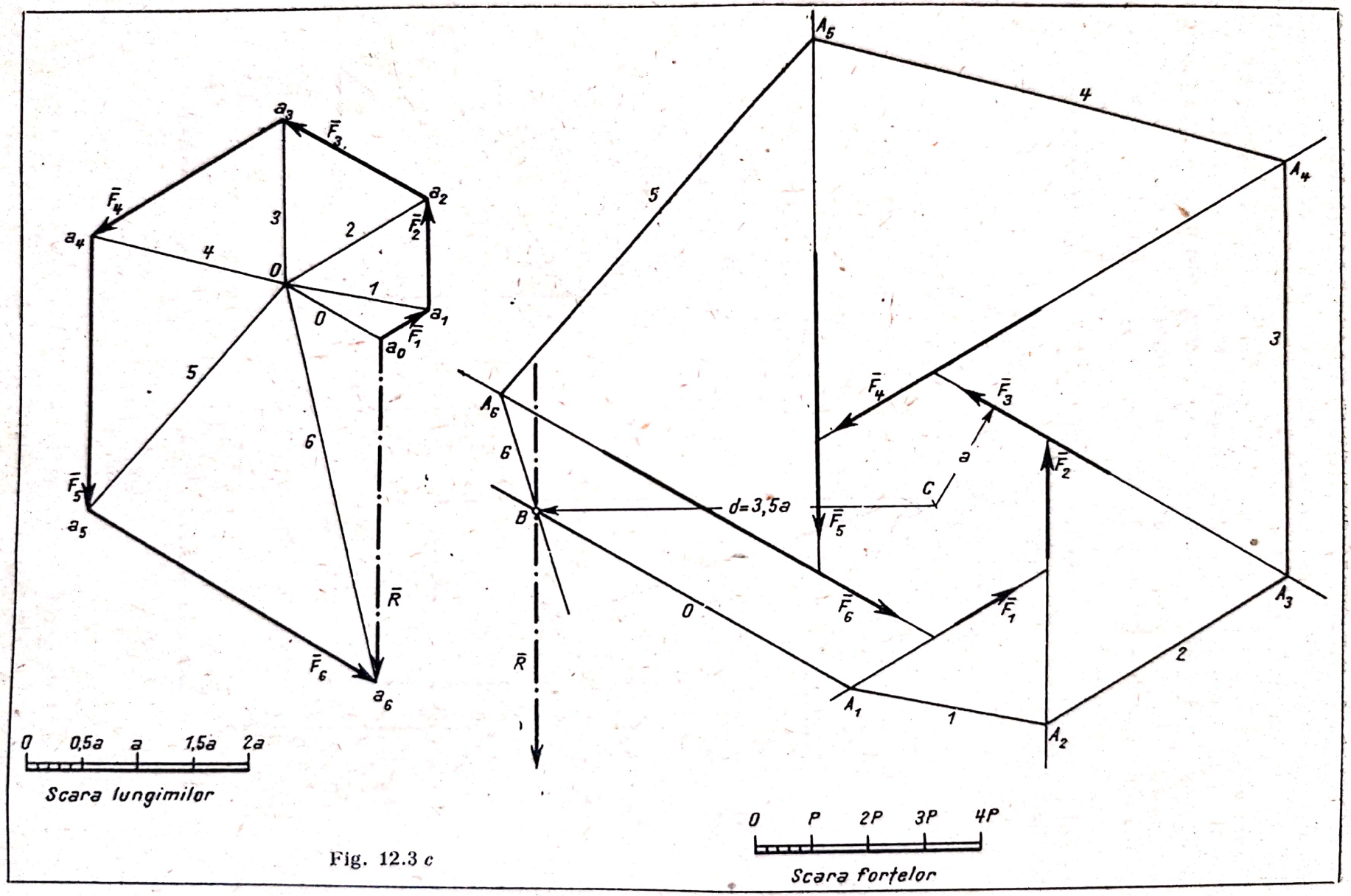

a_3
$\bar{F}_3$
a_2
$\bar{F}_4$
$\bar{F}_2$
a_4
3
2
4
0
1
0
a_1
a_0
$\bar{F}_1$
5
6
$\bar{F}_5$
a_5
$\bar{R}$
$\bar{F}_6$
a_6
0 0,5a a 1,5a 2a
Scara lungimilor
A_5
4
A_4
5
3
$\bar{F}_4$
$\bar{F}_3$
A_6
6
a
$\bar{F}_2$
C
d=3,5a
B
$\bar{F}_5$
$\bar{F}_6$
$\bar{F}_1$
A_3
0
$\bar{R}$
2
A_1
1
A_2
0 P 2P 3P 4P
Scara forțelor

Fig. 12.3 *c*

Rezolvare. În figura 12.3 *c* sînt construite poligonul forţelor şi poligonul funicular pentru cazul din figura 12.3 *a*. Sistemul este echivalent cu o forţă unică, $|\overline{R}| = 6P$, paralelă cu forţele $\overline{F}_2$ şi $\overline{F}_5$ avînd sensul forţei $\overline{F}_5$. Suportul rezultantei $\overline{R}$ se găseşte la distanţa $d = 3{,}5\ a$ de centrul C al exagonului.

În fig. 12.3 *d* sînt construite poligonul forţelor şi poligonul funicular pentru cazul din figura 12.3 *b*. Sistemul este echivalent cu un cuplu deoarece poligonul forţelor se închide $\overline{R} = 0$ iar laturile extreme *0* şi *6* din poligonul funicular sînt paralele şi distincte. Distanţa dintre ele măsurată la scara lungimilor este $d = 3{,}5\ a$, iar vectorul $|\overline{a_0O}|$ măsurat la scara forţelor, în poligonul forţelor, are modulul $|\overline{a_0O}| = 2P$ deci conform formulei (12.4) momentul cuplului este în modul:

$$|\overline{M}| = 3{,}5\ a \times 2P = 7Pa$$

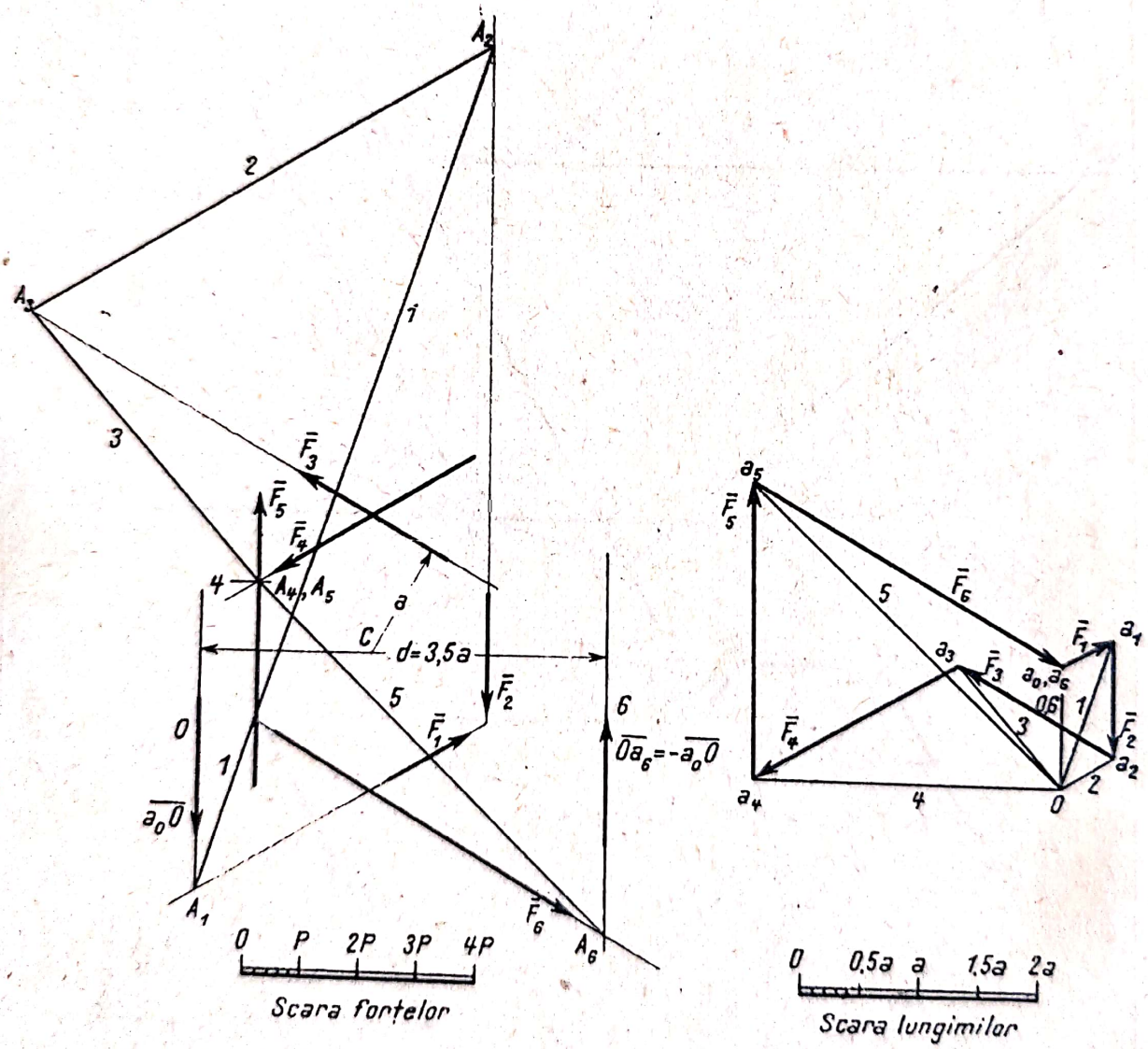


Fig. 12.3 *d*

şi are tendinţa de-a roti exagonul în sens trigonometric (v. fig. 12.3 *d*, cuplul format din vectorii $\overline{a_0O}$ şi $\overline{Oa_6}$).

12.4. Se dă un sistem de forțe $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$. Să se construiască un poligon funicular astfel încît laturile lui extreme să treacă prin două puncte M și N date.

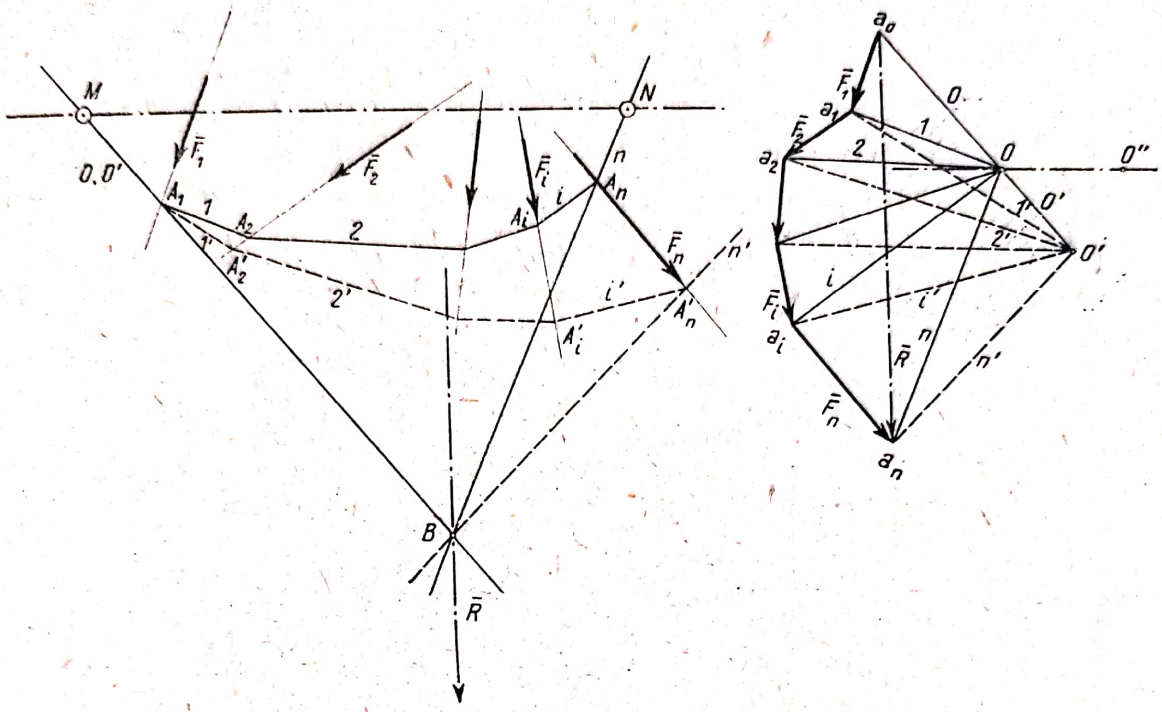


Fig. 12.4

Rezolvare. Alegînd un pol oarecare O' în poligonul forțelor construim poligonul funicular $0', 1', \ldots, n'$ a cărui primă latură $0'$ trece prin punctul M (în fig. 12.4 acest poligon este desenat cu linie întreruptă). La intersecția laturilor extreme $0'$ și n' se găsește punctul B situat pe suportul rezultantei $\overline{R}$. Unind punctul B cu N în poligonul funicular și ducînd paralela a_nO din poligonul forțelor determinăm un nou pol O. Poligonul funicular construit cu polul în O (desenat cu linie continuă) se bucură de proprietatea cerută în enunțul problemei deoarece prima latură 0 coincide cu latura $0'$ ce trece prin punctul M și întîlnește în B suportul rezultantei, iar ultima latură n intersectîndu-se în B (pe suportul rezultantei) cu prima latură și fiind paralelă cu BN trece prin punctul N.

În baza proprietății (12.5) considerînd dreapta MN drept axă polară, pentru orice pol O'' situat pe o paralelă dusă prin O la MN putem construi un poligon funicular cu laturile extreme trecînd prin M și N.

Dacă suportul rezultantei $\overline{R}$ era cunoscut alegînd un punct *oarecare* B pe suportul rezultantei și unindu-l cu punctele M și N găseam laturile extreme ale unui poligon funicular trecînd prin M și N. Ducînd în poligonul forțelor paralelele a_0O și a_nO la BM și BN determinam polul O al poligonului funicular căutat.

12.5. Să se determine pe cale grafică pozițiile centrelor de greutate ale secțiunilor plane din fig. 12.5 *a* și 12.5 *b*.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Secțiunea din figura 12.5 *a* avînd ca axă de simetrie axa Ox (fig. 12.5 *c*), centrul de greutate se găsește pe această axă deci este suficient să construim poligonul funicular pentru vectorii arie orientați

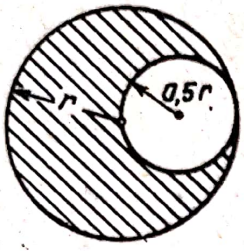


Fig. 12.5 *a*

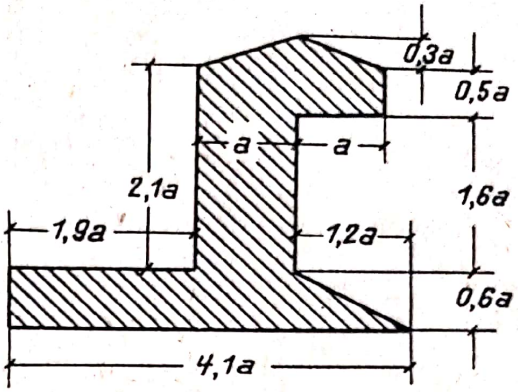


Fig. 12.5 *b*

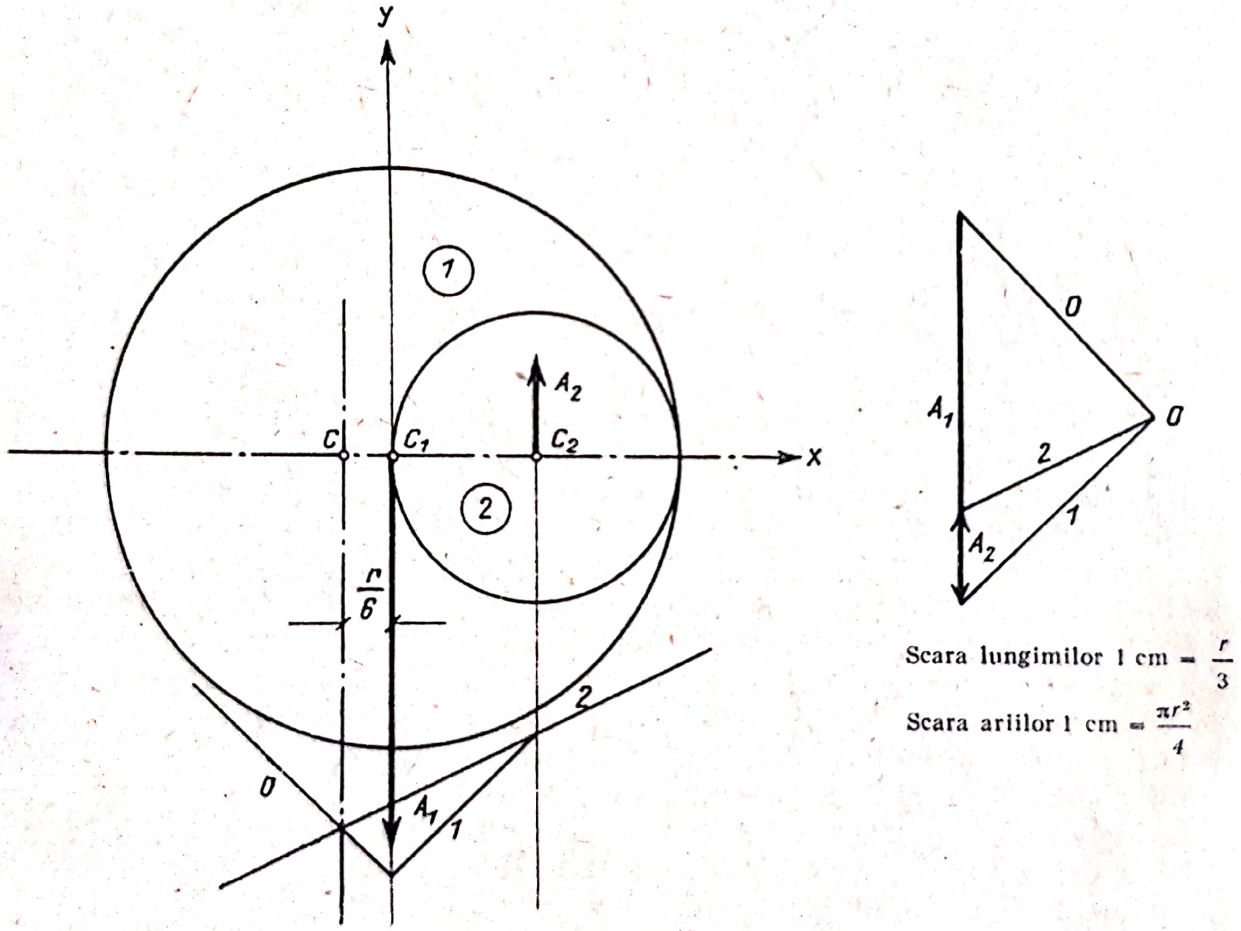


Fig. 12.5 *c*

în direcția axei Oy (greutatea unui element de suprafață G_i fiind proporțională cu aria A_i). Figura este formată din cercul *1* avînd aria $A_1 = \pi r^2$ și coordonatele centrului de greutate $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$ din care lipsește cercul *2* de arie $A_2 = \frac{\pi r^2}{4}$ (vectorul A_2 are sens opus vectorului A_1) iar $\xi_2 = \frac{r}{2}$, $\eta_2 = 0$.

Din figura 12.5 *c* găsim coordonatele centrului *C* de greutate:

$$\xi = -\frac{r}{6}, \quad \eta = 0.$$

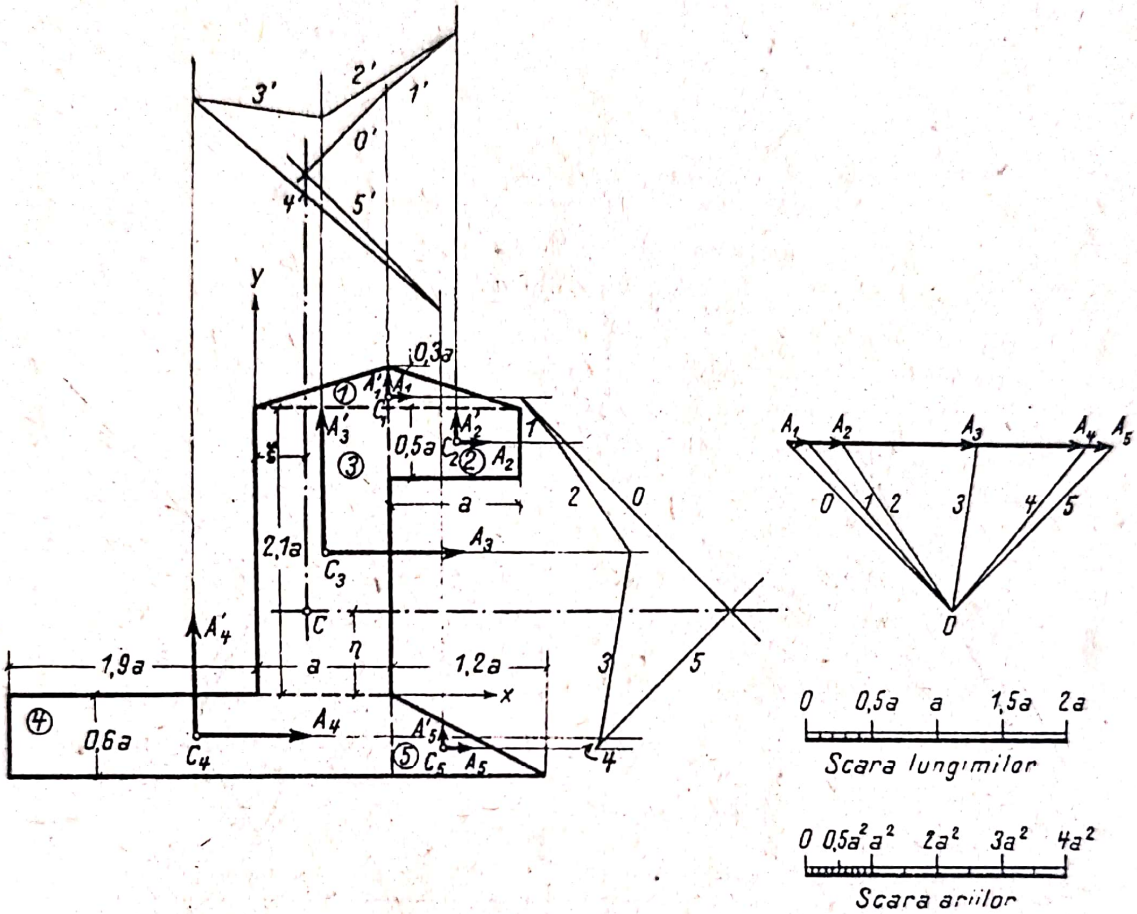


Fig. 12.5 *d*

În cazul al doilea (fig. 12.5 *d*) descompunem figura în:

triunghiul *1* avînd	$A_1 = 0{,}3\ a^2$	$\xi_1 = a$	$\eta_1 = 2{,}2\ a$
dreptunghiul *2* avînd	$A_2 = 0{,}5\ a^2$	$\xi_2 = 1{,}5\ a$	$\eta_2 = 1{,}85\ a$
dreptunghiul *3* avînd	$A_3 = 2{,}1\ a^2$	$\xi_3 = 0{,}5\ a$	$\eta_3 = 1{,}05\ a$
dreptunghiul *4* avînd	$A_4 = 1{,}74\ a^2$	$\xi_4 = -0{,}45a$	$\eta_4 = -0{,}3\ a$
triunghiul *5* avînd	$A_5 = 0{,}36\ a^2$	$\xi_5 = 1{,}4\ a$	$\eta_5 = -0{,}4\ a.$

Construind două poligoane funiculare pentru sistemul de vectori A_i și A'_i paraleli cu axele *Ox* și *Oy* centrul de greutate *C* se găsește la intersecția suporturilor rezultatelor respective. Din figura 12.5 *d* găsim coordonatele punctului *C*:

$$\xi = 0{,}37\ a, \qquad \eta = 0{,}61\ a.$$

Efectuînd calculul analitic se obținea $\xi = 0{,}3642\ a$, $\eta = 0{,}6248\ a$ deci eroarea (raportată la dimensiunile secțiunii) este de 0,2 ... 0,5%.

12.6. Să se determine pe cale grafică poziția centrului de greutate al suprafeței din figura 12.6 *a*.

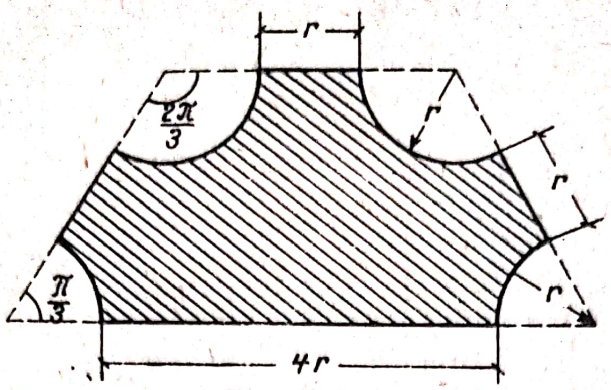
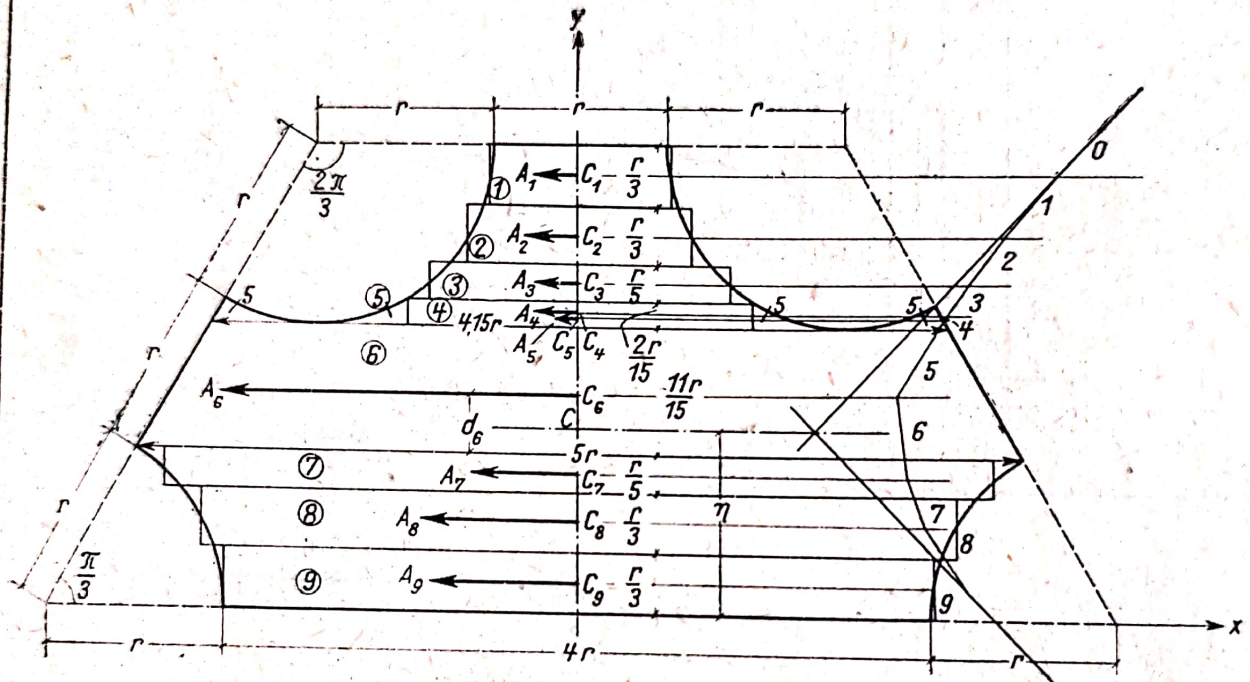
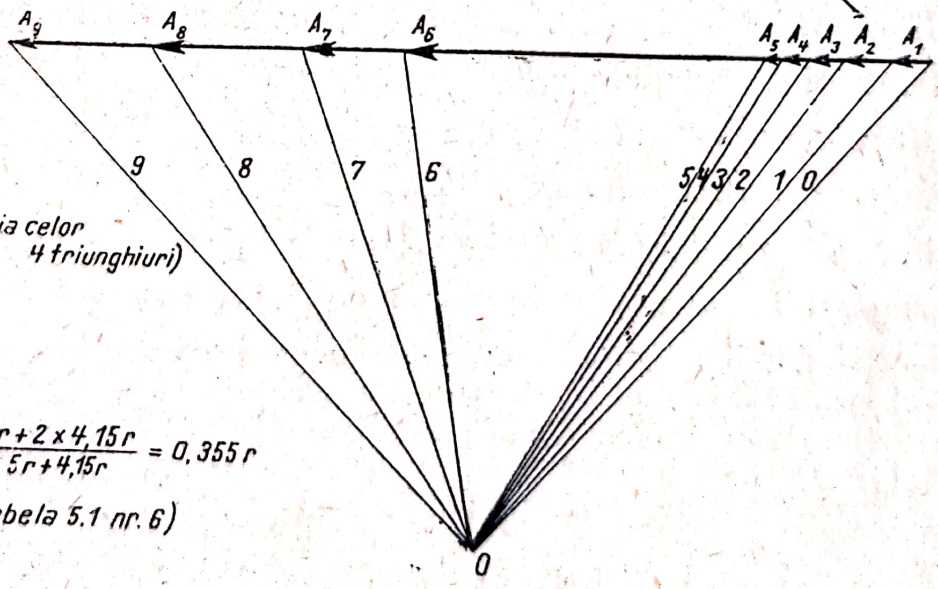


Fig. 12.6 *a*

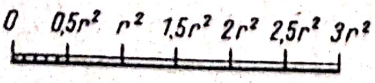




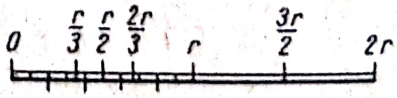
$A_1 = 0{,}34\ r^2$
$A_2 = 0{,}42\ r^2$
$A_3 = 0{,}34\ r^2$
$A_4 = 0{,}27\ r^2$
$A_5 = 0{,}14\ r^2$ (aria celor 4 triunghiuri)
$A_6 = 3{,}35\ r^2$
$A_7 = 0{,}94\ r^2$
$A_8 = 1{,}42\ r^2$
$A_9 = 1{,}34\ r^2$

$$d_6 = \frac{1}{3} \times \frac{11r}{15} \times \frac{5r + 2 \times 4{,}15r}{5r + 4{,}15r} = 0{,}355\ r$$

(vezi tabela 5.1 nr. 6)



Scara ariilor



Scara lungimilor

Fig. 12.6 *b*

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Centrul de greutate C se va găsi pe axa Oy care este axa de simetrie a figurii. Împărțim figura prin paralele duse la axa Ox în elemente de suprafață. Elementele $1, 2, 3, 7, 8$ și 9 le asimilăm cu dreptunghiuri, elementele 5 le asimilăm cu triunghiuri, elementul 4 este un dreptunghi, iar elementul 6 este un trapez. Construind poligonul funicular din figura 12.6 b determinăm ordonata centrului de greutate:

$$\eta = 1{,}025\, r.$$

Efectuînd un calcul analitic s-a obținut $\eta = 1{,}0205\, r$ deci aproximația de calcul este $\approx 0{,}44\%$.

12.7. Să se determine poziția de echilibru și reacțiunile $\overline{N}_A$ și $\overline{N}_B$ pentru bara omogenă din figura 12.7. Se dă $2l$ (lungimea barei), P (greutatea ei), a (distanța între cei doi pereți lucii pe care se reazemă bara). Soluție grafică.

Rezolvare. Asupra barei acționează trei forțe $\overline{P}$, $\overline{N}_A$ și $\overline{N}_B$ deci conform (12.7):

$$\overline{P} + \overline{N}_A + \overline{N}_B = 0$$

adică poligonul forțelor se închide iar suporturile forțelor sînt concurente în punctul D. Din figură avem:

$$BD = l\cos\alpha \qquad AB = \frac{a}{\cos\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{AB}{BD} = \frac{a}{l\cos^2\alpha}$$

de unde în poziția de echilibru:

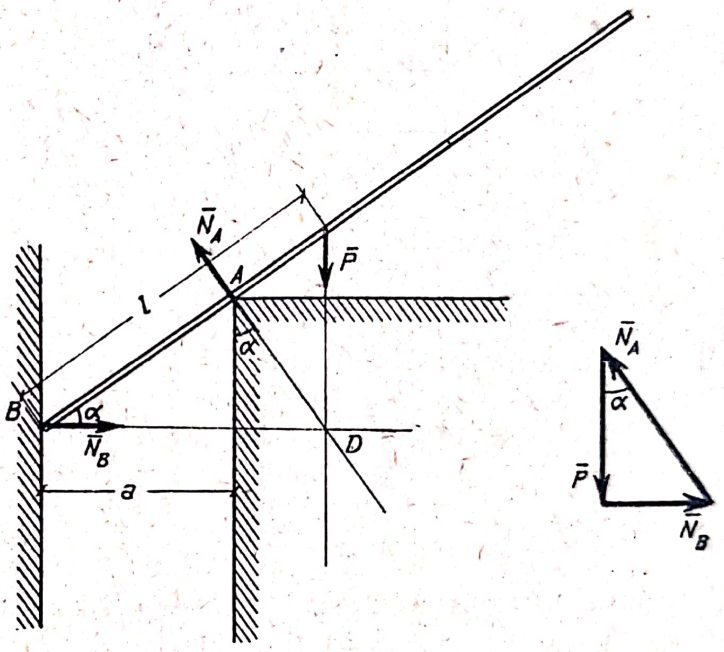


Fig. 12.7

$$\cos\alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}.$$

Din poligonul forțelor determinăm reacțiunile:

$$N_A = \frac{P}{\cos\alpha} \qquad N_B = P\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Obținem aceleași rezultate ca cele obținute prin metoda analitică în problema 6.3.

12.8. Să se determine poziția de echilibru și reacțiunea $\overline{R}$ din articulația A, a barei omogene din figura 12.8 a. Se dă $2a$ lungimea barei, P greutatea ei, greutatea Q și $AC = AB$ (soluție grafică).

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Asupra barei acționează trei forțe $\bar{P}$, $\bar{Q}$ și $\bar{R}$ deci conform (12.7):

$$\bar{P} + \bar{Q} + \bar{R} = 0$$

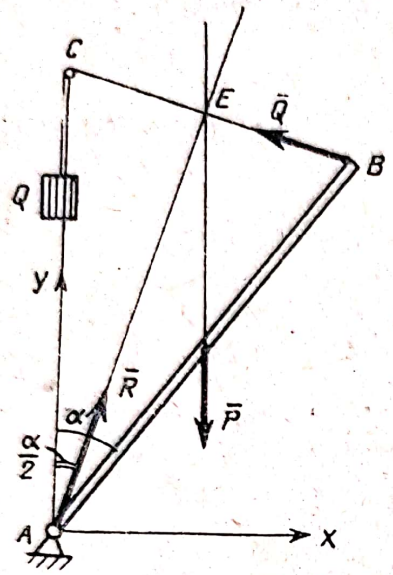


Fig. 12.8 *a*

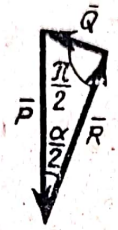


Fig. 12.8 *b*

adică poligonul forțelor se închide iar suporturile forțelor sînt concurente în punctul E, punctul de intersecție al suporturilor forțelor $\bar{P}$ și $\bar{Q}$ (fig. 12.8 *a*). Cum $AB = BD$ și $AD \parallel DE$ rezultă $BE = EC$. Triunghiul ABC fiind isoscel mediana BE este și înălțime și bisectoare adică:

$$\widehat{EAC} = \widehat{EAB} = \frac{\alpha}{2} .$$

Din poligonul forțelor găsim poziția de echilibru dată de:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{Q}{P} .$$

Reacțiunea este:

$$R = \sqrt{P^2 - Q^2}$$

și formează unghiul $\frac{\alpha}{2}$ cu verticala avînd proiecțiile:

$$R_x = \sqrt{P - Q^2}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{Q}{P}\sqrt{P^2 - Q^2} \qquad R_y = \sqrt{P^2 - Q^2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{P^2 - Q^2}{P} .$$

Aceste soluții le-am obținut și analitic în problema 6.17. Mai există o poziție de echilibru cînd bara este verticală $\alpha = \pi$ iar forțele $\bar{P}$, $\bar{Q}$ fiind coliniare (fig. 12.8 *b*):

$$R = Q - P.$$

12.9. Să se determine pe cale grafică reacţiunile din articulaţia O şi din reazemul simplu A pentru bara omogenă din fig. 12.9. Se dă $2l$ lungimea barei, P greutatea ei, r raza cilindrului şi distanţa $d = OB$.

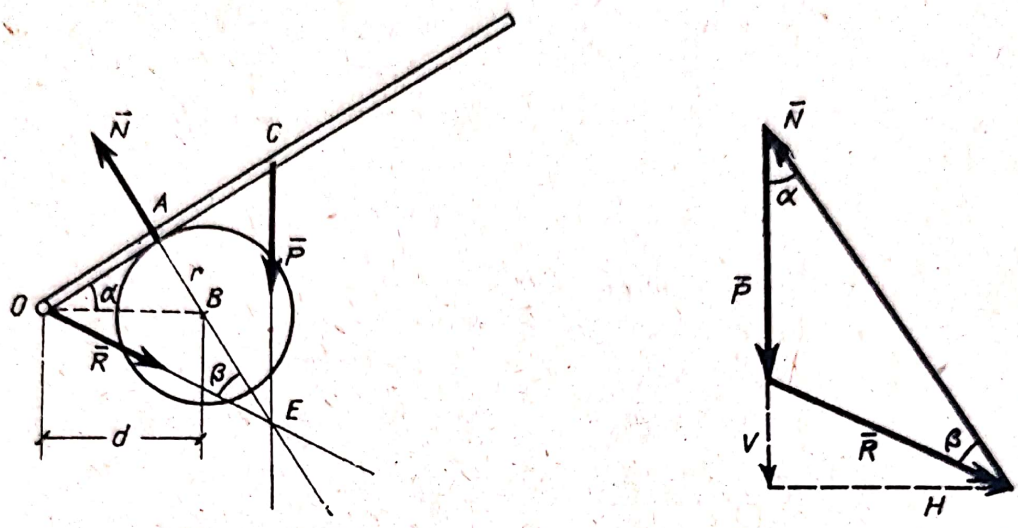


Fig. 12.9

Rezolvare. Asupra barei acţionează forţa efectiv aplicată $\bar{P}$, reacţiunea $\bar{N}$ din reazemul A şi reacţiunea $\bar{R}$ din articulaţia O, deci conform (12.10):

$$\bar{P} + \bar{R} + \bar{N} = 0$$

adică poligonul forţelor se închide iar suporturile forţelor sînt concurente în punctul E. Din figură avem:

$$OA = \sqrt{d^2 - r^2} \qquad AC = l - \sqrt{d^2 - r^2}$$

$$\sin\alpha = \frac{r}{d} \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{d^2 - r^2}}{d}$$

$$AE = AC \operatorname{ctg}\alpha = \frac{l\sqrt{d^2 - r^2} - d^2 + r^2}{r}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{OA}{AE} = \frac{r\sqrt{d^2 - r^2}}{l\sqrt{d^2 - r^2} - d^2 + r^2}.$$

Din poligonul forţelor aplicînd teorema sinusurilor avem:

$$\frac{N}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{P}{\sin\beta}$$

de unde după un şir de calcule elementare rezultă:

$$N = \frac{Pl}{d}$$

iar componentele reacțiunii $\overline{R}$ sînt:

$$H = N \sin \alpha = \frac{Pl\,r}{d^2} \qquad V = N \cos \alpha - P = P\,\frac{l\sqrt{d^2 - r^2} - d^2}{d^2}.$$

La aceleași rezultate s-a ajuns pe cale analitică în problema 6.19 cazul 3 (s-a notat $H = R_x$ și $V = -R_y$).

12.10. Să se determine reacțiunile grinzii simplu rezemate C_1C_2 din fig. 12.10 (soluție grafică).

Rezolvare. Folosind construcția din figura 12. *i* (Definiții și formule), paralela *Ob* dusă în poligonul forțelor la dreapta de închidere B_1B_2 care unește punctele de intersecție B_1 și B_2 ale laturilor extreme *0* și *5* ale poligonului funicular cu suporturile reacțiunilor $\overline{N}_1$ și $\overline{N}_2$ definește reacțiunile (12.9):

$$\overline{N}_1 = \overline{ba_0} \qquad \overline{N}_2 = \overline{a_5 b}.$$

Măsurîndu-le la scara forțelor:

$$N_1 = 6\text{tf} \qquad N_2 = 9\text{tf}.$$

Să găsim interpretarea geometrică a segmentului interceptat pe o paralelă Δ la suporturile forțelor, de poligonul funicular și de dreapta de închidere.

Ținînd seama de asemănarea următoarelor triunghiuri din poligonul funicular și poligonul forțelor: $B_1c_0c_6$ cu Oa_0b, $A_1c_0c_1$, cu Oa_0a_1, $A_2c_1c_2$ cu Oa_1a_2 și $A_3c_2c_3$ cu Oa_2a_3 avem:

$$\frac{c_0c_6}{x} = \frac{N_1}{H}, \quad \frac{c_0c_1}{x - d_0} = \frac{P_1}{H}, \quad \frac{c_1c_2}{x - (d_0 + d_1)} = \frac{P_2}{H}, \quad \frac{c_2c_3}{x - (d_0 + d_1 + d_2)} = \frac{P_3}{H}$$

deci:

$$H \cdot c_3c_6 = N_1x - P_1\,(x - d_0) - P_2\,[x - (d_0 + d_1)] - P_3\,[x - (d_0 + d_1)] = M_x$$

unde M_x este momentul forțelor din stînga secțiunii Δ în raport cu secțiunea respectivă (momentul încovoietor).

Deci:

$$M_x = H\,d$$

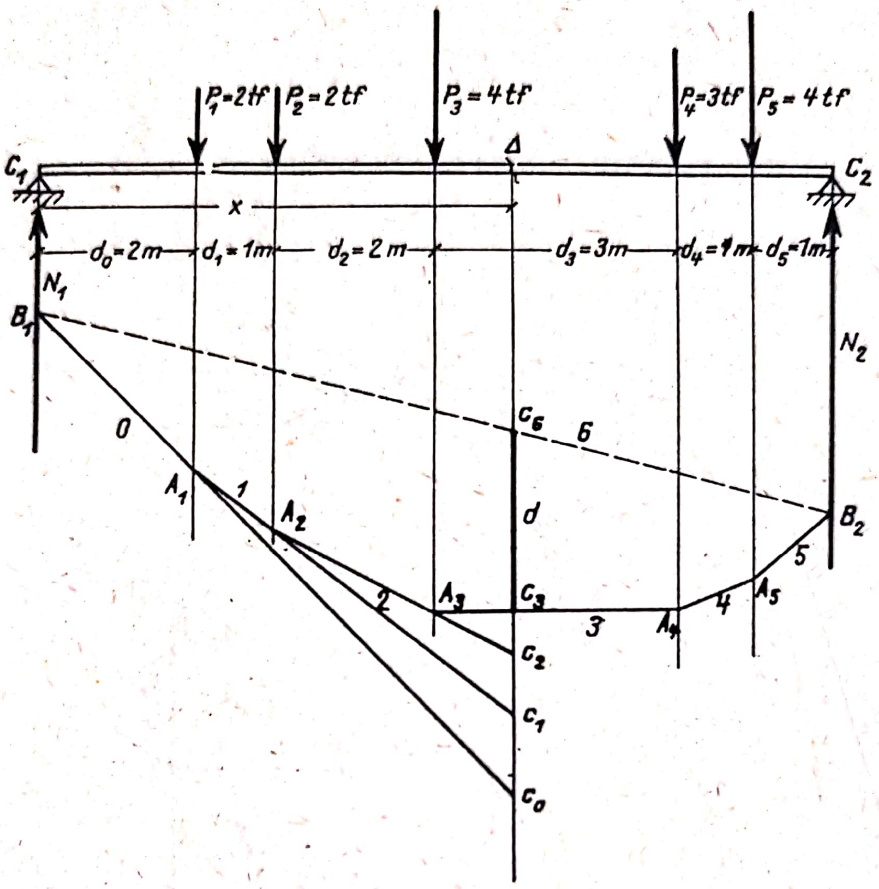
unde d este lungimea segmentului interceptat de poligonul funicular și dreapta de închidere măsurată la scara lungimilor iar H este distanța polară (de la polul O la forțele poligonului forțelor) măsurată la scara forțelor.

12.11. Să se determine pe cale grafică reacțiunile din reazemul B și din articulația A a grinzii cu zăbrele din figura 12.11 *a*.

Rezolvare. Cu ajutorul poligonului forțelor și a poligonului funicular din figura 12.11 *b* determinăm rezultanta $\overline{F}$ a forțelor efectiv aplicate grinzii și suportul ei.

Putem considera că asupra grinzii acționează forța efectiv aplicată $\overline{F}$ și reacțiunile $\overline{R}_A$ și $\overline{N}_B$. Conform (12.10) pentru echilibru trebuie ca poli-

Scanned with OKEN Scanner


P1=2tf
P2=2tf
P3=4tf
P4=3tf
P5=4tf
C1
C2
Δ
x
d0=2m
d1=1m
d2=2m
d3=3m
d4=1m
d5=1m
N1
N2
B1
B2
A1
A2
A3
A4
A5
C6
C3
C2
C1
C0
d
0
1
2
3
4
5
6

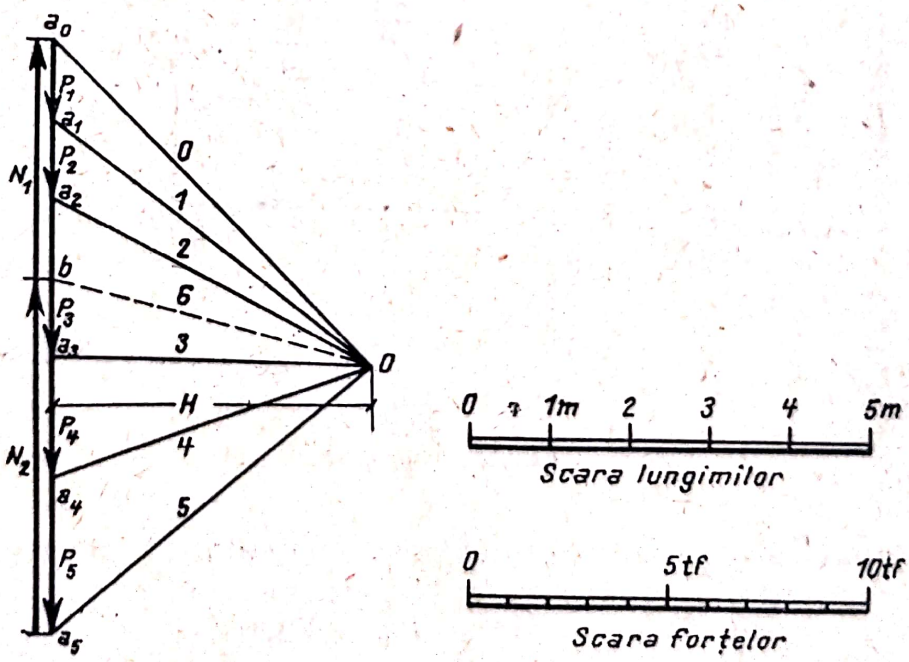

a0
a1
a2
a3
a4
a5
P1
P2
P3
P4
P5
N1
N2
b
H
O
0
1
2
3
4
5
6
0 1m 2 3 4 5m
Scara lungimilor
0 5tf 10tf
Scara forțelor

Fig. 12.10

gonul forţelor să se închidă şi ca suportul reacţiunii $\bar{R}_A$ să treacă prin punctul C de intersecţie a suporturilor forţelor $\bar{F}$ şi $\bar{N}_B$. Ducînd paralela în poligonul forţelor prin extremităţile vectorului $\bar{F}$ la direcţiile forţelor $\bar{R}_A$

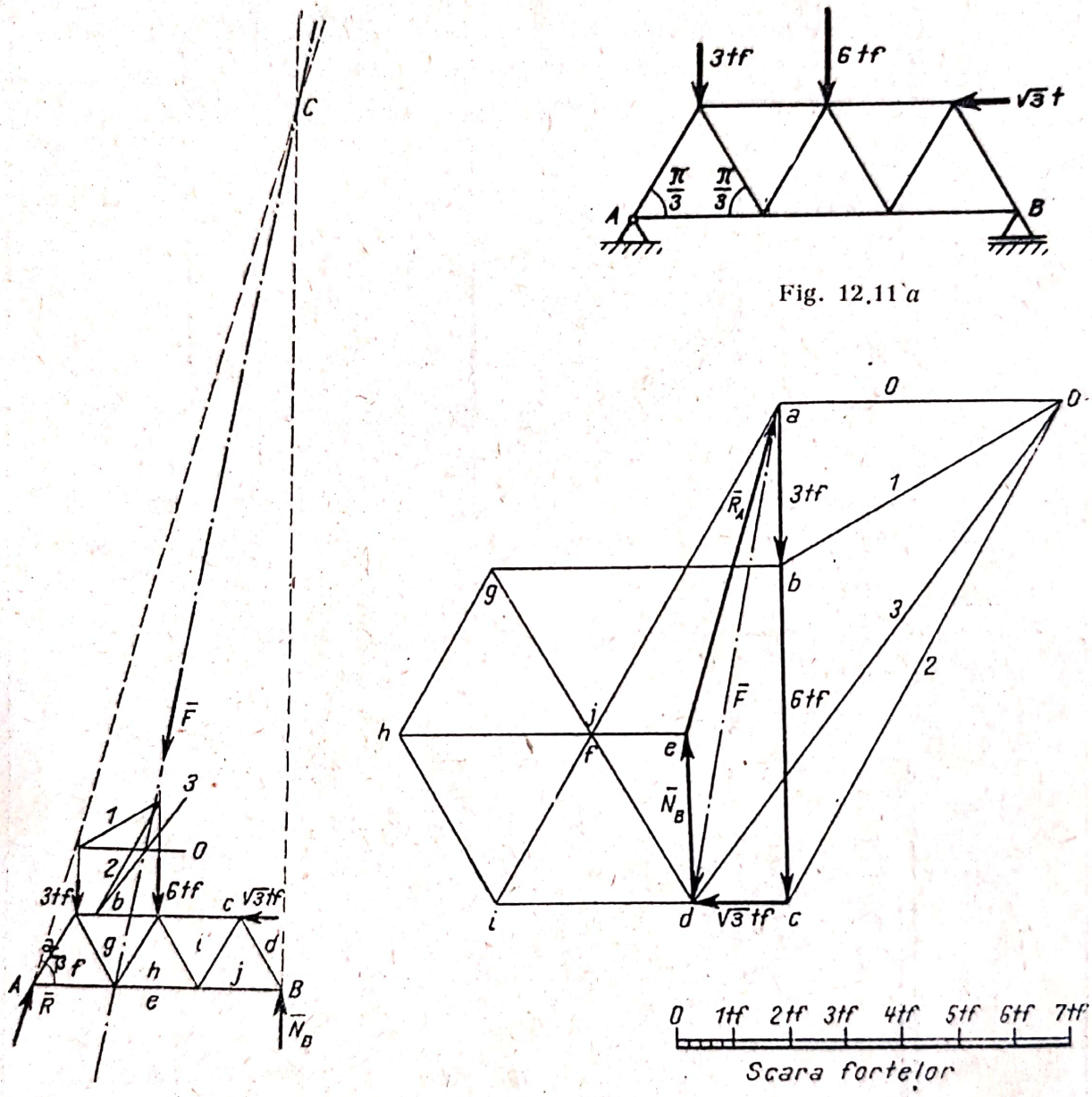


Fig. 12.11 *b*

şi $\bar{N}_B$ determinăm reacţiunile căutate care măsurate la scara forţelor sînt:

$$N_B = 3 \text{ tf} \qquad R_A = 6{,}2 \text{ tf}$$

iar unghiul format de R_A cu orizontala este:

$$\beta = 74°.$$

Scanned with OKEN Scanner

În figura de mai sus s-a suprapus peste poligonul forțelor și epura Cremona cu ajutorul căruia s-au determinat eforturile din bare și anume:

$ef = +1{,}75$ tf $eh = +5{,}2$ tf $ej = +1{,}75$ tf

$af = -6{,}9$ tf $bg = ci = -5{,}2$ tf $dj = -3{,}45$ tf

$fg = +3{,}45$ tf $gh = -3{,}45$ tf $hi = -3{,}45$ tf $ij = +3{,}45$ tf.

12.12. Să se determine pe cale grafică reacțiunile din reazemele A_1 A_2 și A_3 ale barei omogene din figura 12.12 *a*. Se cunoaște $2a$ lungimea barei, b distanța dintre reazemele A_1 și A_2, P greutatea barei și α unghiul de înclinare al barei.

Rezolvare. P fiind rezultanta forțelor efectiv aplicate, descompunem forța P pe direcțiile suporturilor celor trei reacțiuni obținînd componentele $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ și $\bar{F}_3$:

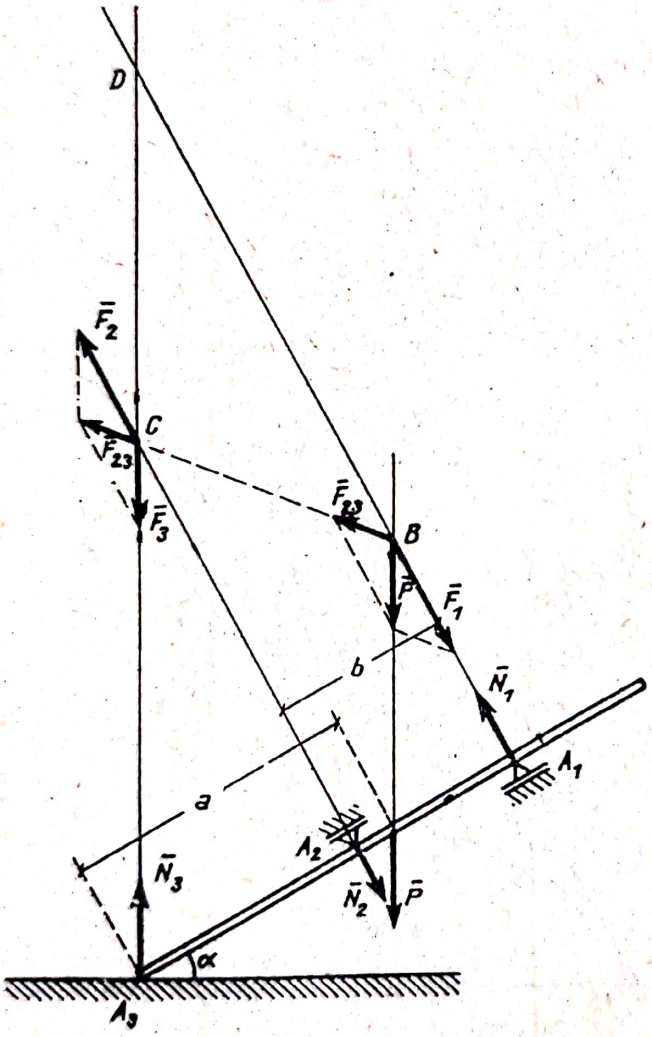


Fig. 12.12 *a*

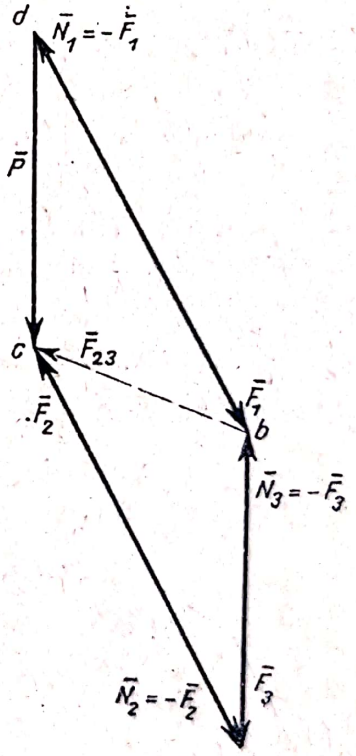


Fig. 12.12 *b*

$$\bar{P} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$$

reacțiunile căutate fiind conform (12.8):

$$\bar{N}_i = -\bar{F}_i \qquad (i = 1,2,3).$$

Pentru aceasta descompunem forța P pe direcția BA_1 și BC în componentele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_{23}$ iar componenta $\bar{F}_{23}$ în componentele $\bar{F}_2$ și $\bar{F}_3$ pe direcțiile CA_2 și CA_3 (v. fig. 12.12 *a* și 12.12 *b*).

Scanned with OKEN Scanner

Punctul B este punctul de intersecție al suporturilor lui $\bar{P}$ și $\bar{N}_1$ iar punctul C este punctul de intersecție al suporturilor lui $\bar{N}_2$ și $\bar{N}_3$.

Din fig. 12.12 *b* avem:

$$N_3 = P \qquad N_1 = N_2$$

iar din asemănarea triunghiurilor BCD (fig. 12.12 *a*) și bcd (fig. 12.12 *b*) avem:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{P}{N_1}. \tag{1}$$

Însă aria triunghiului BCD este:

$$A = \frac{1}{2} CD\, a \cos\alpha = \frac{1}{2} BD \cdot b \tag{2}$$

și din (1) și (2) rezultă:

$$N_1 = P \frac{a \cos\alpha}{b}.$$

S-au obținut aceleași rezultate ca în problema 6.5.

12.13. Asupra unei plăci (fig. 12.13*a*) având forma unui triunghi echilateral de latură a acționează un cuplu de moment $M = \frac{1}{2} Pa$. Să se determine pe cale grafică reacțiunile din reazemele simple A_1, A_2 și A_3.

Rezolvare. Vom considera un cuplu oarecare de forțe de moment $M = \frac{1}{2} Pa$ (fig. 12.13 *b*) și vom descompune ambele forțe $\bar{F}'$

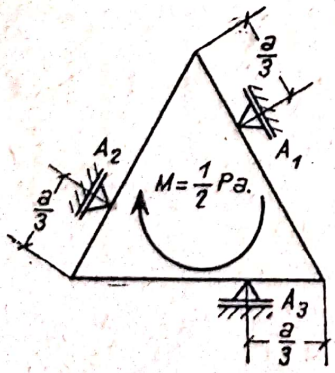


Fig. 12.13 *a*

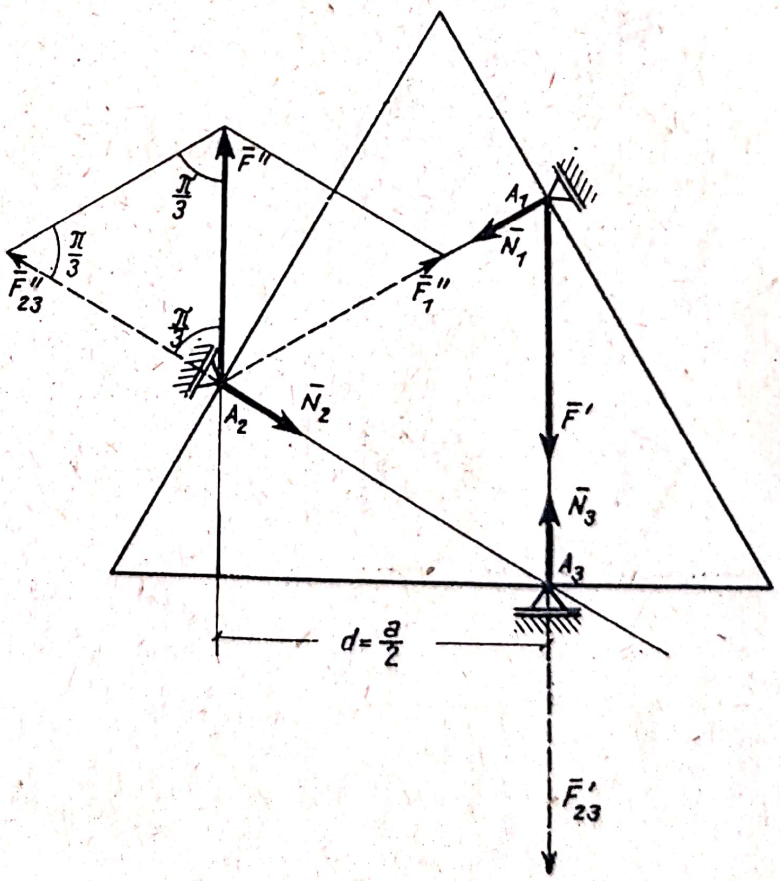


Fig. 12.13 *b*

și $\bar{F}''$ ale cuplului pe direcțiile suporturilor celor trei reacțiuni din reazeme ca în problema precedentă.

Scanned with OKEN Scanner

Vom considera $|\bar{F}'| = |\bar{F}_2''| = P$ aplicate în punctele A_1 și A_2, distanța dintre suporturile lor fiind $d = \frac{a}{2}$.

Descompunem forța $\bar{F}'$ pe direcția lui $\bar{N}_1$ și pe direcția A_1A_3 care unește punctul de intersecție A_1 a lui $\bar{F}'$ și $\bar{N}_1$ cu punctul de intersecție A_3 a lui $\bar{N}_2$ și $\bar{N}_3$ obținînd componentele:

$$\bar{F}_1' = 0 \qquad \bar{F}_{23}' = \bar{F}'.$$

Descompunînd forța $\bar{F}_{23}'$ (considerată aplicată în A_3) pe direcțiile forțelor $\bar{N}_2$ și $\bar{N}_3$ obținem componentele:

$$\bar{F}_2' = 0 \qquad \bar{F}_3' = \bar{F}'.$$

Descompunem apoi forța $\bar{F}''$ pe direcția lui $\bar{N}_1$ și pe direcția A_2A_3 (punctul de intersecție a lui $\bar{F}''$ și $\bar{N}_1$ este punctul A_2) obținînd componentele:

$$|\bar{F}_1''| = |\bar{F}_{23}''| = |\bar{F}''|$$

iar $\bar{F}_{23}''$ descompus în A_3, pe direcțiile forțelor $\bar{N}_2$ și $\bar{N}_3$ ne dă componentele:

$$\bar{F}_2'' = \bar{F}_{23}'' \qquad \bar{F}_3'' = 0.$$

Deci componentele cuplului de forțe $(\bar{F}', \bar{F}'')$ pe direcțiile suporturilor celor trei forțe sînt:

$$\bar{F}_1 = \bar{F}_1' + \bar{F}_1'' \qquad \bar{F}_2 = \bar{F}_2' + \bar{F}_2'' \qquad \bar{F}_3 = \bar{F}_3' + \bar{F}_3''$$

unde:

$$|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2| = |\bar{F}_3| = P$$

și deci reacțiunile căutate $\bar{N}_i = -\bar{F}_i$ sînt:

$$N_1 = N_2 = N_3 = P$$

orientate ca în figura 12.13 *b*.

Evident $\bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \bar{N}_3 = 0$ poligonul forțelor (fig. 12.13 *c*) închizîndu-se.

Soluția grafică dată poate fi mai simplă sau mai complicată după modul în care alegem cuplul de forțe $(\bar{F}', \bar{F}'')$.

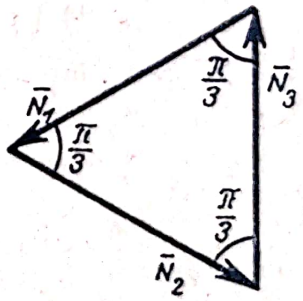


Fig. 12.14 *c*

12.14. Să se determine reacțiunile din articulațiile A, B și C ale arcului din figura 12.14 *a* acționat de forța P. Se cunosc lungimile r și a.

Rezolvare. Arcul este format din corpurile *1* și *2* articulate între ele. Asupra corpului *1* acționează numai reacțiunile $\bar{R}_A$ și $\bar{R}_{12}$ din articulațiile A și B deci conform (12.6):

$$\bar{R}_A = -\bar{R}_{12}$$

forțele avînd suportul comun AB.

Scanned with OKEN Scanner

În baza principiului acțiunii și al reacțiunii:

$$\overline{R}_{21} = -\overline{R}_{12}$$

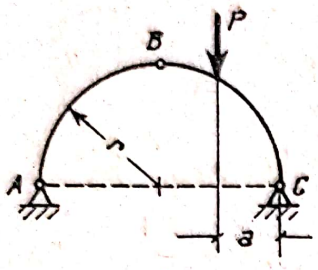
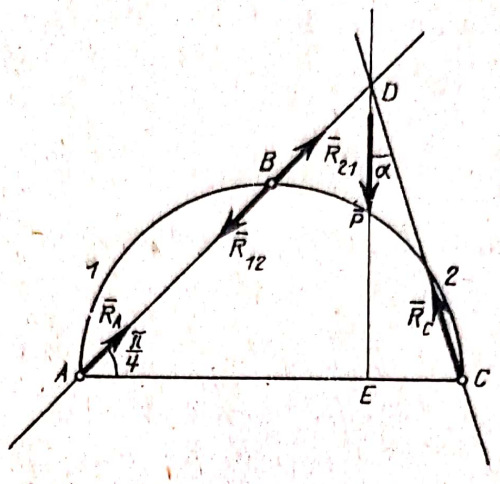


Fig. 12.14 *a*



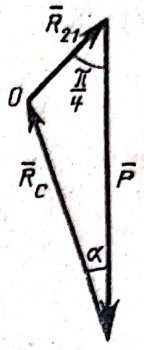


Fig. 12.14 *b*

deci reacțiunea $\overline{R}_{21}$ care acționează asupra corpului *2* datorită corpului *1* are ca suport tot dreapta AB. Asupra corpului *2* mai acționează forța $\overline{P}$ și reacțiunea $\overline{R}_C$ deci conform (12.7):

$$\overline{P} + \overline{R}_C + \overline{R}_{21} = 0$$

iar suporturile acestor forțe sînt concurente în punctul D.

Din fig. 12.14 *b* avem:

$$DE = AE = 2r - a \qquad \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (2r-a)^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{2r-a}{\sqrt{a^2 + (2r-a)^2}}$$

și aplicînd teorema sinusurilor în poligonul forțelor:

$$\frac{R_{21}}{\sin\alpha} = \frac{R_C}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{P}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$$

de unde:

$$R_{21} = R_A = \frac{a}{r\sqrt{2}}P \qquad R_C = \frac{\sqrt{a^2 + (2r-a)^2}}{2r}P$$

rezultate care s-au obținut analitic în problema 8.1.

Observație. Construcția formată din dreptele AD și DC (fig. 12.14 *b*) poate fi considerată ca un poligon funicular cu polul în O, ale cărui laturi trec prin punctele A, B și C.

Dacă asupra unui arc cu trei articulații ar acționa mai multe forțe, am putea determina reacțiunile cu ajutorul construcției din figura 12.14 *c*. Fie $\overline{R}_1$ și $\overline{R}_2$ rezultantele forțelor efectiv aplicate corpurilor *1* și *2*. Se deter-

mină reacțiunile $\bar{R}_{1A}$ și $\bar{R}_{1C}$ ca și cînd asupra arcului ar acționa numai forța $\bar{R}_1$ ($\bar{R}_{1C}$ are direcția BC iar $\bar{R}_1$, $\bar{R}_{1C}$ și $\bar{R}_{1A}$ sînt concurente în punctul D). Analog se determină reacțiunile $\bar{R}_{2A}$ și $\bar{R}_{2C}$ ca și cînd asupra arcului ar acționa forța $\bar{R}_2$ ($\bar{R}_{2A}$ are direcția AB iar $\bar{R}_2$, $\bar{R}_{2A}$ și $\bar{R}_{2C}$ sînt concurente în punctul E).

În triunghiurile forțelor aceste reacțiuni sînt $\overline{R}_{1A}=\overline{O_1a_0}$, $\overline{R}_{1C}=\overline{a_1O_1}$, $\overline{R}_{2A}=\overline{O_2a_1}$ și $\overline{R}_{2C}=\overline{a_2O_2}$. Se compun reacțiunile $\bar{R}_{2A}$ cu $\bar{R}_{1A}$ și se obține reacțiunea $\bar{R}_A$ (v. triunghiul forțelor OO_1a_0). Analog se obține reacțiunea $\bar{R}_C=\bar{R}_{2C}+\bar{R}_{1C}$ (triunghiul a_2O_2O). Poligonul funicular construit cu polul în O trece prin punctele A, B și C deoarece $O_1O \parallel AB$ și $O_2O \parallel BC$ iar poligoanele funiculare construite cu polul în O_1 respectiv O_2 trec prin punctele A și B respectiv B și C.

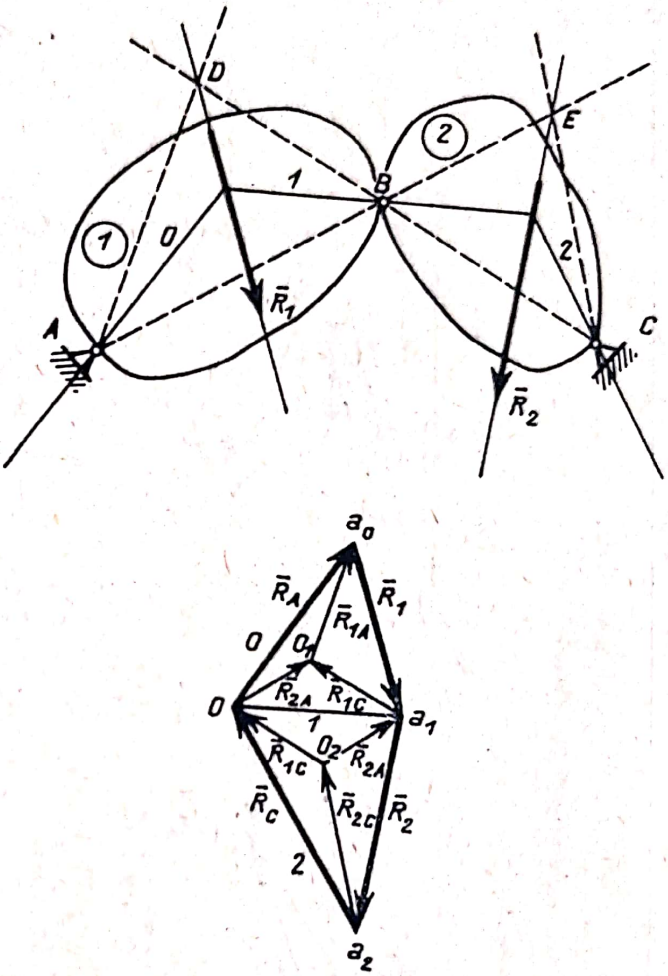


Fig. 12.14 *c*

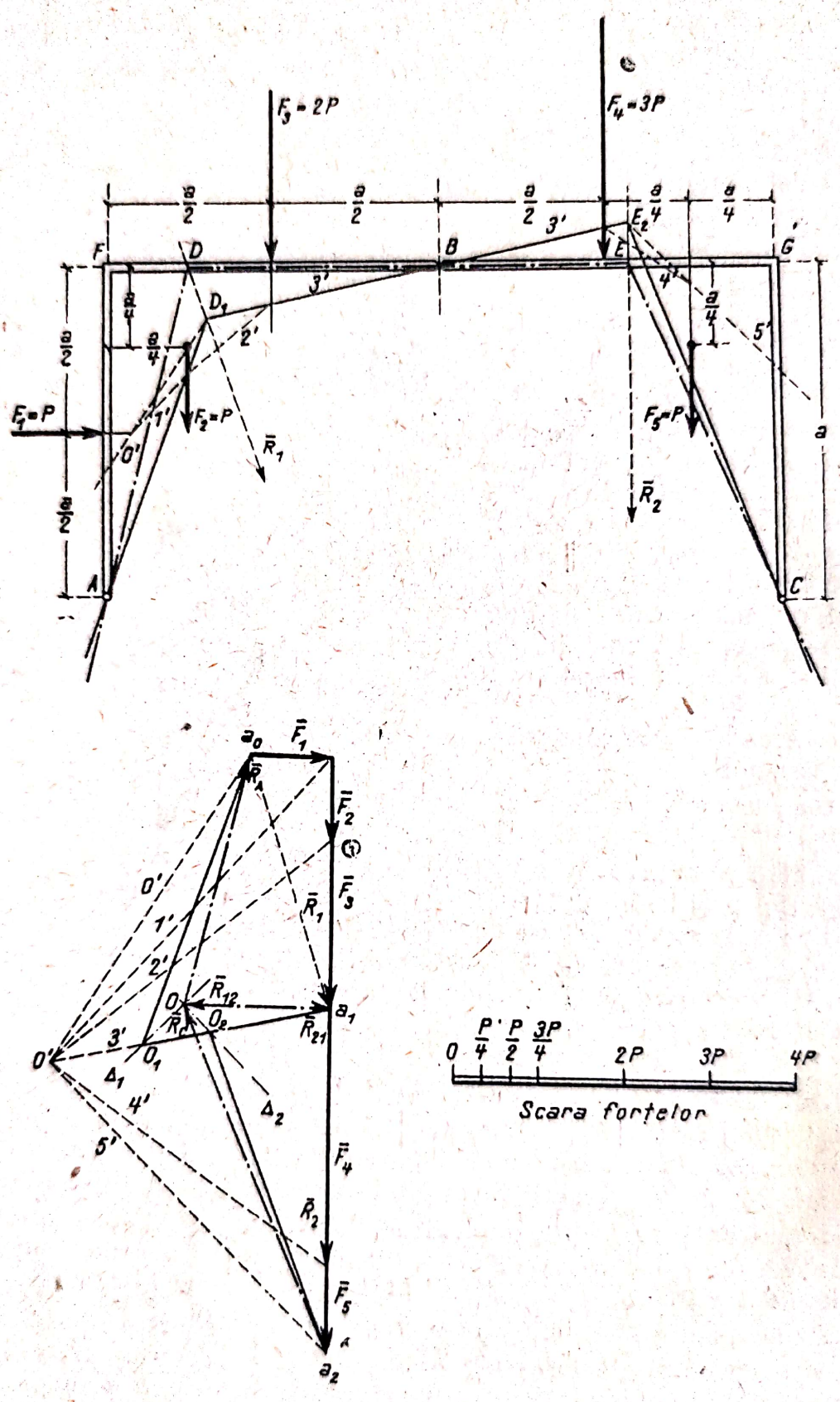
Reacțiunile căutate se găsesc din poligonul forțelor $\bar{R}_A=\overline{Oa_0}$, $\bar{R}_C=\overline{a_2O}$, $\bar{R}_{12}=-\bar{R}_{21}=\overline{a_1O}$.

Astfel din punct de vedere grafic problema determinării reacțiunilor la un sistem de două corpuri cu trei articulații este echivalentă cu problema construirii unui poligon funicular la care trei laturi date trec prin trei puncte date.

12.15. Se dă arcul cu trei articulații A, B, C din fig. 12.15 *a* acționat de forțele $|\bar{F}_1|=P$, $|\bar{F}_3|=2P$, $|\bar{F}_4|=3P$ și de greutățile $F_2=F_5=P$ ale barelor AB și BC. Se cunosc lungimile $AF=FB=BG=GC=a$.

Rezolvare. Folosind observația din problema 12.14 va trebui să determinăm rezultantele $\bar{R}_1=\bar{F}_1+\bar{F}_2+\bar{F}_3$ și $\bar{R}_2=\bar{F}_4+\bar{F}_5$ ale forțelor care acționează asupra barelor AB și BC. Cu polul în O' construim poligoanele funiculare $0'$, $1'$, $2'$, $3'$ și $3'$, $4'$, $5'$ (desenate cu linie întreruptă), cu ajutorul cărora determinăm suporturile rezultantelor $\bar{R}_1$ și $\bar{R}_2$.

Pentru sistemul de forțe $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ va trebui să determinăm polul O al unui poligon funicular, astfel ca prima latură să treacă prin punctul A, a doua prin B și ultima prin punctul C. Pentru aceasta ducînd paralele a_0O_1 și a_1O_1 la dreptele D_1A și D_1B (D_1 este un punct oarecare de pe suportul



$F_3 = 2P$
$F_4 = 3P$
$F_1 = P$
$F_2 = P$
$F_5 = P$
$\bar{R}_1$
$\bar{R}_2$
$\bar{R}_A$
$\bar{R}_{12}$
$\bar{R}_{21}$
$\bar{R}_C$
Δ_1
Δ_2
a_0
a_1
a_2
O_1
O_2
$\frac{P}{4}$ $\frac{P}{2}$ $\frac{3P}{4}$
0 2P 3P 4P
Scara fortelor

Fig. 12.15 *a*

lui R_1) determinăm polul O_1 al poligonului funicular AD_1B trecînd prin punctele A și B, iar în baza proprietății (12.5) orice poligon funicular cu polul pe paralela Δ_1 dusă prin O_1 la AB trece prin punctele A și B. Analog ducînd paralelele a_1O_2 și a_2O_2 la dreptele E_2B și E_2C (E_2 este situat pe suportul lui $\bar{R}_2$) determinăm polul O_2 al poligonului funicular BE_2C trecînd prin punctele B și C, conform (12.5) orice poligon funicular cu polul pe paralela Δ_2 dusă prin O_2 la BC trece prin punctele B și C. (Pentru simplificarea construcției grafice latura $3'$ trece prin B iar D_1 și E_2 se găsesc pe această latură.)

La intersecția dreptelor Δ_1 și Δ_2 se găsește polul O căutat cu ajutorul căruia construim poligonul funicular $ADBEC$ (desenat cu linie punct) care trece prin punctele A, B și C.

În baza relației (1) din problema 12.14 reacțiunile căutate sînt:

$$\bar{R}_A = \overline{Oa_0} \quad \bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21} = \overline{a_1O} \quad \bar{R}_C = \overline{a_2O}.$$

În fig. 12.15 *b* am desenat din nou poligonul forțelor; componentele reacțiunilor din articulație pe verticală și orizontală sînt:

$$\bar{R}_A \begin{cases} V_A = 3P \\ H_A = 0{,}75\ P \end{cases} \qquad \bar{R}_{12} \begin{cases} V_B = 0 \\ H_B = 1{,}75\ P \end{cases}$$

$$\bar{R}_C \begin{cases} V_C = 4P \\ N_C = 1{,}75\ P. \end{cases}$$

sensurile lor fiind indicate pe figură.

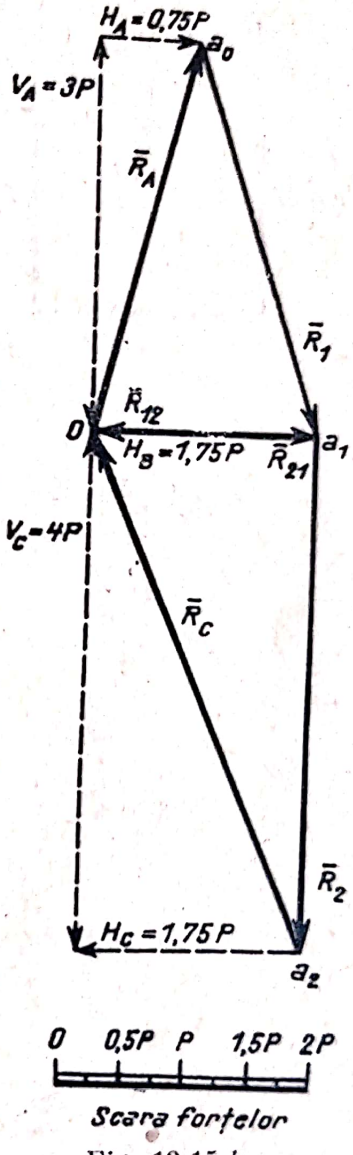


Fig. 12.15 *b*

C. PROBLEME NEREZOLVATE

12.16. Să se determine, folosind metoda grafică a poligonului funicular, cu ce sînt echivalente sistemele de forțe din figura 12.16 *a*, *b* și *c* care acționează asupra unui pătrat de latură *a*.

Răspuns. a) forța unică; b) cuplu; c) sistem echivalent cu zero.

12.17. Să se determine pe cale grafică poziția centrului de greutate al plăcii omogene din figura 12.17.

12.18. Să se determine pe cale grafică reacțiunile din articulația A și din reazemul simplu B al barei omogene AB de greutate P, înclinată sub unghiul α față de orizontală (fig. 12.18).

Răspuns. $N_B = \dfrac{P}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}$, $R_A = \dfrac{P}{\sin\beta}$ unde unghiul de înclinare β al reacțiunii R_A față de orizontală este dat de relația $\mathrm{tg}\,\beta = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Scanned with OKEN Scanner

12.19. Să se determine pe cale grafică reacțiunile din reazemele A și B ale grinzii simplu rezemate încărcate ca în fig. 12.19.

Răspuns. $N_A = 4\ tf$, $N_B = 3{,}5$ tf.

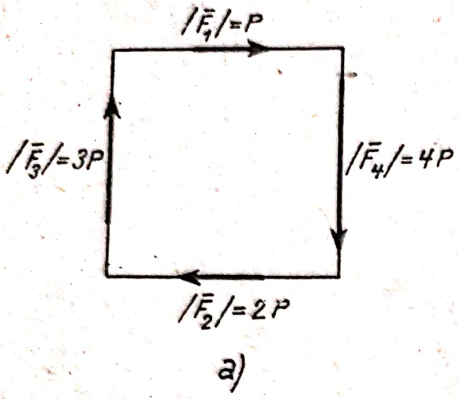


Fig. 12.16 *a*

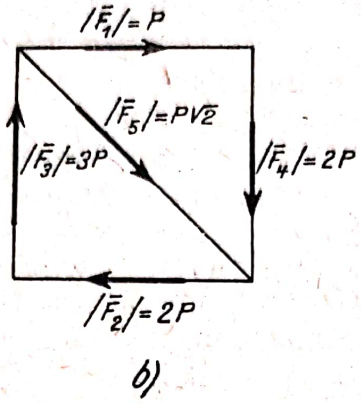


Fig. 12.16 *b*

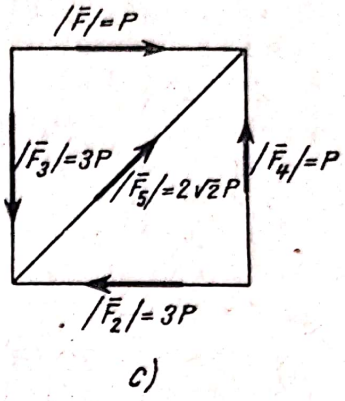


Fig. 12.16 *c*

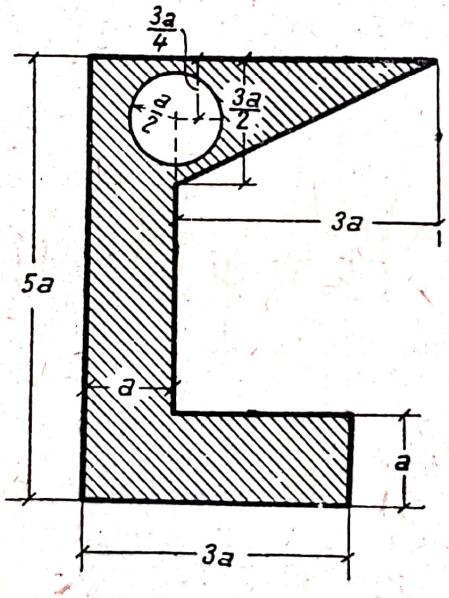


Fig. 12.17

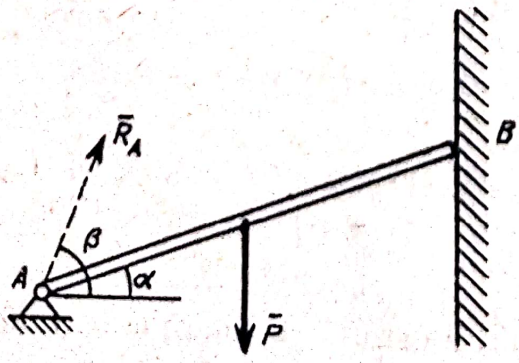


Fig. 12.18

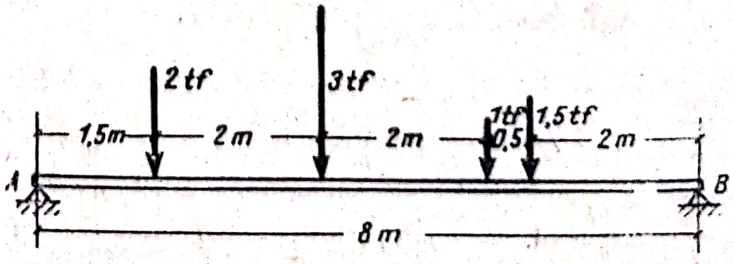


Fig. 12.19

CINEMATICA

Capitolul XIII

CINEMATICA PUNCTULUI

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Pentru a cunoaște mișcarea unui punct P trebuie să știm cum variază în raport cu timpul t poziția sa față de un sistem de referință $Oxyz$ considerat fix, adică să cunoaștem vectorul său de poziție:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \tag{13.1}$$

ca funcție de timp (fig. 13. *a*) unde:

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t) \tag{13.2}$$

sînt coordonatele punctului P în raport cu sistemul de referință considerat. Ecuațiile (13.2) sînt ecuațiile parametrice ale traiectoriei (curbei C descrisă de punct în mișcare).

Viteza $\bar{v}$ a punctului P este un vector tangent la traiectorie și este egală cu derivata vectorului de poziție în raport cu timpul:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}. \tag{13.3}$$

Accelerația $\bar{a}$ a punctului P este egală cu derivata vectorului viteză $\bar{v}$ în raport cu timpul:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}. \tag{13.4}$$

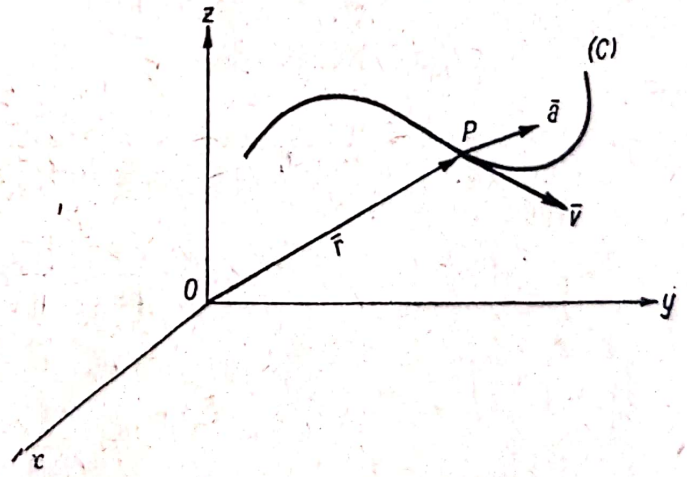


Fig. 13. *a*

* În cele ce urmează vom nota $\dot{x}, \ldots, \dot{\bar{r}}, \ldots$ derivatele de ordinul întîi în raport cu timpul ale funcțiilor scalare $x, \ldots$ sau vectoriale $\bar{r}, \ldots$ și cu $\ddot{x}, \ldots, \ddot{\bar{r}}, \ldots$ derivatele de ordinul al doilea în raport cu timpul ale aceleași funcții $\left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt}, \ddot{\bar{r}} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}, \ldots\right)$.

Deci proiecțiile vitezei și accelerației pe axele unui sistem de referință cartezian $Oxyz$ sînt:

$$v_x = \dot{x} \qquad v_y = \dot{y} \qquad v_z = \dot{z} \tag{13.5}$$

$$a_x = \ddot{x} \qquad a_y = \ddot{y} \qquad a_z = \ddot{z}. \tag{13.6}$$

Într-un sistem de coordonate cilindrice $Ornz$ (fig. 13. *b*) poziția punctului P este determinată prin coordonatele:

$$r = r(t) \quad \theta = \theta(t) \quad z = z(t) \tag{13.7}$$

unde $r = OP'$ (P' este proiecția lui P pe planul Orn sau Oxy), θ este unghiul format de raza vectoare OP' cu axa fixă Ox, iar $z = PP'$ este cota punctului P. Notînd cu $\bar{\rho}$, $\bar{n}$, $\bar{k}$ versorii axelor Or, On, Oz, vectorul de poziție, viteza și accelerația sînt:

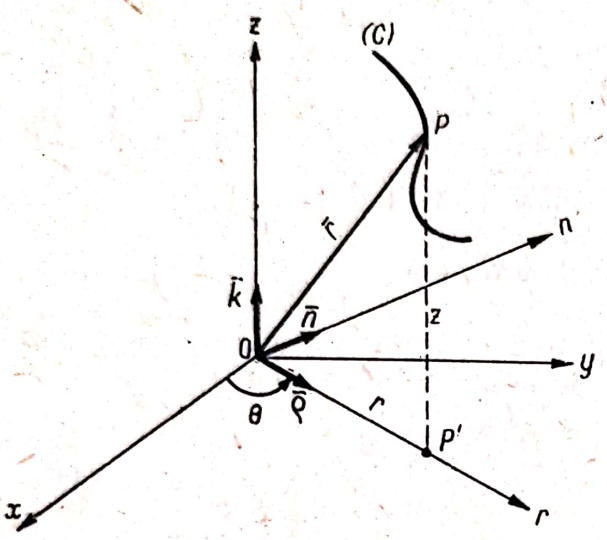


Fig. 13. *b*

$$\bar{r} = r\bar{\rho} + z\bar{k} \tag{13.8}$$

$$\bar{v} = \dot{r}\bar{\rho} + r\dot{\theta}\bar{n} + \dot{z}\bar{k} \tag{13.9}$$

$$\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{\rho} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\bar{n} + \ddot{z}\bar{k}. \tag{13.10}$$

În particular dacă punctul P se mișcă în planul Oxy coordonatele cilindrice devin coordonate polare plane, iar componentele vitezei și accelerației sînt:

$$v_\rho = \dot{r} \qquad v_n = r\dot{\theta} \tag{13.11}$$

$$a_\rho = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad a_n = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(\dot{r}^2\dot{\theta}). \tag{13.12}$$

Viteza areolară Ω este limita raportului dintre aria ΔA a sectorului OPP' (fig. 13. *c*) și intervalul de timp Δt în care a fost măturat acest sector cînd $\Delta t \to 0$:

$$\Omega = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}. \tag{13.13}$$

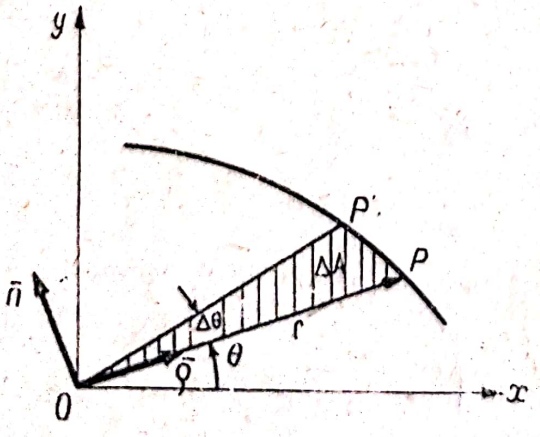


Fig. 13. *c*

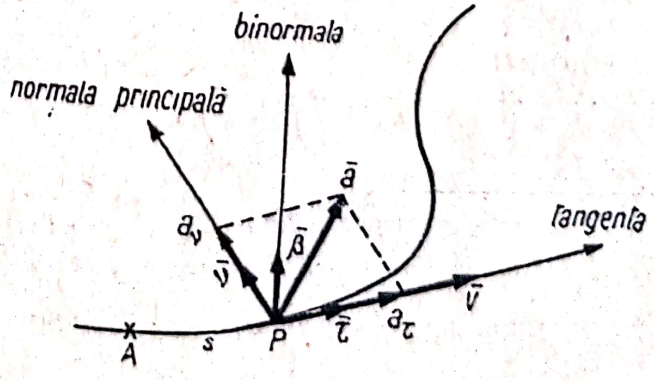


Fig. 13. *d*

În sfîrşit mişcarea unui punct P este determinată cînd se cunoaşte traiectoria C a punctului şi *legea orară*:

$$s = s(t) \tag{13.14}$$

a mişcării, adică legea de variaţie a arcului $s = \widehat{AP}$ de pe curba C în funcţie de timp (A este un punct oarecare al traiectoriei ales ca origine). Considerînd triedrul de referinţă al lui Frenet şi notînd cu $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$ şi $\bar{\beta}$ versorii tangentei (orientată în sensul crescător al arcului s), normalei principale (orientată spre centrul de curbură) şi binormalei la curbă şi cu ρ raza de curbură a traiectoriei, vectorii viteză şi acceleraţie sînt:

$$\bar{v} = \dot{s}\,\bar{\tau} \tag{13.15}$$

$$\bar{a} = \ddot{s}\,\bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\bar{\nu}, \tag{13.16}$$

adică viteza are direcţia tangentei, avînd componentele:

$$v_\tau = \dot{s} = v \qquad v_\nu = 0 \qquad v_\beta = 0, \tag{13.17}$$

iar acceleraţia se găseşte în planul osculator avînd, componentele:

$$a_\tau = \ddot{s} = \dot{v} \qquad a_\nu = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho} \qquad a_\beta = 0 \tag{13.18}$$

(s-a notat cu v scalarul vitezei).

O mişcare se numeşte *uniformă* dacă acceleraţia tangenţială este nulă, adică scalarul vitezei este constant:

$$a_\tau = 0 \qquad v = c. \tag{13.19}$$

O mişcare este *uniform variată* dacă acceleraţia tangenţială este constantă:

$$a_\tau = c \tag{13.20}$$

fiind uniform accelerată dacă $\bar{a}_\tau$ şi $\bar{v}$ au acelaşi sens şi uniform întîrziată dacă sînt de sens contrar.

În cazul particular al mişcărilor rectilinii, traiectoria fiind o dreaptă, curbura este nulă $\frac{1}{\rho} = 0$ deci $a_\nu = 0$, adică viteza şi acceleraţia au direcţia dreptei.

În cazul mişcărilor circulare (fig. 13. *e*) cum:

$$s = r\theta \tag{13.21}$$

viteza şi componentele acceleraţiei sînt:

$$v = \dot{s} = r\omega \qquad a_\tau = \dot{v} = r\dot{\omega}$$
$$a_\nu = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \tag{13.22}$$

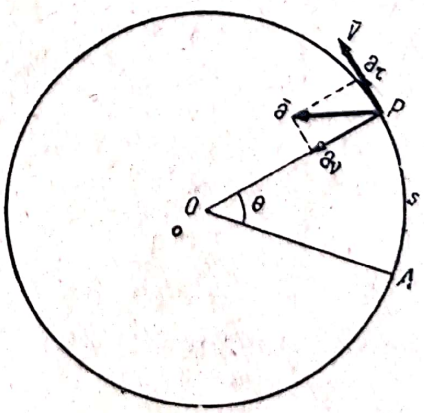


Fig. 13. *e*

unde $\omega = \dot{\theta}$ este viteza unghiulară. Dacă ω este exprimat în radiani pe secundă, n fiind numărul de rotații pe minut:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \tag{13.23}$$

B. PROBLEME REZOLVATE

13.1. Un punct se mișcă pe dreapta $ABCD$ pornind din repaus din punctul A. Pe porțiunea AB parcursă în timpul t_1, mișcarea este uniform accelerată atingîndu-se viteza v_2 în punctul B, pe porțiunea BC mișcarea este uniformă, iar pe porțiunea CD parcursă în timpul t_3 mișcarea este uniform întîrziată, mobilul oprindu-se în punctul D. Cunoscînd distanța $AD = d$, să se studieze mișcarea mobilului și să se reprezinte diagramele mișcării vitezei și accelerației. Aplicație numerică $t_1 = 25\ s$, $t_3 = 15$ s, $v_2 = 54$ km/h, $d = 1{,}5$ km.

Rezolvare. Mișcarea fiind rectilinie, viteza și accelerația vor avea direcția dreptei AD (axa Ax din fig. 13.1 *a*) adică $y = z = 0$.

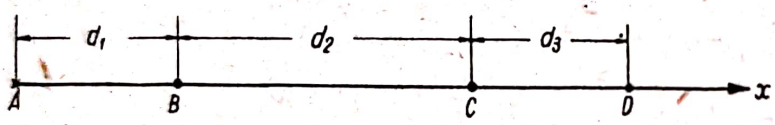


Fig. 13.1 *a*

În porțiunea AB mișcarea fiind uniform accelerată, conform (13.20) accelerația este constantă:

$$\ddot{x} = a_1,$$

iar prin integrări succesive se obține viteza:

$$\dot{x} = a_1 t + C_1$$

și legea de mișcare:

$$x = \frac{a_1 t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Constantele de integrare le determinăm cu ajutorul condițiilor inițiale:

$$t = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$

(punctul se găsea în A și avea viteza nulă); făcînd înlocuirile în ecuațiile de mai sus rezultă $C_1 = C_2 = 0$, deci pe porțiunea AB avem:

$$x = \frac{a_1 t^2}{2} \qquad \dot{x} = a_1 t \qquad \ddot{x} = a_1 \quad (0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{1}$$

Cum în punctul B pentru $t = t_1$ avem viteza $\dot{x} = v_2 = a_1 t_1$, accelerația este

$$\ddot{x} = \frac{v_2}{t_1}, \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar distanța $d_1 = AB$ este:

$$d_1 = x_B = \frac{a_1 t_1^2}{2} = \frac{v_2 t_1}{2}. \tag{3}$$

Pe porțiunea BC, mișcarea fiind uniformă, viteza este constantă (13.19):

$$\dot{x} = C_3,$$

deci:

$$x = C_3 t + C_4 \qquad \ddot{x} = 0.$$

Condițiile din punctul B sînt:

$$t = t_1 \begin{cases} x = \frac{v_2 t_1}{2} \\ \dot{x} = v_2 \end{cases}$$

și înlocuind în ecuațiile precedente rezultă $C_3 = v_2$, $C_4 = -\frac{v_2 t_1}{2}$ deci pe porțiunea BC avem:

$$x = v_2 (t - t_1) + \frac{v_2 t_1}{2} \qquad \dot{x} = v_2 \qquad \ddot{x} = 0 \ (t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + t_2) \tag{4}$$

unde t_2 este timpul în care este parcursă distanța $d_2 = BC$:

$$d_2 = x_C - x_B = v_2 t_2.$$

Pe porțiunea CD, mișcarea fiind uniform încetinită, accelerația este constantă și orientată în sens invers mișcării, deci conform (13.20):

$$\ddot{x} = -a_3$$

și prin integrări succesive obținem:

$$\dot{x} = -a_3 t + C_5 \qquad x = -a_3 \frac{t^2}{2} + C_5 t + C_6.$$

Condițiile din punctul C fiind:

$$t = t_1 + t_2 \begin{cases} x = \frac{v_2 t_1}{2} + v_2 t_2 \\ \dot{x} = v_2 \end{cases}$$

rezultă $C_5 = a_3 (t_1 + t_2) + v_2$, $C_6 = -a_3 \frac{(t_1 + t_2)^2}{2} - v_2 (t_1 + t_2) + \frac{v_2 t_1}{2} + v_2 t_2$, deci pe porțiunea CD:

$$x = -\frac{a_3}{2} [t - (t_1 + t_2)]^2 + v_2 [t - (t_1 + t_2)] + \frac{v_2 t_1}{2} + v_2 t_2$$

$$\dot{x} = -a_3 [t - (t_1 + t_2)] + v_2 \qquad \ddot{x} = -a_3 \qquad (t_1 + t_2 \leqslant t \leqslant t_1 + t_2 + t_3). \tag{5}$$

Pentru a determina necunoscutele a_3 și t_2 ne folosim de condițiile din punctul D:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 \begin{cases} x = d \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$

(mobilul se oprește). Obținem:

$$a_3 = \frac{v_2}{t_3} \qquad t_2 = \frac{d}{v_2} - \frac{t_1 + t_3}{2}. \tag{6}$$

Evident $t_2 \geqslant 0$ deci $d \geqslant v_2 \frac{t_1 + t_3}{2}$. Distanțele $d_2 = BC$ și $d_3 = CD$ sînt:

$$d_2 = d - \frac{v_2 (t_1 + t_3)}{2} \qquad d_3 = x_D - x_C = \frac{1}{2} a_3 t_3^2 = \frac{v_2 t_3}{2}. \tag{7}$$

Timpul în care este străbătută distanța $d = AD$ este:

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{d}{v_2} + \frac{t_1 + t_3}{2}.$$

Ținînd seama de ecuațiile (1), (4) și (5), în figura 13.1 *b* ... *d* sînt reprezentate diagramele mișcării, vitezei și accelerației. În porțiunile *I* (*AB*)

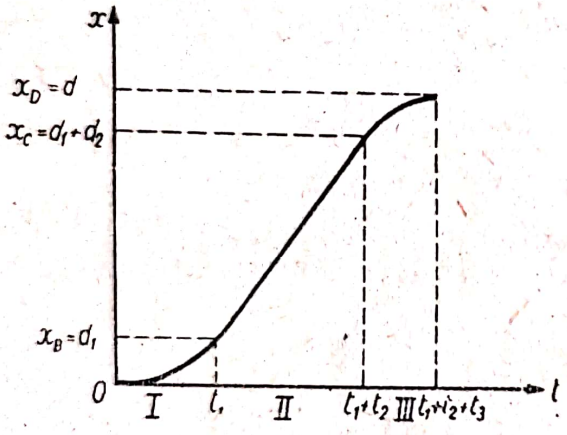


Fig. 13.1 *b*

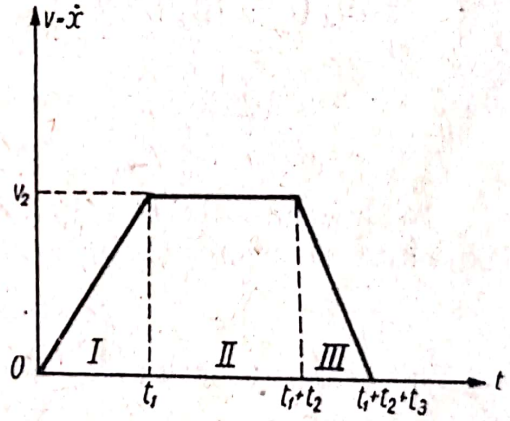


Fig. 13.1 *c*

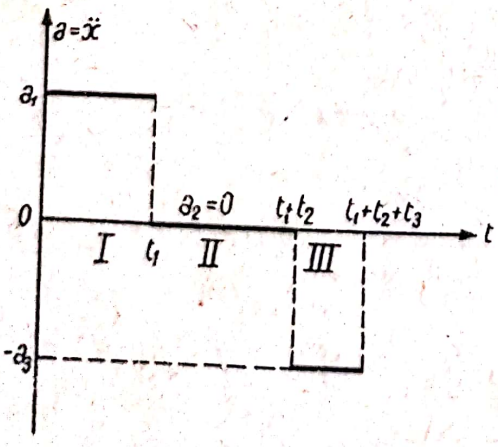


Fig. 13.1 *d*

și *III* (*CD*) diagrama $x = x(t)$ este reprezentată prin arce de parabolă avînd tangenta paralelă cu axa t pentru $t = 0$, respectiv $t = t_1 + t_2 + t_3$ căci viteza $\dot{x} = 0$, iar în porțiunea *II* (*BC*) x variază liniar, curba fiind tangentă la parabolele *I* și *III* pentru $t = t_1$ respectiv $t = t_1 + t_2$ deoarece $\dot{x}(t_1) = \dot{x}(t_1 + t_2) = v_2$.

Făcînd înlocuirile numerice, cum $v_2 = 54$ km/h $= 15$ m/s, distanțele d_1, d_2, d_3 sînt:

$$d_1 = \frac{v_2 t_1}{2} = \frac{15 \times 25}{2} = 187{,}5 \text{ m}$$

$$d_3 = \frac{v_2 t_3}{2} = \frac{15 \times 15}{2} = 112{,}5 \text{ m} \qquad d_2 = d - (d_1 + d_3) = 1\,200 \text{ m},$$

Scanned with OKEN Scanner

timpul în care se străbate porțiunea a *II*-a este:

$$t_2 = \frac{d_2}{v_2} = \frac{1\,200}{15} = 80 \text{ s},$$

deci întreaga distanță AB este parcursă în timpul:

$$t_1 + t_2 + t_3 = 120 \text{ s} = 2 \text{ min}.$$

Accelerațiile pe porțiunile *I* și *III* sînt în valoare absolută:

$$a_1 = \frac{v_2}{t_1} = \frac{15}{25} = 0{,}6 \text{ m/s}^2 \qquad a_3 = \frac{v_2}{t_3} = \frac{15}{15} = 1 \text{ m/s}^2.$$

13.2. Un paraşutist se aruncă de la înălțimea $h = 3\,190$ m, fără viteză inițială. El cade $t_1 = 20$ s cu paraşuta închisă, apoi deschizînd-o are o mișcare uniform întîrziată timp de $t_2 = 9{,}5$ s și apoi o mișcare uniformă cu viteza $v_3 = 6{,}2$ m/s. Știind că accelerația gravitației este $g = 9{,}81$ m/s^2 să se determine timpul necesar coborîrii.

Rezolvare. În timpul căderii libere accelerația este:

$$\ddot{x} = g$$

[axa Ox este orientată în jos (fig. 13.3 *a*), iar originea este aleasă în punctul în care se lansează paraşutistul]. Integrînd și ținînd seama de condițiile inițiale $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$ (viteza inițială este nulă) rezultă:

$$x = \frac{gt^2}{2} \qquad \dot{x} = gt \qquad \ddot{x} = g \tag{1}$$

iar în momentul în care se deschide paraşuta, spațiul parcurs și viteza sînt:

$$x_1 = \frac{g t_1^2}{2} = \frac{9{,}81 \times 20^2}{2} = 1\,962 \text{ m} \qquad v_1 = gt_1 = 9{,}81 \times 20 = 196{,}2 \text{ m/s}.$$

După ce paraşuta s-a deschis, mișcarea fiind uniform întîrziată, accelerația este constantă:

$$\ddot{x} = -a_2.$$

Integrînd și ținînd seama că în momentul inițial $t = 0$ (cînd se deschide paraşuta), $x = x_1$, $\dot{x} = v_1$ obținem:

$$x = -a_2\frac{t^2}{2} + v_1 t + x_1 \qquad \dot{x} = -a_2 t + v_1 \qquad \ddot{x} = -a_2. \tag{2}$$

Cum pentru $t = t_2$, $\dot{x} = v_3$ din relațiile (2) obținem accelerația:

$$a_2 = \frac{v_1 - v_3}{t_2} = \frac{196{,}2 - 6{,}2}{9{,}5} = 20 \text{ m/s}^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci pînă în acel moment paraşutistul a străbătut distanţa:

$$x_2 = -a_2\frac{t_2^2}{2} + v_1 t_2 + x_1 = -20\,\frac{9{,}5^2}{2} + 196{,}2 \times 9{,}5 + 1\,962 = 2\,923{,}4\ \text{m}.$$

În timpul mişcării uniforme, viteza fiind constantă:

$$\dot{x} = v_3$$

integrînd şi ţinînd seama că în momentul iniţial $t = 0$ (cînd începe mişcarea uniformă) $x = x_2$, rezultă:

$$x = v_3 t + x_2 \qquad \dot{x} = v_3 \qquad \ddot{x} = 0. \tag{3}$$

Cînd paraşutistul ajunge pe sol $x = h$, deci timpul cît are loc mişcarea uniformă este:

$$t_3 = \frac{h - x_2}{v_3} = \frac{3\,190 - 2\,923{,}4}{6{,}2} = 43\ \text{s}.$$

Timpul total necesar coborîrii este:

$$t_1 + t_2 + t_3 = 20 + 9{,}5 + 43 = 72{,}5\ \text{s}.$$

13.3. Un corp este aruncat pe verticală în sus cu viteza v_0. Să se studieze mişcarea lui determinîndu-se înălţimea maximă la care ajunge şi viteza cu care atinge pămîntul. Să se reprezinte diagramele mişcării şi vitezei.

Rezolvare. Acceleraţia corpului fiind egală cu acceleraţia gravitaţiei:

$$\bar{a} = \bar{g}$$

atît în perioada de urcare cît şi în cea de coborîre proiectînd pe axa Ox (fig. 13.3 *a*) obţinem:

$$\ddot{x} = -g.$$

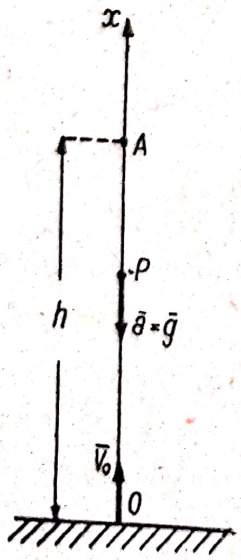


Fig. 13.3 *a*

Integrînd şi ţinînd seama de condiţiile iniţiale $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = v_0$ rezultă:

$$x = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \qquad \dot{x} = -gt + v_0 \qquad \ddot{x} = -g. \tag{1}$$

Înălţimea maximă h este atinsă în momentul t_1 cînd se anulează viteza $\dot{x} = 0$:

$$-gt_1 + v_0 = 0$$

deci timpul de urcare este:

$$t_1 = \frac{v_0}{g}$$

de unde:

$$h = -\frac{gt_1^2}{2} + v_0 t_1 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $t < t_1$ $\dot{x} > 0$ corpul urcă, pentru $t > t_1$ $\dot{x} < 0$, viteza schimbă de sens, corpul coboară. Corpul revine pe pămînt cînd $x = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t = 0$. Se obțin două soluții, una $t = 0$ corespunde momentului inițial, iar a doua:

$$t_2 = \frac{2v_0}{g} = 2t_1$$

ne arată că timpul de coborîre $t_2 - t_1$ este egal cu timpul de urcare. Viteza cu care ajunge corpul pe pămînt este:

$$\dot{x} = -gt_2 + v_0 = -v_0,$$

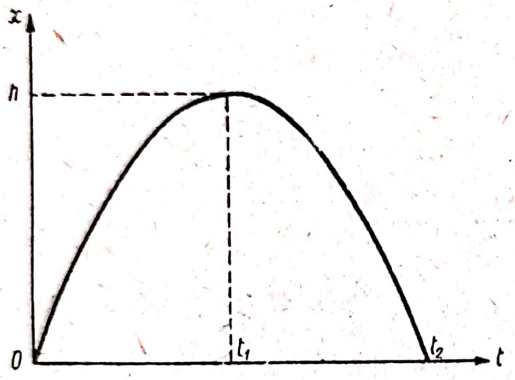


Fig. 13.3 *b*

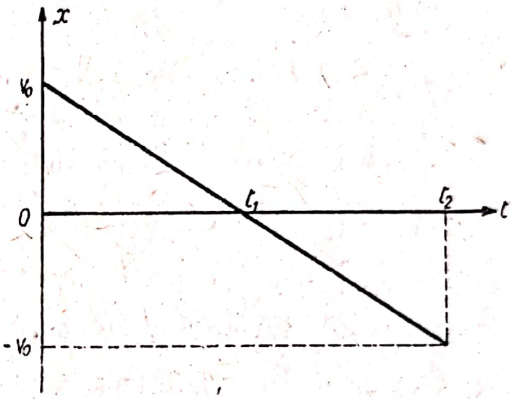


Fig. 13.3 *c*

adică este egală în modul cu viteza inițială, însă este bineînțeles orientată în jos.

Diagramele mișcării $x = x(t)$ și ale vitezei $\dot{x} = \dot{x}(t)$ sînt reprezentate în figurile 13.3 *b* și 13.3 *c*.

13.4. Pe o linie dreaptă se mișcă uniform trei mobile. Primul pornește din punctul A cu viteza v_1 îndreptîndu-se spre punctul B ($AB = d_1$) din care pornește al doilea mobil cu viteza v_2 în același sens, după timpul t_1 de la pornirea primului. Din punctul C situat la distanța $AC = d_2 > d_1$ pornește al treilea mobil cu viteza v_3 după timpul $t_2 > t_1$ de la pornirea primului și în sens invers mișcării celorlalte două mobile. Să se determine locurile de întîlnire ale mobilelor și timpul după care se întîlnesc două cîte două.

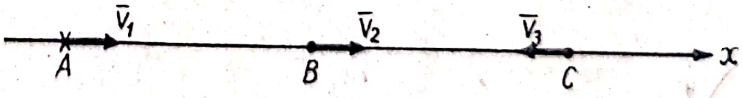


Fig. 13.4 *a*

Ce condiție trebuie îndeplinită pentru ca cele trei mobile să se întîlnească simultan? Aplicație numerică: $v_1 = 10$ m/s, $v_2 = 20$ m/s, $v_3 = 15$ m/s, $d_1 = 500$ m, $d_2 = 1\,000$ m, $t_1 = 15$ s, $t_2 = 45$ s.

Rezolvare. Vom alege originea în punctul A (fig. 13.4 *a*) și vom considera momentul inițial în momentul plecării primului mobil. Pentru primul mobil viteza este $\dot{x} = v_1$. Integrînd și ținînd seama de condiția inițială $t = 0$, $x = 0$ obținem legea de mișcare:

$$x = v_1 t \qquad (t \geqslant 0). \tag{1}$$

Pentru al doilea mobil viteza este $\dot{x} = v_2$. Integrînd și ținînd seama de condiția inițială $t = t_1$, $x = d_1$ obținem legea de mișcare:

$$x = v_2 (t - t_1) + d_1 \qquad (t \geqslant t_1). \tag{2}$$

Pentru al treilea mobil $\dot{x} = -v_3$ și cum pentru $t = t_2$, $x = d_2$ legea de mișcare este:

$$x = -v_3 (t - t_2) + d_2 \qquad (t \geqslant t_2). \tag{3}$$

Mobilele se întîlnesc cînd au aceeași abscisă. Astfel primul se întîlnește cu al doilea dacă:

$$v_1 t = v_2 (t - t_1) + d_1$$

adică pentru:

$$t = \frac{d_1 - v_2 t_1}{v_1 - v_2}, \tag{4}$$

iar abscisa locului de întîlnire este:

$$x = v_1 t = \frac{v_1 d_1 - v_1 v_2 t_1}{v_1 - v_2}. \tag{5}$$

Mobilele se întîlnesc efectiv numai dacă $t = \frac{d_1 - v_2 t_1}{v_1 - v_2} \geqslant t_1$, adică numai după ce mobilul al doilea a pornit. Din această condiție rezultă fie:

$$v_1 > v_2 \qquad d_1 \geqslant v_1 t_1, \tag{6}$$

adică mobilul al doilea pornește înainte ca primul să ajungă în B și este ajuns din urmă de primul, fie:

$$v_1 < v_2 \qquad d_1 \leqslant v_1 t_1 \tag{6'}$$

cînd mobilul al doilea pornește după ce primul a trecut prin B și-l ajunge din urmă.

Primul mobil întîlnește pe al treilea dacă:

$$v_1 t = -v_3 (t - t_2) + d_2$$

adică pentru:

$$t = \frac{d_2 + v_3 t_2}{v_1 + v_3} \qquad x = v_1 t = \frac{v_1 d_2 + v_1 v_3 t_2}{v_1 + v_3} \tag{7}$$

unde $t \geqslant t_2$, deci întîlnirea efectivă are loc numai pentru:

$$d_2 \geqslant v_1 t_2 \tag{8}$$

adică dacă mobilul al treilea pornește înainte ca primul să ajungă în C.

Analog întîlnirea dintre mobilul al doilea și al treilea are loc pentru:

$$t = \frac{d_2 - d_1 + v_3 t_2 + v_2 t_1}{v_2 + v_3} \geqslant t_2$$

$$x = v_2 (t - t_1) + d_1 = \frac{v_2 (d_2 - d_1) + v_2 v_3 (t_2 - t_1)}{v_2 + v_3} + d_1 \tag{9}$$

Scanned with OKEN Scanner

întîlnirea avînd loc efectiv numai pentru:

$$(d_2 - d_1) > v_2(t_2 - t_1) \tag{10}$$

adică atunci cînd mobilul al treilea pornește înainte ca al doilea să ajungă în C.

Cele trei mobile se întîlnesc simultan dacă două dintre valorile lui t date de relațiile (4), (7) și (9) sînt egale, adică, de exemplu:

$$\frac{d_1 - v_2 t_1}{v_1 - v_2} = \frac{d_2 + v_3 t_2}{v_1 + v_3} \tag{11}$$

în care caz și a treia valoare a lui t este egală cu primele două.

În cazul aplicației numerice, inegalitățile (6′) și (10) nu sînt îndeplinite căci $v_2 > v_1$ și $d_1 > v_1 t_1$ iar $d_2 - d_1 < v_2 (t_2 - t_1)$ deci mobilul al doilea nu se întîlnește cu celelalte două mobile. Mobilele întîi și al treilea se întîlnesc căci $d_2 \geqslant v_1 t_2$. Înlocuind în relațiile (7) rezultă timpul după care se întîlnesc:

$$t = \frac{1\,000 + 15 \times 45}{10 + 15} = 67 \text{ s}$$

și abscisa punctului de întîlnire:

$$x = 10 \times 67 = 670 \text{ m}.$$

Se poate da și o soluție grafică problemei. Reprezentînd pe aceeași diagramă legile de mișcare $x = x(t)$ ale celor trei mobile (fig. 13.4 *b*), punctele de intersecție A_1, A_2, A_3 definesc locul și timpul de întîlnire al celor trei mobile. Ca cele trei mobile să se întîlnească simultan trebuie ca punctele A_1, A_2 și A_3 să fie confundate adică dreptele $x = x(t)$ ce reprezintă legile de mișcare ale mobilelor să fie concurente. Analitic această condiție este ca sistemul de trei ecuații (1), (2) și (3) cu două necunoscute (x, t) să fie compatibil. Se obține ca soluție tot condiția (11).

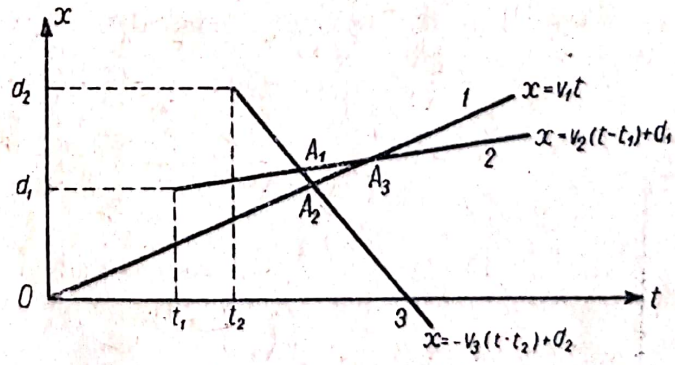


Fig. 13.4 *b*

13.5. Două mobile se mișcă în linie dreaptă unul spre celălalt. Primul pleacă din punctul A avînd o mișcare uniformă cu viteza $v_1 = 12$ m/s; al doilea pleacă din punctul B după $t_1 = 5$ s de la plecarea primului și are o mișcare uniform accelerată cu viteza inițială $v_0 = 10$ m/s și accelerația $a = 2$ m/s^2. Cunoscînd distanța $AB = d = 300$ m, să se determine locul și timpul de întîlnire al mobilelor.

Rezolvare. Vom alege axa Ox ca în figura 13.5 cu originea în punctul A și vom considera drept moment inițial momentul plecării mobilului al doilea.

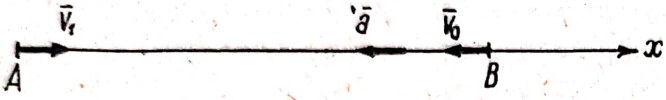
Pentru primul mobil avem viteza $\dot{x} = v_1$ și condiția inițială $t = -t_1$, $x = 0$, deci legea de mișcare este:

$$x = v_1 (t + t_1) \qquad (t \geqslant -t_1) \tag{1}$$

iar pentru al doilea mobil avem accelerația $\ddot{x} = -a$ și condițiile inițiale $t = 0$, $\dot{x} = -v_0$, $x = d$, deci prin integrare obținem legea de mișcare:

$$x = -\frac{at^2}{2} - v_0 t + d. \qquad (t \geqslant 0) \tag{2}$$

Mobilele se întîlnesc cînd au aceeași abscisă adică pentru:



$$v_1 (t + t_1) = -\frac{at^2}{2} - v_0 t + d.$$

Fig. 13.5

Făcînd înlocuirile numerice obținem ecuația:

$$t^2 + 22t - 240 = 0$$

de unde:

$$t = -30 \text{ s} \qquad t = 8 \text{ s}.$$

Prima soluție nu are sens căci mobilele nu se pot întîlni decît pentru $t \geqslant 0$ cînd mobilul al doilea a pornit. Înlocuind valoarea $t = 8$ s în ecuația (1) sau (2) obținem abscisa locului de întîlnire:

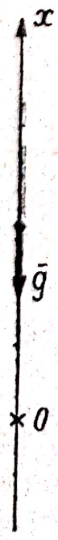
$$x = 156 \text{ m}.$$

13.6. Două corpuri sînt aruncate pe verticală din același punct 0, primul cu viteza v_0, al doilea după un interval de timp t_1 cu viteza v_1. Să se determine locul și momentul de întîlnire al corpurilor.

Rezolvare. Considerînd axa Ox, ca în figura 13.6, ambele corpuri au aceeași accelerație:

$$\ddot{x} = -g$$

deci:



$$\dot{x} = -gt + C_1 \qquad x = \frac{-gt^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Pentru primul corp condițiile inițiale sînt $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = v_0$, deci legea de mișcare și viteza sînt:

$$x = \frac{-gt^2}{2} + v_0 t \qquad \dot{x} = -gt + v_0. \tag{1}$$

Pentru corpul al doilea cu ajutorul condițiilor inițiale $t = t_1$, $x = 0$, $\dot{x} = v_1$, determinăm constantele de integrare $C_1 = v_1 + gt_1$, $C_2 = -v_1 t_1 - \frac{gt_1^2}{2}$ deci:

$$x = -\frac{g(t - t_1)^2}{2} + v_1 (t - t_1) \qquad \dot{x} = -g(t - t_1) + v_1. \tag{2}$$

Fig. 13.6

Scanned with OKEN Scanner

Mobilele se întîlnesc cînd au aceeași abscisă adică pentru:

$$-\frac{gt^2}{2}+v_0t=-\frac{g(t-t_1)^2}{2}+v_1(t-t_1).$$

Obținem momentul de întîlnire:

$$t_2=\frac{\frac{gt_1^2}{2}+v_1t_1}{gt_1+v_1-v_0} \tag{3}$$

iar abscisa punctului de întîlnire al mobilelor este:

$$x_2=-\frac{gt_2^2}{2}+v_0t_2\,.$$

Ca corpurile să se întîlnească efectiv trebuie ca $t_2\geqslant t_1$ adică după ce corpul al doilea a fost lansat. Înlocuind în (3) obținem:

$$\frac{\frac{gt_1^2}{2}+v_1t_1}{gt_1+v_1-v_0}\geqslant t_1$$

deci fie:

$$gt_1+v_1-v_0>0 \qquad \text{și} \qquad v_0\geqslant\frac{gt_1}{2} \tag{4}$$

fie:

$$gt_1+v_1-v_0<0 \qquad \text{și} \qquad v_0\leqslant\frac{gt_1}{2}\,. \tag{5}$$

În primul caz (4), cum $v_0\geqslant\frac{gt_1}{2}>0$, primul corp este lansat în sus. Din $t_1\leqslant\frac{2v_0}{g}$ rezultă că corpul al doilea este lansat înainte ca primul să revină în 0*. În sfîrșit din condiția $v_1>v_0-gt_1=\dot{x}(t_1)$ [v. (1)] pentru $t_1\leqslant\frac{v_0}{g}$ (mișcare ascendentă a primului corp) $v_1>v_0-gt_1>0$ corpul al doilea este lansat în sus cu o viteză mai mare decît viteza $\dot{x}(t_1)$ a primului corp din acel moment, iar pentru $t_1>\frac{v_0}{g}$ (mișcare descendentă a primului corp) fie $v_1\geqslant 0$, adică corpul al doilea este lansat în sus, fie $v_1<0$ dar $|v_1|<|v_0-gt_1|=|\dot{x}(t_1)|$, adică corpul al doilea este aruncat în jos cu o viteză mai mică (în valoarea absolută) decît viteza $|\dot{x}(t_1)|$ a primului corp, din momentul t_1.

În cazul al doilea (5), dacă corpul întîi este lansat în sus ($v_0>0$), corpul al doilea este lansat după ce primul a trecut din nou în O;

* Din formulele (1) rezultă că pentru $v_0>0$ primul corp are o mișcare ascendentă ($\dot{x}>0$) pentru $t<\frac{v_0}{g}$ și descendentă ($\dot{x}<0$) pentru $t>\frac{v_0}{g}$. Ele revin în punctul 0 ($x=0$) pentru $t=\frac{2v_0}{g}$.

deoarece din $t_1 > \frac{2v_0}{g}$ rezultă $x < 0$. Pentru orice valoare a lui v_0 avem $v_1 < v_0 - gt_1 < 0$ deci $|v_1| > |v_0 - gt_1| = |\dot{x}(t_1)|$, corpul al doilea este lansat în jos cu o viteză mai mare (în valoare absolută) decît viteza $|\dot{x}(t_1)|$ a primului corp.

În toate celelalte cazuri corpurile nu se pot întîlni.

13.7. Pe două drepte care se intersectează sub un unghi drept, pornesc simultan din punctele A respectiv B două mobile, îndreptîndu-se către intersecția O. $OA = x_0$, $OB = y_0$. Ambele au o mișcare uniform accelerată, cu accelerațiile a_1 și a_2, iar vitezele inițiale sînt nule. Să se determine timpul după care va fi minimă distanța s dintre mobile, mărimea acestei distanțe minime și pozițiile corespunzătoare ale mobilelor.

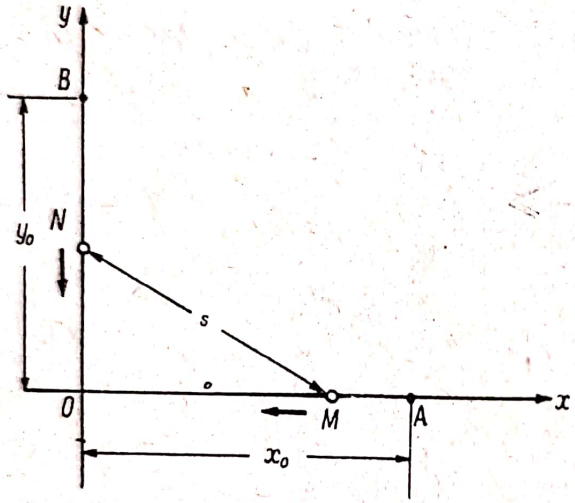


Fig. 13.7

Rezolvare. Cu notațiile din figura 13.7 accelerațiile mobilelor sînt:

$$\ddot{x} = -a_1$$

$$\ddot{y} = -a_2 .$$

Integrînd și ținînd seama de condițiile inițiale $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = 0$, $y = y_0$, $\dot{y} = 0$ obținem:

$$x = x_0 - \frac{1}{2} a_1 t^2$$

$$y = y_0 - \frac{1}{2} a_2 t^2$$

$$s^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2)\, t^4 - (a_1 x_0 + a_2 y_0)\, t^2 + x_0^2 + y_0^2 .$$

Distanța s va fi minimă pentru $\frac{d(s^2)}{dt} = 0$. Din:

$$\frac{d(s^2)}{dt} = (a_1^2 + a_2^2)\, t^3 - 2(a_1 x_0 + a_2 y_0)\, t = 0$$

rezultă:

$$t = 0 \text{ (distanță maximă) și } t = \sqrt{\frac{2(a_1 x_0 + a_2 y_0)}{a_1^2 + a_2^2}} .$$

Pozițiile mobilelor în acel moment și mărimea distanței s sînt:

$$x = \frac{a_2(a_2 x_0 - a_1 y_0)}{a_1^2 + a_2^2} \qquad y = \frac{a_1(a_1 y_0 - a_2 x_0)}{a_1^2 + a_2^2} \qquad s = \frac{|a_1 y_0 - a_2 x_0|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} .$$

Mobilele se întîlnesc în originea O dacă accelerațiile sînt proporționale cu distanțele x_0 și y_0:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{x_0}{y_0} .$$

Scanned with OKEN Scanner

13.8. În figura 13.8 *a* se dă diagrama viteză-timp a unei mișcări rectilinii. Să se traseze diagrama mișcării și accelerației.

Rezolvare. Deoarece $v = \frac{dx}{dt}$ drumul parcurs de mobil va fi:

$$x = \int_0^t v\, dt. \qquad (1)$$

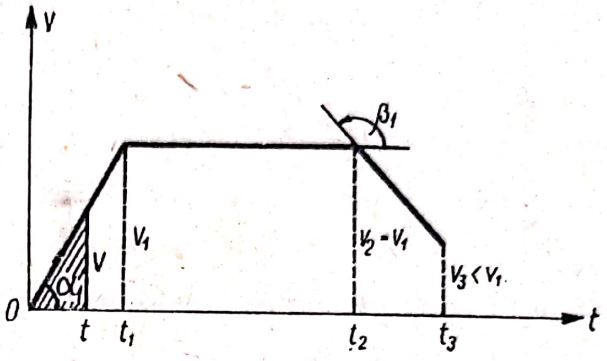


Fig. 13.8 *a*

Din diagrama 13.8 *a* avem:

$v = \frac{v_1}{t_1} t$ pentru $0 \leqslant t \leqslant t_1$

$v = v_1$ pentru $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$

$v = v_1 - \frac{v_1 - v_3}{t_3 - t_2}(t - t_2)$ pentru $t_2 \leqslant t \leqslant t_3$.

Făcînd înlocuirile în integrala (1) obținem:

$$x = \int_0^t \frac{v_1}{t_1} t\, dt = \frac{v_1}{2t_1} t^2 \qquad \text{pentru } 0 \leqslant t \leqslant t_1$$

$$x = \int_0^{t_1} \frac{v_1}{t_1} t\, dt + \int_{t_1}^t v_1\, dt = \frac{v_1 t_1}{2} + v_1(t - t_1) = v_1\left(t - \frac{t_1}{2}\right) \text{pentru } t_1 \leqslant t \leqslant t_2$$

$$x = \int_0^{t_1} \frac{v_1}{t_1} t\, dt + \int_{t_1}^{t_2} v_1\, dt + \int_{t_2}^t \left[v_1 + \frac{v_3 - v_1}{t_3 - t_2}(t - t_2)\right] dt =$$

$$= v_1\left(t - \frac{t_1}{2}\right) - \frac{v_1 - v_3}{t_3 - t_2}\frac{(t - t_2)^2}{2} \quad \text{pentru } t_2 \leqslant t \leqslant t_3.$$

Cu aceste date construim diagrama mișcării $x(t)$ din figura 13.8 *b* în care am notat:

$$\operatorname{tg}\alpha = v_1 = v_2, \qquad \operatorname{tg}\beta = v_3, \qquad x_1 = x(t_1) = \frac{v_1 t_1}{2},$$

$$x_2 = x(t_2) = v_1\left(t_2 - \frac{t_1}{2}\right), \qquad x_3 = x(t_3) = v_1\left(t_3 - \frac{t_1}{2}\right) - \frac{(v_1 - v_3)(t_3 - t_2)}{2}.$$

Accelerațiile $a = \frac{dv}{dt}$ sînt:

$$a = \frac{v_1}{t_1} \qquad \text{pentru } 0 \leqslant t \leqslant t_1$$

$$a = 0 \qquad \text{pentru } t_1 \leqslant t \leqslant t_2$$

$$a = -\frac{v_3 - v_1}{t_3 - t_2} \qquad \text{pentru } t_2 \leqslant t \leqslant t_3$$

Scanned with OKEN Scanner

deci mișcarea este uniform accelerată pentru $t \leqslant t_1$, uniformă în porțiunea a doua și uniform întîrziată ($v_3 < v_1$) în ultima porțiune. Diagrama accelerațiilor este reprezentată în figura 13.8 *c*.

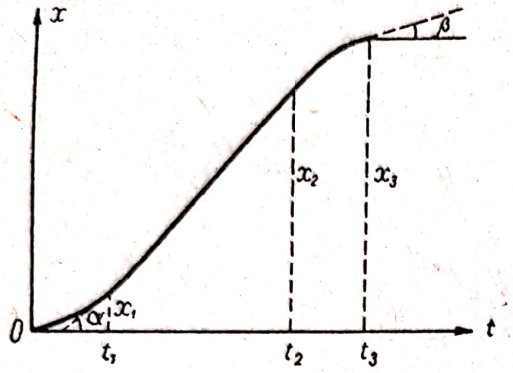


Fig. 13.8 *b*

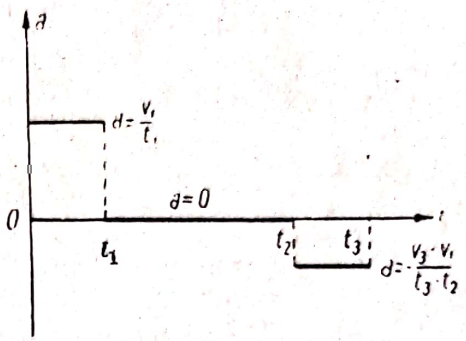


Fig. 13.8 *c*

13.9. Dreptele *1* și *2* reprezintă diagramele viteză-timp ale mișcării a două puncte mobile care pornesc simultan din același punct în același sens. Să se calculeze timpul după care se întîlnesc cele două mobile.

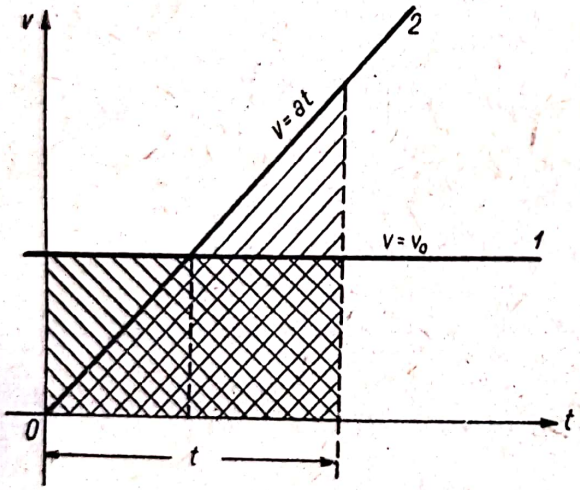


Fig. 13.9

Rezolvare. Se vede că mișcarea *1* este uniformă, cu viteza v_0, iar mișcarea *2* uniform accelerată, cu accelerația a.

Spațiul parcurs fiind:

$$x = \int_0^t v\, dt$$

el este reprezentat de aria cuprinsă între curba vitezei, axa timpurilor și ordonatele la cele două momente considerate.

Mobilele se vor întîlni cînd ariile care reprezintă abscisele lor vor fi egale adică pentru:

$$v_0 t = \frac{1}{2} t \cdot at$$

de unde:

$$t = \frac{2 v_0}{a}.$$

13.10. Un mobil descrie o dreaptă după legea $x = C_1 t^3 + C_2 t + C_3$, condițiile inițiale ale problemei fiind $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = 0$. Cunoscînd accelerația $\ddot{x} = a_1$ pentru $t = t_1$ se cer legile de variație ale abscisei x, vitezei $\dot{x}$ și accelerației $\ddot{x}$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Cum:

$$x = C_1 t^3 + C_2 t + C_3 \qquad \dot{x} = 3 C_1 t^2 + C_2 \qquad \ddot{x} = 6 C_1 t$$

punînd condițiile inițiale determinăm constantele:

$$C_3 = x_0 \qquad C_2 = 0.$$

Folosind condiția pentru accelerația din momentul $t = t_1$ rezultă:

$$C_1 = \frac{a_1}{6 t_1}$$

deci:

$$x = \frac{a_1}{6 t_1} t^3 + x_0$$

$$\dot{x} = \frac{a_1}{2 t_1} t^2$$

$$\ddot{x} = \frac{a_1 t}{t_1}.$$

Observație. Nu se putea pune o condiție pentru accelerația din momentul inițial căci pentru $t = 0$, $\ddot{x} = 0$. În momentul inițial deci atît viteza cît și accelerația erau nule, deci conform principiului acțiunii, asupra punctului nu acționa nici o forță. Însă în baza principiului inerției punctul rămîne în repaus în poziția inițială. Mișcarea din această problemă nu este deci realizabilă.

13.11. Un mobil descrie o dreaptă după legea $s = C_1 v^4 + C_2$ unde $v = \dot{s}$ este viteza mobilului. În momentul inițial $t = 0$, $s = 0$, $v = v_0$, $a = a_0$. Să se studieze mișcarea mobilului. După cît timp viteza mobilului va fi $v = 2v_0$ și care este spațiul s parcurs de mobil?

Rezolvare. Derivînd ecuația:

$$s = C_1 v^4 + C_2 \tag{1}$$

în raport cu timpul obținem:

$$v = 4 C_1 v^3 \frac{dv}{dt}$$

de unde accelerația:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{4 C_1 v^3}. \tag{2}$$

Ținînd seama de condițiile inițiale avem: $0 = C_1 v_0^4 + C_2$ și $a_0 = \frac{1}{4 C_1 v_0^3}$ deci:

$$C_1 = \frac{1}{4 a_0 v_0^3} \qquad C_2 = -\frac{v_0^3}{4 a_0}$$

Scanned with OKEN Scanner

deci:

$$s = \frac{v^4 - v_0^4}{4\, a_0\, v_0^2} \tag{1'}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a_0\, v_0^2}{v^2}\,. \tag{2'}$$

Ecuația (2') este o ecuație diferențială de ordinul întîi care se poate integra prin separarea variabilelor v și t. Rezultă:

$$\frac{v^3}{3} = a_0\, v_0^2\, t + C\,,$$

iar din condiția inițială $t = 0$, $v = v_0$ avem $C = \frac{v_0^3}{3}$ deci:

$$v = [3\, a_0\, v_0^2\, t + v_0^3]^{\frac{1}{3}} \tag{3}$$

iar legea de mișcare a mobilului este:

$$s = \frac{[3\, a_0\, v_0^2\, t + v_0^3]^{4/3} - v_0^4}{4\, a_0\, v_0^2}\,. \tag{4}$$

Înlocuind în ecuația (3) viteza $v = 2\, v_0$ obținem timpul:

$$t = \frac{7\, v_0}{3\, a_0}$$

în care se dublează viteza și substituind pe t în ecuația (4) sau pe v în (1') obținem spațiul:

$$s = \frac{15\, v_0^2}{4\, a_0}$$

parcurs de mobil.

13.12. Un mobil pornind cu viteza inițială v_0 se mișcă pe o dreaptă întîmpinînd rezistența mediului, direct proporțională cu viteza. Știind că accelerația mobilului este:

$$\bar{a} = -\lambda \bar{v} \qquad (\lambda > 0) \tag{1}$$

să se studieze mișcarea și să se traseze diagrama mișcării și a vitezei.

Rezolvare. Proiectînd ecuația (1) pe axa Ox pe care are loc mișcarea, obținem ecuația diferențială de mișcare:

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} = 0 \tag{2}$$

ecuație diferențială liniară și omogenă, cu coeficienți constanți, a cărei ecuație caracteristică este $r^2 + \lambda r = 0$. Rădăcinile ecuației caracteristice fiind $r_1 = 0$, $r_2 = -\lambda$ integrala generală a ecuației (2) este:

$$x = C_1 + C_2\, e^{-\lambda t}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar:

$$\dot{x} = -\lambda C_2 e^{-\lambda t}.$$

Condiţiile iniţiale $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = v_0$ determină constantele:

$$C_1 = -C_2 = \frac{v_0}{\lambda}.$$

Ecuaţia mişcării este:

$$x = \frac{v_0}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) \tag{3}$$

iar viteza este:

$$\dot{x} = v_0 e^{-\lambda t}. \tag{4}$$

Viteza mobilului scade dar nu se anulează pentru nicio valoare finită a timpului t, iar $\lim_{t \to \infty} \dot{x} = 0$. Drumul parcurs pînă la oprire este:

$$\lim_{t \to \infty} x = \frac{v_0}{\lambda}.$$

În figurile 13.12 *a* şi 13.12 *b* sînt reprezentate diagramele $x = x(t)$ şi $\dot{x} = \dot{x}(t)$. Se vede că x tinde asimtotic către valoarea $\frac{v_0}{\lambda}$, iar viteza $\dot{x}$ către valoarea 0.

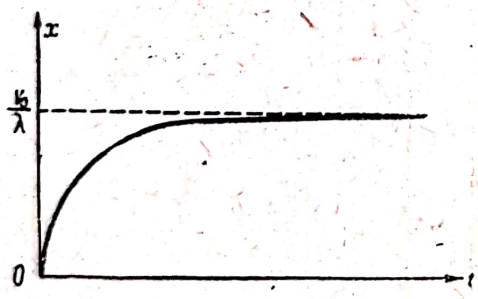


Fig. 13.12 *a*

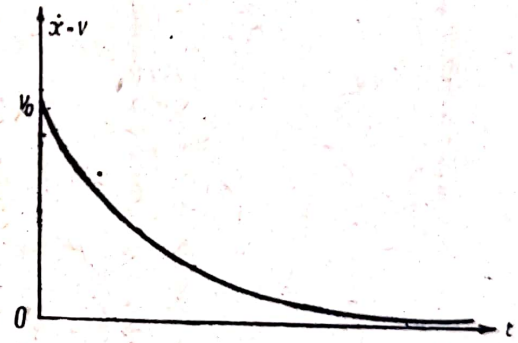


Fig. 13.12 *b*

13.13. Un mobil se mişcă pe o dreaptă Ox, acceleraţia lui fiind:

$$\ddot{x} = -\nu^2 x$$

unde x este abscisa mobilului, iar ν o constantă pozitivă. Cunoscînd condiţiile iniţiale $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = v_0$ să se studieze mişcarea mobilului şi să se reprezinte $x = x(t)$.

Rezolvare. Ecuaţia de mişcare a mobilului:

$$\ddot{x} + \nu^2 x = 0$$

este o ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă cu coeficienţii constanţi. Rădăcinile ecuaţiei caracteristice:

$$r^2 + \nu^2 = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

sînt $r_1 = \nu i$, $r_2 = -\nu i$, deci integrala generală a ecuației (1) se poate pune sub forma:

$$x = C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t$$

iar

$$\dot{x} = -\nu C_1 \sin \nu t + \nu C_2 \cos \nu t.$$

Din condițiile inițiale determinăm constantele:

$$C_1 = x_0 \qquad C_2 = \frac{v_0}{\nu}$$

deci ecuația mișcării este:

$$x = x_0 \cos \nu t + \frac{v_0}{\nu} \sin \nu t \tag{2}$$

iar viteza este:

$$\dot{x} = -\nu x_0 \sin \nu t + v_0 \cos \nu t. \tag{3}$$

Pentru a putea face mai ușor un studiu calitativ al mișcării punem ecuația (2) sub forma:

$$x = A \cos (\nu t - \varphi). \tag{2'}$$

Comparînd ecuațiile (2) și (2') avem:

$$x_0 \cos \nu t + \frac{v_0}{\nu} \sin \nu t = A \cos\varphi \cos \nu t + A \sin \varphi \sin \nu t$$

$$x_0 = A \cos \varphi \qquad \frac{v_0}{\nu} = A \sin \varphi$$

deci:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\nu}\right)^2} \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_0}{\nu x_0}. \tag{4}$$

Viteza va fi:

$$\dot{x} = -\nu A \sin (\nu t - \varphi). \tag{3'}$$

Din ecuația (2') rezultă că mișcarea este o mișcare oscilatorie armonică, mișcare care se studiază în cadrul cursului de Mecanică. A este amplitudinea mișcării, $-\varphi$ faza la momentul inițial, ν pulsația. Perioada oscilațiilor adică timpul T în care punctul revine în aceeași poziție, cu aceeași viteză [$x(t) = x(t + T)$ și $\dot{x}(t) = \dot{x}(t + T)$], este:

$$T = \frac{2\pi}{\nu} \tag{5}$$

iar frecvența, adică numărul de perioade pe secundă, este:

$$N = \frac{1}{T} = \frac{\nu}{2\pi}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În figura **13.13** este reprezentată diagrama $x = x(t)$. Pentru $t = 0$ $x = A\cos\varphi = x_0$; x este maxim $(x = A)$ pentru $t = \frac{\varphi}{\nu}$, $t = \frac{\varphi}{\nu} + T, \ldots,$ $t = \frac{\varphi}{\nu} + nT$ și este minim $(x = -A)$ pentru $t = \frac{\varphi}{\nu} + \frac{T}{2} + nT$. În sfîrșit $x = 0$ pentru $t = \frac{\varphi}{\nu} + (2n-1)\frac{T}{4}$.

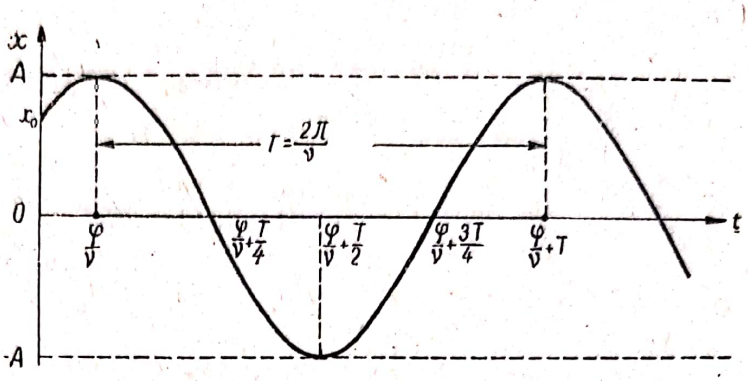


Fig. 13.13

Diagrama este o sinusoidă, evident ea nu reprezintă traiectoria care este segmentul de dreaptă $-A \leqslant x \leqslant A$.

13.14. Două puncte se mișcă pe dreptele paralele *I* și *II* cu vitezele v_1 și v_2 iar un al treilea punct se mișcă pe o a treia paralelă, cele trei puncte fiind coliniare. Cunoscînd raportul distanțelor dintre drepte $\lambda = \frac{d_2}{d_1}$ (fig. 13.14), să se determine viteza v a punctului al treilea. Caz particular dreapta *III* este mediana celorlalte două drepte.

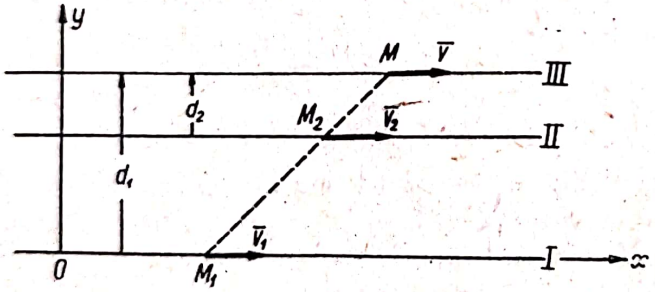


Fig. 13.14

Rezolvare. Punctele $M(x, d_1)$, $M_1(x_1, 0)$, $M_2(x_2, d_1 - d_2)$ fiind coliniare, coordonatele lor satisfac ecuația:

$$\begin{vmatrix} x & d_1 & 1 \\ x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & d_1 - d_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

de unde:

$$x = \frac{x_2 d_1 - x_1 d_2}{d_1 - d_2} = \frac{x_2 - \lambda x_1}{1 - \lambda}. \qquad (2)$$

Derivînd relația (2) în raport cu timpul, cum $\dot{x} = v$, $\dot{x}_1 = v_1$ și $\dot{x}_2 = v_2$ obținem viteza căutată:

$$v = \frac{v_2 - \lambda v_1}{1 - \lambda}. \qquad (3)$$

Derivînd încă o dată obținem accelerația punctului al treilea:

$$a = \frac{a_2 - \lambda a_1}{1 - \lambda} \qquad (4)$$

unde a_1 și a_2 sînt accelerațiile celorlalte două puncte.

În cazul particular considerat $d_1 = -d_2$, $\lambda = -1$, deci:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} \qquad a = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

adică viteza punctului M este media aritmetică a vitezelor punctelor M_1 și M_2.

13.15. Un om de înălțime h trece cu viteza v_1 sub o lampă situată la înălțimea H. Să se determine viteza v a extremității M a umbrei omului pe pământ.

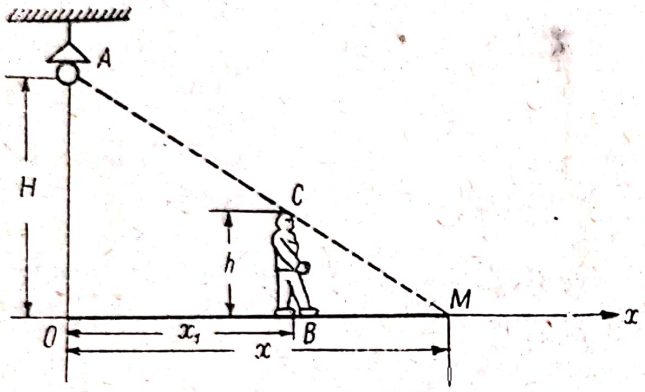


Fig. 13.15

Rezolvare. Din asemănarea triunghiurilor OAM și BCM avem:

$$\frac{H}{x} = \frac{h}{x - x_1} \qquad (1)$$

unde x și x_1 sînt abscisele umbrei M și omului.

Din (1) avem:

$$x = \frac{H}{H - h} x_1 \qquad (2)$$

și prin derivare în raport cu timpul, cum $\dot{x} = v$ și $\dot{x}_1 = v_1$ obținem viteza căutată:

$$v = \frac{H}{H - h} v_1 . \qquad (3)$$

Cele două viteze sînt proporționale, dacă omul își mărește viteza și viteza umbrei se mărește. Derivînd relația (3) obținem legătura dintre accelerațiile a_1 și a ale punctului M și omului:

$$a = \frac{H}{H - h} a_1 .$$

13.16. Un fir MOM_1 de lungime l este fixat de culisele M și M_1 care se pot mișca pe verticală și este petrecut prin inelul O (fig. 13.16). Cunoscînd distanța d, viteza v_1 și accelerația a_1 a culisei M_1, să se determine viteza și accelerația culisei M, în funcție de poziția culisei M_1.

Rezolvare. Notînd cu x și x_1 abscisele culiselor:

$$x = l - \sqrt{x_1^2 + d^2}. \qquad (1)$$

Derivînd această egalitate în raport cu timpul determinăm viteza v a culisei:

$$v = \dot{x} = -\frac{x_1 \dot{x}_1}{\sqrt{x_1^2 + d^2}} = -\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + d^2}} v_1 . \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Accelerația culisei M este:

$$a = \ddot{x} = \frac{-\dot{x}_1^2 d^2 - (x_1^2 + d^2) x_1 \ddot{x}_1}{(x_1^2 + d^2)^{3/2}} = -\frac{v_1^2 d^2 + x_1 (x_1^2 + d^2) a_1}{(x^2 + d^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

Dacă $x_1 > 0$ și $v_1 > 0$ (culisa M_1 coboară) atunci culisa M se ridică căci $v < 0$.

Cum $\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + d^2}} = \sin \alpha$, expresia vitezei v este:

$$v = -v_1 \sin \alpha ,$$

rezultat la care puteam ajunge folosind proprietatea demonstrată în problema 14.15.

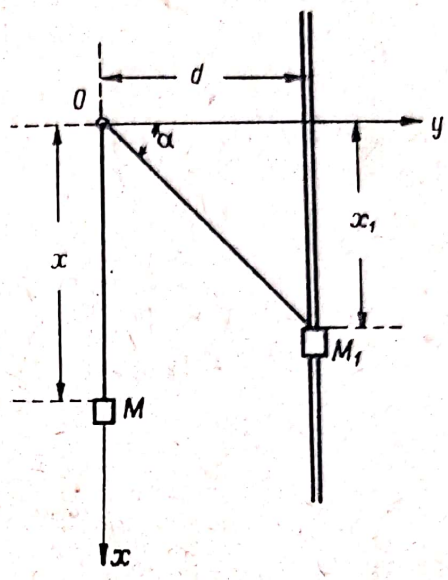


Fig. 13.16

13.17. Un cerc de rază r se rotește uniform în jurul unui punct O situat pe circumferința lui, astfel încît $\theta = \omega t$ (fig. 13.17). Să se studieze mișcarea punctului M intersecția cercului cu dreapta Ox.

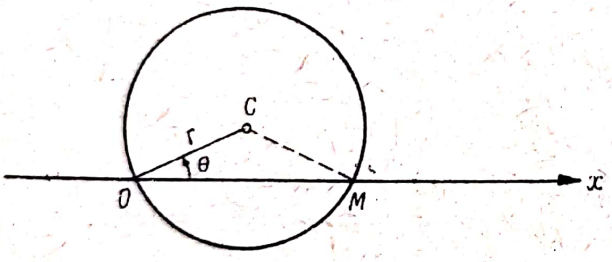


Fig. 13.17

Rezolvare. Triunghiul OMC fiind isoscel, $\widehat{OMC} = \theta$ de unde abscisa punctului M este:

$$x = 2r \cos \theta = 2r \cos \omega t. \quad (1)$$

Viteza punctului M este:

$$\dot{x} = -2r\omega \sin \omega t \quad (2)$$

iar accelerația lui este:

$$\ddot{x} = -2r\omega^2 \cos \omega t. \quad (3)$$

Din ecuația (1) rezultă că punctul M execută o mișcare oscilatorie armonică pe dreapta OM de amplitudine $2r$ și pulsație ω (v. problema 13.13 sau Cursul de Mecanică pentru fără frecvență).

13.18. Un om aleargă uniform cu viteza v_1 și trage cu o frînghie o căruță. Cunoscînd diferența de nivel h dintre extremitățile M și M_1 ale frînghiei, să se determine viteza și accelerația căruței.

Rezolvare. Notînd cu x și x_1 abscisele punctelor M și M_1 avem:

$$x = -|x| = -(l - \sqrt{x_1^2 + h^2}) \quad (1)$$

unde l este lungimea frînghiei.

Scanned with OKEN Scanner

Derivînd relaţia (1) în raport cu timpul şi ţinînd seama că $\dot{x}_1 = v_1$, obţinem viteza căruţei:

$$v = \dot{x} = \frac{x_1 v_1}{\sqrt{x_1^2 + h^2}} = v_1 \sin \alpha \qquad (2)$$

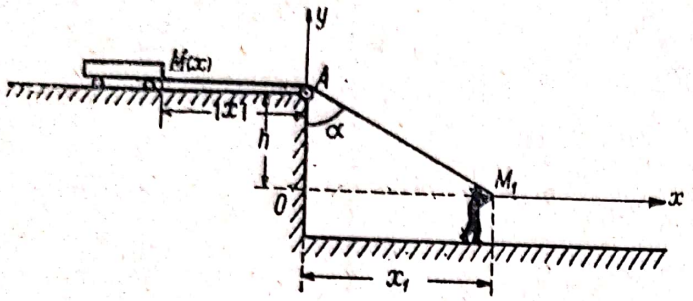


Fig. 13.18

deoarece $\sin \alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + h^2}}$ (fig. 13.18). Acest rezultat se putea obţine şi direct folosind proprietatea demonstrată în problema 14.15.

Derivînd relaţia (2) în raport cu timpul şi ţinînd seama că $\dot{v}_1 = 0$, obţinem acceleraţia:

$$a = \ddot{x} = \frac{h^2 v_1^2}{(x_1^2 + h^2)^{3/2}} \qquad (3)$$

13.19. Culisa M este pusă în mişcare printr-un fir MBA care se înfăşoară pe o roată de rază r care se roteşte cu viteza unghiulară ω adică $\theta = \omega t$. Să se determine viteza culisei M în funcţie de poziţia sa.

Rezolvare. Notînd cu x abscisa culisei, lungimea firului este:

$$l = r\omega t + r\alpha + \sqrt{x^2 - r^2} \qquad (1)$$

unde:

$$\alpha = \arcsin \frac{r}{x}.$$

Derivînd relaţia (1) în raport cu timpul vom obţine:

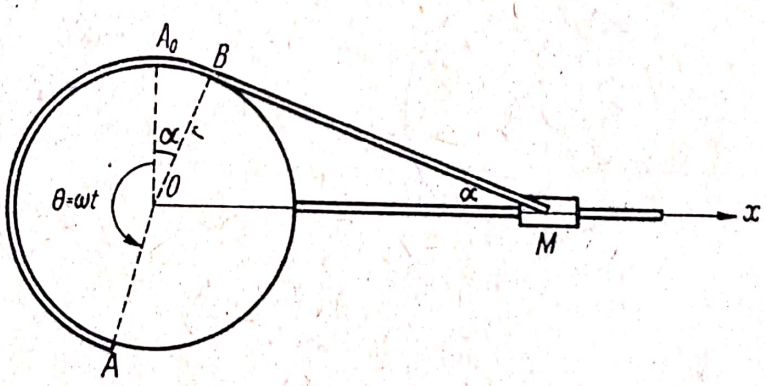


Fig. 13.19

$$r\omega + r \frac{\left(-\frac{r\dot{x}}{x^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{x^2}}} + \frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2 - r^2}} = 0 \qquad (2)$$

de unde viteza $\dot{x}$ a culisei este:

$$\dot{x} = -\frac{r\omega x}{\sqrt{x^2 - r^2}} = -\frac{r\omega}{\cos \alpha}. \qquad (3)$$

Viteza fiind negativă, culisa se mişcă în sens contrar axei Ox.

Scanned with OKEN Scanner

13.20. Manivela OA se rotește uniform în jurul unui punct fix O cu viteza unghiulară ω, adică $\theta = \omega t$. Prin intermediul bielei $AM = b$ ea pune în mișcare o culisă M care se mișcă pe dreapta Ox. Să se determine viteza și accelerația culisei. Care sînt expresiile aproximative ale vitezei și accelerației dacă raportul $\frac{r}{b}$ este mic?

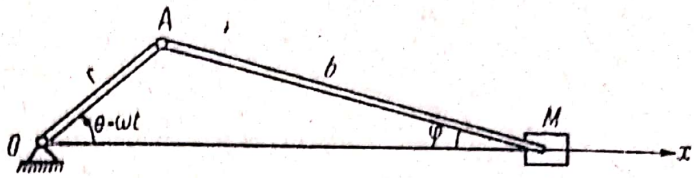


Fig. 13.20

Rezolvare. Abscisa punctului M este:

$$x = r\cos\theta + b\cos\varphi$$

unde $\theta = \omega t$, iar din teorema sinusurilor aplicată în triunghiul OAM:

$$\frac{r}{\sin\varphi} = \frac{b}{\sin\omega t}$$

deci:

$$x = r\cos\omega t + b\sqrt{1 - \frac{r^2}{b^2}\sin^2\omega t}. \tag{1}$$

Viteza culisei este:

$$\dot{x} = -r\omega\sin\omega t - \frac{r^2\omega}{2b}\cdot\frac{\sin 2\omega t}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{b^2}\sin^2\omega t}} \tag{2}$$

iar accelerația este:

$$\ddot{x} = -r\omega^2\cos\omega t - \frac{r^2\omega^2}{b}\cdot\frac{\cos 2\omega t}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{b^2}\sin^2\omega t}} - \frac{r^4\omega^2\sin^2 2\omega t}{4b^3\left(1 - \frac{r^2}{b^2}\sin^2\omega t\right)^{3/2}}. \tag{3}$$

Dacă raportul $\frac{r}{b}$ este mic, dezvoltînd în serie funcțiile $\left(1 - \frac{r^2}{b^2}\sin^2\omega t\right)^{1/2}$, $\left(1 - \frac{r^2}{b^2}\sin^2\omega t\right)^{-1/2}$ și $\left(1 - \frac{r^2}{b^2}\sin^2\omega t\right)^{-3/2}$, cum $\frac{r^2}{b^2}\sin^2\omega t < 1$ obținem:

$$\left(1 - \frac{r^2}{b^2}\sin^2\omega t\right)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{b^2}\sin^2\omega t - \frac{1}{8}\frac{r^4}{b^4}\sin^4\omega t + \ldots$$

$$\left(1 - \frac{r^2}{b^2}\sin^2\omega t\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{r^2}{b^2}\sin^2\omega t + \frac{3}{8}\frac{r^4}{b^4}\sin^4\omega t + \ldots$$

$$\left(1 - \frac{r^2}{b^2}\sin^2\omega t\right)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2}\frac{r^2}{b^2}\sin^2\omega t + \frac{15}{8}\frac{r^4}{b^4}\sin\omega t^4 + \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

și înlocuind în expresiile (1), (2) și (3) și păstrînd numai termenii de grad mai mic ca trei în $\frac{r}{b}$ obținem expresiile aproximative:

$$x = r\cos\omega t + \frac{r^2}{4b}\cos 2\omega t + b - \frac{r^2}{4b} \tag{1'}$$

$$\dot{x} = -r\omega\sin\omega t - \frac{r^2\omega}{2b}\sin 2\omega t \tag{2'}$$

$$\ddot{x} = -r\omega^2\cos\omega t - \frac{r^2\omega^2}{b}\cos 2\omega t. \tag{3'}$$

13.21. Diagrama viteză-timp a unei mișcări rectilinii este reprezentată de sfertul de elipsă din figura 13.21. Să se determine drumul x străbătut de mobil pînă la oprire.

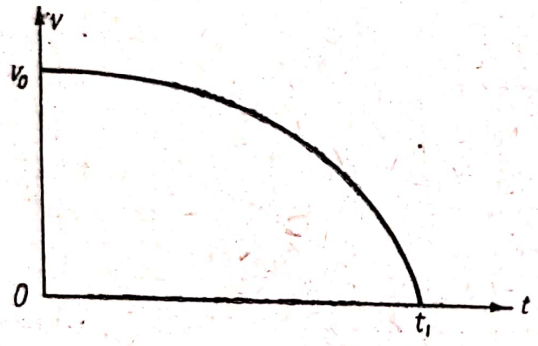


Fig. 13.21

Rezolvare. Drumul căutat este:

$$x = \int_0^{t_1} v\,dt \tag{1}$$

unde viteza v satisface relația:

$$\frac{t^2}{t_1^2} + \frac{v^2}{v_0^2} = 1. \tag{2}$$

Din (1) și (2):

$$x = \int_0^{t_1} \frac{v_0}{t_1}\sqrt{t_1^2 - t^2}\,dt = \frac{v_0}{t_1}\left[\frac{t}{2}\sqrt{t_1^2 - t^2} + \frac{t_1^2}{2}\arcsin\frac{t}{t_1}\right]_0^{t_1} = \frac{\pi v_0 t_1}{4}. \tag{3}$$

Acest rezultat se putea obține direct căci $x = \int_0^{t_1} v\,dt$ reprezintă aria sfertului de elipsă din figura 13.21, adică $x = \frac{\pi}{4} v_0 t_1$.

13.22. Legea de mișcare a unui punct este:

$$r = \frac{1}{2}\alpha t^2\vec{i} + \left(\frac{1}{2}\beta t^2 + \gamma\right)\vec{j} \tag{1}$$

unde $\alpha > 0$, β, γ sînt constante, mișcarea începînd la momentul $t = 0$. Să se studieze mișcarea punctului determinîndu-i-se traiectoria, viteza și accelerația. Să se determine hodograful vitezei.

Rezolvare. Proiecțiile (13.2) ale vectorului de poziție fiind:

$$x = \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad y = \frac{1}{2}\beta t^2 + \gamma \qquad z = 0 \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

traiectoria este plană (în planul xOy). Eliminînd timpul t între primele două ecuații (2) obținem ecuația carteziană a traiectoriei:

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x + \gamma \qquad (3)$$

care este o semidreaptă (fig. 13.22 a), căci deoarece $\alpha > 0$, $x \geqslant 0$. Viteza și accelerația punctului sînt conform (13.3), (13.4):

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \alpha t\bar{i} + \beta t\bar{j} \qquad (4)$$

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = \alpha\bar{i} + \beta\bar{j} \qquad (5)$$

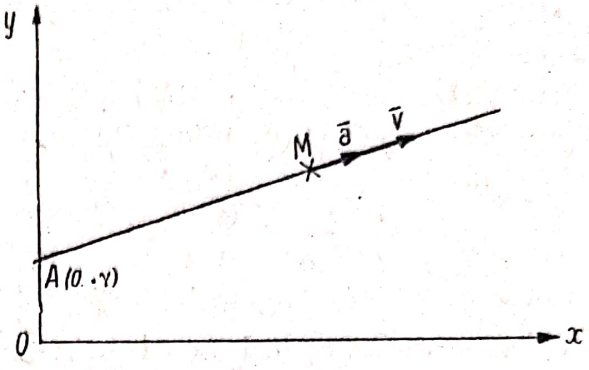


Fig. 13.22 a

avînd modulele:

$$|\bar{v}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, t \qquad |\bar{a}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,. \qquad (6)$$

Mișcarea punctului este o mișcare rectilinie, viteza și accelerația fiind coliniare $\bar{v} = \bar{a}t$ și avînd direcția dreptei. Cum accelerația este constantă $|\bar{a}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ și are același sens cu viteza ($t > 0$) mișcarea este uniform accelerată. Punctul pleacă la $t = 0$ din punctul A de coordonate $x = 0$, $y = \gamma$ din repaus căci $\bar{v}(0) = 0$. Sensul vitezei și accelerației sînt reprezentate în figura 13.22 a, accelerația și viteza avînd proiecțiile $\dot{x} = \alpha t$, $\ddot{x} = \alpha$ pe axa Ox pozitive.

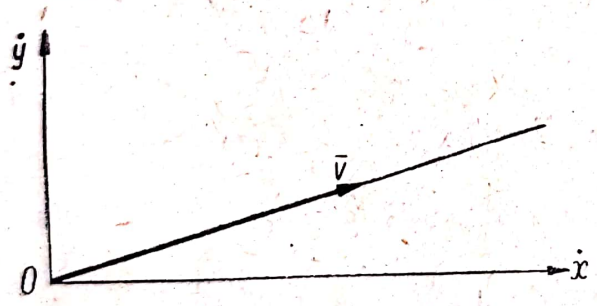


Fig. 13.22 b

Hodograful vitezei este curba descrisă de extremitatea vectorului viteză. Cum:

$$\dot{x} = \alpha t \qquad \dot{y} = \beta t \qquad (t \geqslant 0)$$

ea este semidreapta:

$$\dot{y} = \frac{\beta}{\alpha}\dot{x} \qquad (\dot{x} \geqslant 0) \qquad (7)$$

din figura 13.22 b.

13.23. Legea de mișcare a unui punct este:

$$\bar{r} = a\cos\omega t\bar{i} + b\sin\omega t\bar{j} \qquad (1)$$

unde a, b, ω sînt constante pozitive, iar mișcarea începe la momentul $t = 0$. Să se studieze mișcarea punctului determinîndu-se traiectoria, viteza și accelerația. Să se determine hodograful vitezei.

Rezolvare. Proiecțiile (13.2) vectorului de poziție sînt:

$$x = a\cos\omega t \qquad y = b\sin\omega t \qquad z = 0 \qquad (2)$$

deci traiectoria este plană și eliminînd timpul t între primele două ecuații (2) obținem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Traiectoria este deci o elipsă de semiaxe a și b (fig. 13.23 a). Viteza (13.3) și accelerația (13.4) punctului sînt:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = -\omega a \sin \omega t\, \bar{i} + \omega b \cos \omega t\, \bar{j} \tag{4}$$

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = -\omega^2 a \cos \omega t\, \bar{i} - \omega^2 b \sin \omega t\, \bar{j}. \tag{5}$$

Viteza este tangentă la elipsă, mobilul parcurgînd în același sens elipsa căci modulul vitezei:

$$|v| = \omega \sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}$$

nu se anulează pentru nici o valoare a timpului. Sensul de parcurs este cel direct căci în momentul inițial $t = 0$ punctul se găsește în punctul A de coordonate $x = a$, $y = 0$ și are viteza $\bar{v}_0 = \omega b \cos \omega t\, \bar{j}$ (fig. 13.23 a).

Cum:

$$\dot{x} = -\omega a \sin \omega t \qquad \dot{y} = \omega b \cos \omega t$$

hodograful vitezei este elipsa:

$$\frac{\dot{x}^2}{(\omega a)^2} + \frac{\dot{y}^2}{(\omega b)^2} = 1$$

din figura 13.23 b.

Accelerația (5) se poate scrie sub forma:

$$\bar{a} = -\omega^2 \bar{r},$$

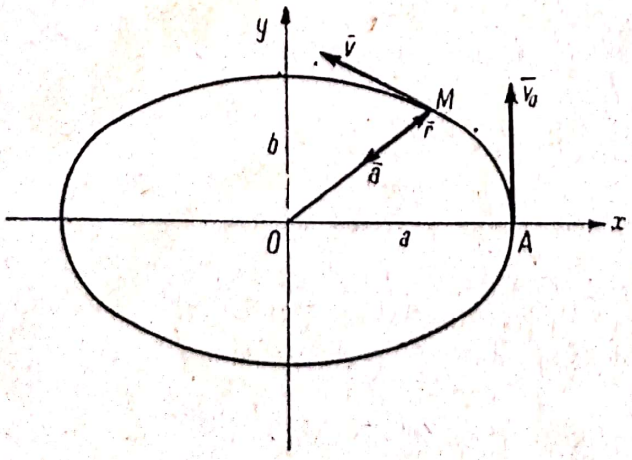


Fig. 13.23 a

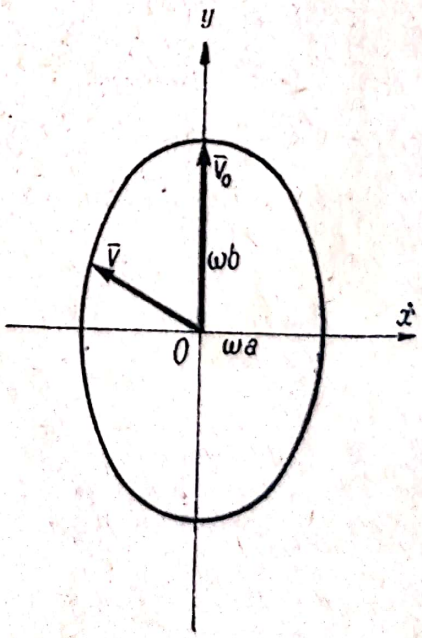


Fig. 13.23 b

Scanned with OKEN Scanner

deci suportul accelerației este vectorul $\bar{r} = \overline{OM}$, accelerația fiind dirijată spre centrul O al elipsei, în sens contrar lui $\bar{r}$. Modulul ei este proporțional cu modulul vectorului $\bar{r}$ adică cu distanța OM de la punctul M la centrul O al elipsei.

Din principiul acțiunii, forța care acționează asupra punctului în mișcare este $\bar{F} = m\bar{a} = -m\omega^2\bar{r}$ și notînd $m\omega^2 = k$, $\bar{F} = -k\bar{r}$, adică forța este o forță elastică (v. problema 1.7), forță atractivă proporțională cu distanța de la punctul M la punctul fix O.

13.24. Să se studieze mișcarea unui punct avînd accelerația constantă $\ddot{\bar{r}} = \bar{a}$. În momentul inițial $t = 0$, punctul are viteza $\bar{v}_0$ formînd unghiul α cu accelerația. Să se studieze mișcarea punctului.

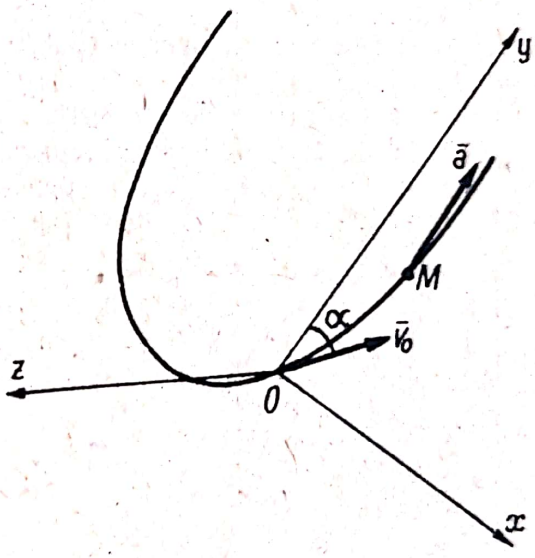


Fig. 13.24 *a*

Rezolvare. Alegînd sistemul de axe din figura 13.24 *a* cu originea în poziția inițială O, axa Oy paralelă cu vectorul $\bar{a}$, și axa Ox astfel ca $\bar{v}_0$ să fie cuprins în planul xOy proiecțiile vectorului accelerație sînt:

$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = a \qquad \ddot{z} = 0 \qquad (1)$$

Integrînd ecuațiile diferențiale (1) obținem:

$$\dot{x} = C_1 \qquad \dot{y} = at + C_2 \qquad \dot{z} = C_3 \qquad (2)$$

$$x = C_1 t + C_4 \qquad y = \frac{at^2}{2} + C_2 t + C_5 \qquad z = C_3 t + C_6 \qquad (3)$$

În momentul inițial $t = 0$ punctul se găsește în O adică $x = y = z = 0$, iar proiecțiile vitezei $\bar{v}_0$ sînt: $\dot{x} = v_0 \sin\alpha$, $\dot{y} = v_0 \cos\alpha$, $\dot{z} = 0$. Făcînd înlocuirile în ecuațiile (2) și (3) determinăm constantele $C_4 = C_5 = C_6 = 0$, $C_1 = v_0 \sin\alpha$, $C_2 = v_0 \cos\alpha$, $C_3 = 0$, deci ecuațiile parametrice ale mișcării sînt:

$$x = v_0 t \sin\alpha \qquad y = \frac{at^2}{2} + v_0 t \cos\alpha \qquad z = 0 \qquad (4)$$

iar componentele vitezei sînt:

$$\dot{x} = v_0 \sin\alpha \qquad \dot{y} = at + v_0 \cos\alpha \qquad \dot{z} = 0. \qquad (5)$$

Mișcarea este deci plană în planul xOy determinat de vectorii $\bar{a}$ și $\bar{v}_0$, traiectoria fiind parabola:

$$y = \frac{ax^2}{2v_0^2 \sin^2\alpha} + x \operatorname{ctg}\alpha \qquad (6)$$

cu axa paralelă cu Oy adică cu vectorul $\bar{a}$. În vîrful A al parabolei viteza este paralelă cu axa Ox deci:

$$\dot{y} = at + v_0 \cos \alpha = 0$$

deci $t = -\frac{v_0 \cos \alpha}{a}$ și înlocuind în ecuațiile (4), coordonatele punctului A vor fi $x = -\frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{a}$, $y = -\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2a}$. Dacă $\bar{v}_0$ și $\bar{a}$ sînt coliniari, $\alpha = 0$ sau $\alpha = \pi$, $x = 0$ iar:

$$y = \frac{at^2}{2} \pm v_0 t \ ,$$

adică punctul are o mișcare rectilinie uniform variată (cu accelerația $\ddot{y} = a$ constantă).

Cazul examinat în această problemă este întîlnit la mișcarea unui punct greu în vid, accelerația punctului fiind constantă, egală cu accelerația gravitației $\bar{g}$ și îndreptată pe verticală în jos:

$$\ddot{\bar{r}} = \bar{g}.$$

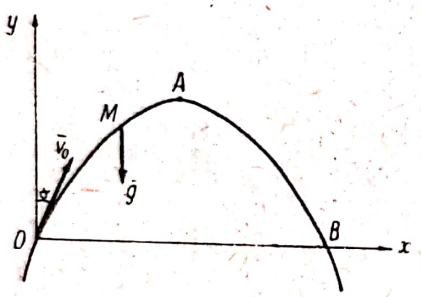


Fig. 13.24 *b*

Alegînd sistemul de axe din figura 13.24 *b* cu axa Oy verticală în sus înlocuim accelerația a prin $-g$ căci $\ddot{y} = a = -g$ toate rezultatele stabilite mai sus sînt valabile. Astfel traiectoria va fi parabola:

$$y = -\frac{g x^2}{2v_0^2 \sin^2 \alpha} + x \operatorname{ctg} \alpha \qquad (7)$$

iar coordonatele vîrfului A vor fi $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$ și $y = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2g}$ (înălțimea maximă la care ajunge punctul). Punctul ajunge pe pămînt cînd $y = 0$ deci din (7) abscisa punctului B este:

$$x_B = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

13.25. Ecuațiile parametrice de mișcare ale unui punct sînt:

$$x = \frac{1}{2} a_1 t^2 + b_1 t + c_1$$

$$y = \frac{1}{2} a_2 t^2 + b_2 t + c_2 \qquad (1)$$

$$z = \frac{1}{2} a_3 t^2 + b_3 t + c_3.$$

Să se studieze mișcarea punctului.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Componentele vitezei și accelerației punctului sînt:

$$\dot{x} = a_1 t + b_1 \qquad \dot{y} = a_2 t + b_2 \qquad \dot{z} = a_3 t + b_3 \tag{2}$$

$$\ddot{x} = a_1 \qquad \ddot{y} = a_2 \qquad \ddot{z} = a_3 \tag{3}$$

deci vectorul accelerație:

$$\bar{a} = a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j} + a_3 \bar{k} \tag{4}$$

este un vector constant. Sîntem deci în cazul examinat în problema 13.24, traiectoria mobilului fiind o curbă plană (în planul determinat de accelerația $\bar{a}$ și viteza inițială $\bar{v}_0$) și anume fie o parabolă, fie o dreaptă (mișcare rectilinie uniform variată).

Putem verifica aceste rezultate și în cazul nostru. În momentul inițial $t = 0$ viteza mobilului va fi:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 = b_1 \bar{i} + b_2 \bar{j} + b_3 \bar{k} \tag{5}$$

iar vectorul său de poziție:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 = c_1 \bar{i} + c_2 \bar{j} + c_3 \bar{k} \tag{6}$$

astfel încît ecuația vectorială de mișcare a mobilului este:

$$\bar{r} = \frac{1}{2} \bar{a} t^2 + \bar{v}_0 t + \bar{r}_0 .$$

Raportînd poziția mobilului la sistemul $O_1 x_1 y_1 z_1$ din figura 13.25 cu originea O_1 (c_1, c_2, c_3), vom avea:

$$\bar{r}_1 = \bar{r} - \bar{r}_0 = \frac{1}{2} \bar{a} t^2 + \bar{v}_0 t ,$$

deci mobilul se găsește în planul determinat de $\bar{a}$ și $\bar{v}_0$.

Alegînd axa $O_1 y_1$ pe direcția accelerației $\bar{a}$ și planul $x_1 O_1 y_1$ drept plan determinat de $\bar{a}$ și $\bar{v}_0$ avem:

$$x_1 = v_0 t \sin \alpha$$

$$y_1 = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t \cos \alpha \qquad z_1 = 0,$$

deci traiectoria este parabola:

$$y_1 = \frac{a x_1^2}{2 v_0^2 \sin^2 \alpha} + x_1 \operatorname{ctg} \alpha$$

unde:

$$\cos \alpha = \frac{\bar{a}\,\bar{v}_0}{|\bar{a}|\,|\bar{v}_0|} =$$

$$= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}} .$$

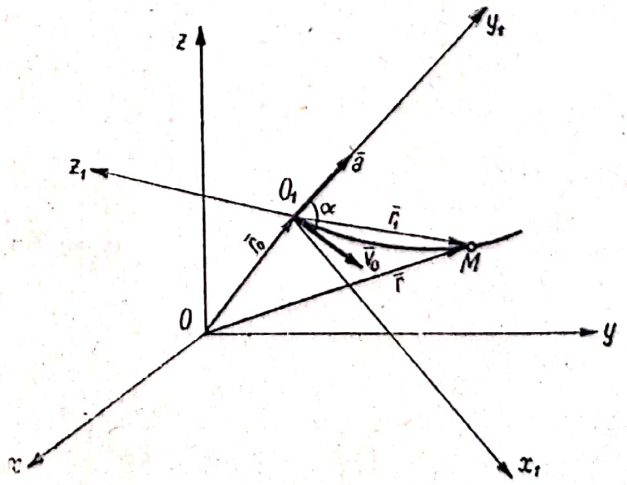


Fig. 13.25

Traiectoria este rectilinie, fie dacă $a = 0$ $(a_1 = a_2 = a_3 = 0)$:

$$y_1 = x_1 \operatorname{ctg} \alpha$$

fie cînd $x_1 = 0$, adică $v_0 = 0$ $(b_1 = b_2 = b_3 = 0)$, sau $\sin \alpha = 0$, $\alpha = 0$ sau $\alpha = \pi$, deci vectorii $\bar{a}$ și $\bar{v}_0$ sînt coliniari $\left(\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}\right)$.

13.26. Dintr-un punct O se lansează simultan trei puncte grele, primul pe verticală în sus cu viteza v_0, al doilea cu aceeași viteză v_0 făcînd unghiul $\frac{\pi}{6}$ cu orizontala, și al treilea cu viteza $\sqrt{3}\,v_0$ orizontală. Să se arate că cele trei puncte sînt în permanență coliniare.

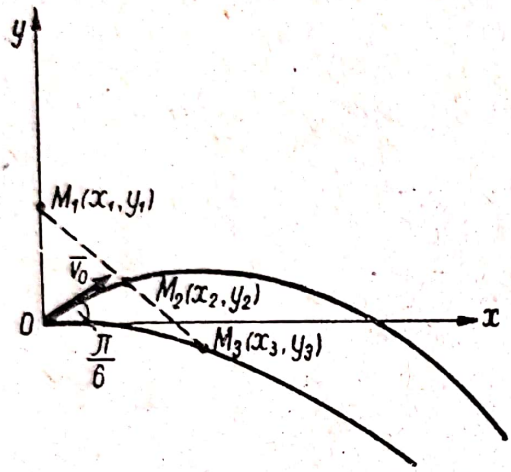


Fig. 13.26

Rezolvare. Cele trei puncte avînd aceeași accelerație $\bar{g}$, cu sistemul de axe din figura 13.26:

$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = -g$$

și prin integrare:

$$\dot{x} = C_1 \qquad \dot{y} = -gt + C_2$$

$$x = C_1 t + C_3 \qquad y = -\frac{gt^2}{2} + C_2 t + C_4.$$

Condițiile inițiale pentru primul punct fiind:

$$t = 0 \begin{cases} x = 0 & \dot{x} = 0 \\ y = 0 & \dot{y} = v_0 \end{cases}$$

obținem $C_1 = C_3 = C_4 = 0$, $C_2 = v_0$, deci:

$$x_1 = 0 \qquad y_1 = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t. \tag{1}$$

Pentru al doilea punct $t = 0 \begin{cases} x = 0 & \dot{x} = v_0 \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y = 0 & \dot{y} = \frac{v_0}{2} \end{cases}$

deci $C_3 = C_4 = 0$, $C_1 = v_0 \frac{\sqrt{3}}{2}$, $C_2 = \frac{v_0}{2}$, de unde:

$$x_2 = \frac{\sqrt{3}\,v_0 t}{2} \qquad y_2 = -\frac{gt^2}{2} + \frac{v_0 t}{2}. \tag{2}$$

Pentru mobilul al treilea $t = 0 \begin{cases} x = 0 & \dot{x} = v_0\sqrt{3} \\ y = 0 & \dot{y} = 0 \end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

deci $C_1 = v_0\sqrt{3}, C_2 = C_3 = C_4 = 0$ de unde:

$$x_3 = \sqrt{3}\, v_0 t \qquad y_3 = -\frac{gt^2}{2}.$$

Dacă punctele M_1, M_2, M_3 sînt coliniare atunci $\overline{M_1M_2} = \lambda\overline{M_2M_3}$. Însă:

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} = \frac{\sqrt{3}\, v_0 t}{2}\,\bar{i} - \frac{v_0}{2}\,t\bar{j}$$

$$\overline{M_2M_3} = (x_3 - x_2)\bar{i} + (y_3 - y_2)\bar{j} = \frac{\sqrt{3}\, v_0 t}{2}\,\bar{i} - \frac{v_0}{2}\,t\bar{j}$$

deci:

$$\overline{M_1M_2} = \overline{M_2M_3} \quad \text{sau} \quad \lambda = 1.$$

Punctele sînt deci coliniare iar punctul M_2 se găsește la mijlocul segmentului $\overline{M_1M_3}$.

13.27. Un punct M se mișcă uniform pe o elice circulară cu viteza v_0. Cunoscîndu-se raza r a cilindrului și panta α a elicei să se determine ecuațiile de mișcare ale punctului în coordonate carteziene, cilindrice și intrinseci.

Rezolvare. Considerînd sistemul de coordonate carteziene $Oxyz$ din figura 13.27 *a*, ecuațiile parametrice ale elicei sînt:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = r\,\theta\,\mathrm{tg}\,\alpha \tag{1}$$

deoarece din figura 13.27 *b* în care este reprezentată desfășurata elicei $z = MM' = M_0M'\ \mathrm{tg}\,\alpha$, iar $M_0M = r\theta$. Componentele vitezei (13.5) vor fi:

$$\dot{x} = -r\sin\theta\cdot\dot{\theta} \qquad \dot{y} = r\cos\theta\cdot\dot{\theta}$$
$$\dot{z} = r\,\dot{\theta}\,\mathrm{tg}\,\alpha \tag{2}$$

de unde:

$$v_0 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \frac{r\,\dot{\theta}}{\cos\alpha}$$

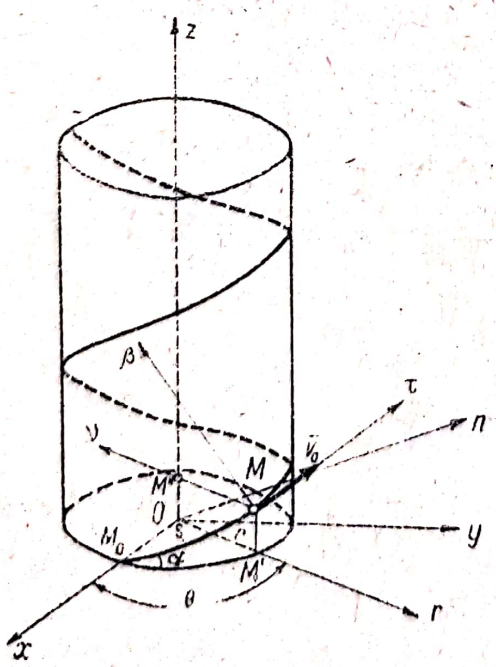


Fig. 13.27 *a*

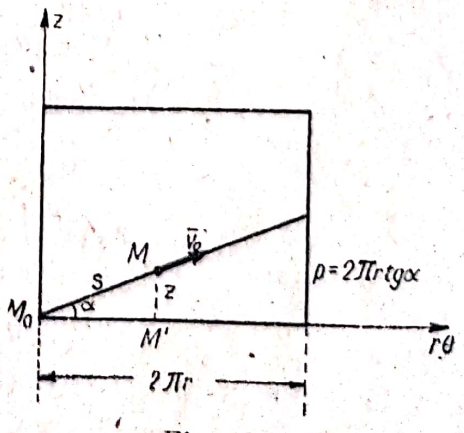


Fig. 13.27 *b*

sau:

$$\dot{\theta} = \frac{v_0 \cos \alpha}{r} = \text{const} \tag{3}$$

iar cum pentru $t = 0$, $\theta = 0$:

$$\theta = \frac{v_0 t \cos \alpha}{r}. \tag{4}$$

Înlocuind (4) în (1) avem legile de mișcare în funcție de timp. Proiecțiile vitezei se puteau obține și direct proiectînd viteza $\bar{v}_0$ pe axele de coordonate. Astfel $\dot{z} = v_0 \sin \alpha$. Înlocuind (3) în (2) obținem evident aceeași valoare pentru $\dot{z}$. Ținînd seama că $\dot{\theta} = \text{const}$, componentele accelerației (13.6) sînt:

$$\ddot{x} = -r \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 = -x\dot{\theta}^2; \quad \ddot{y} = -r \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 = -y\dot{\theta}^2 \quad \ddot{z} = 0 \tag{5}$$

deci vectorul accelerație este coliniar cu vectorul $\overline{OM'} = x\bar{i} + y\bar{j}$ (fig. 13.27 *a*), $\bar{a} = -\omega^2 \overline{OM'}$ iar în modul:

$$|\bar{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = r\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{r}. \tag{6}$$

În coordonate cilindrice r, θ, z (triedrul *Ornz* din fig. 13.27 *a*) avem:

$$r = \text{const} \qquad z = r\theta \operatorname{tg} \alpha. \tag{7}$$

Proiectînd viteza $\bar{v}_0$ pe axele *Or*, *On*, *Oz* unde $\bar{\rho}$ = vers *Or* are direcția normalei la cilindru și $\bar{n}$ = vers *On* direcția tangentei la cercul paralel trecînd prin M și ținînd seama de (13.9) obținem:

$$v_\rho = \dot{r} = 0 \qquad v_n = r\dot{\theta} = v_0 \cos \alpha \qquad v_z = \dot{z} = v_0 \sin \alpha \tag{8}$$

de unde obținem ca în relația (3) $\dot{\theta} = \frac{v_0 \cos \alpha}{r}$.

Componentele (13.10) ale accelerației sînt:

$$a_\rho = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -r\dot{\theta}^2 = -\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{r}; \quad a_n = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

$$a_z = \ddot{z} = 0$$

căci $\ddot{\theta} = 0$, $\ddot{r} = 0$, $\dot{r} = 0$, deci:

$$\bar{a} = -\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{r} \bar{\rho} \tag{9}$$

adică accelerația este normală la cilindru orientată spre centrul cilindrului.

În coordonate intrinseci avem conform (13.17):

$$v = \dot{s} = v_0 \tag{10}$$

și integrînd, cum pentru $t = 0$, $s = 0$:

$$s = v_0 t. \tag{11}$$

Scanned with OKEN Scanner

Componentele (13.18) ale acceleraţiei sînt:

$$a_\tau = \ddot{s} = 0 \qquad a_\nu = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v_0^2}{\rho} \qquad a_\beta = 0$$

deci:

$$\bar{a} = \frac{v_0^2}{\rho}\,\bar{\nu}. \tag{12}$$

Comparînd relaţiile (9) şi (12) avem $\bar{\rho} = -\bar{\nu}$, deci normala la cilindru şi normala principală a elicei sînt confundate, elicea fiind o curbă geodezică a cilindrului. Putem determina raza de curbură a elicei căci:

$$|\bar{a}| = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{r} = \frac{v_0^2}{\rho}$$

deci:

$$\rho = \frac{r}{\cos^2\alpha}. \tag{13}$$

Pentru $\alpha = 0$, mişcarea are loc pe cercul paralel $z = 0$, iar $\rho = r$. Pentru $\alpha = \pi/2$ mişcarea are loc pe o generatoare a cilindrului iar $\frac{1}{\rho} = 0$.

13.28. Un punct M se mişcă pe o elice circulară, proiecţia M'' a punctului pe axa cilindrului executînd o mişcare oscilatorie armonică de amplitudine A şi pulsaţie ν adică $z = A \sin \nu t$. Cunoscînd raza r a cilindrului şi panta α a elicei, să se determine ecuaţiile de mişcare ale punctului.

Rezolvare. În coordonate cilindrice r, θ, z ecuaţiile parametrice ale elicei sînt:

$$r = \text{const} \qquad z = r\,\theta\,\operatorname{tg}\alpha \tag{1}$$

deci:

$$r = \text{const} \qquad \theta = \frac{A}{r \operatorname{tg}\alpha}\sin \nu t \qquad z = A \sin \nu t\,. \tag{2}$$

Componentele vitezei (13.9) sînt:

$$v_\rho = \dot{r} = 0 \qquad v_n = r\dot{\theta} = \frac{\nu A}{\operatorname{tg}\alpha}\cos \nu t; \qquad v_z = \dot{z} = \nu A \cos \nu t \tag{3}$$

deci:

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_n^2 + v_z^2} = \frac{\nu A\,|\cos \nu t|}{\sin\alpha}. \tag{4}$$

Acceleraţia mobilului are componentele (13.10):

$$a_\rho = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\nu^2 A^2}{r \operatorname{tg}^2\alpha}\cos^2 \nu t \qquad a_n = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta} = -\frac{\nu^2 A}{\operatorname{tg}\alpha}\sin \nu t,$$

$$a_z = \ddot{z} = -\nu^2 A \sin \nu t. \tag{5}$$

Punctul execută o mișcare oscilatorie pe elice. Pentru aceasta nu avem decît să exprimăm arcul $s = \text{arc } M_0M$ (fig. 13.27 *a* și *b*):

$$s = \frac{z}{\sin\alpha} = \frac{A \sin \nu t}{\sin \alpha}. \tag{6}$$

Amplitudinea oscilațiilor măsurată pe arcul de elice este $\frac{A}{\sin\alpha} \geqslant |s|$. Viteza (13.17) este:

$$v = \dot{s} = \frac{\nu A \cos \nu t}{\sin \alpha} \tag{7}$$

iar componentele accelerației (13.18) pe axele triedrului lui Frenet sînt:

$$a_\tau = \ddot{s} = -\frac{\nu^2 A \sin \nu t}{\sin \alpha} \qquad a_\nu = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{\nu^2 A^2 \cos^2 \nu t}{r \operatorname{tg}^2 \alpha} \tag{8}$$

căci după cum am stabilit în problema 13.27, formula (13) raza de curbură a elicei este $\rho = \frac{r}{\cos^2 \alpha}$. În formulele (7) și (8) am obținut aceleași rezultate ca în (4) și (5). Astfel, cum $\overline{\rho} = -\overline{\nu}$ accelerația $a_\nu = -a_\rho$ fiind îndreptată spre interiorul cilindrului (fig. 13.27 *a*).

13.29. Ecuațiile parametrice de mișcare ale unui punct sînt:

$$x = a \sin^2 \nu t \qquad y = b \sin \nu t \cos \nu t \qquad z = c \cos \nu t \tag{1}$$

unde a, b, c sînt constante. Să se studieze mișcarea punctului.

Rezolvare. Cum:

$$\frac{x}{a} = \sin^2 \nu t \qquad \frac{y}{b} = \sin \nu t \cos \nu t \qquad \frac{z}{c} = \cos \nu t \tag{2}$$

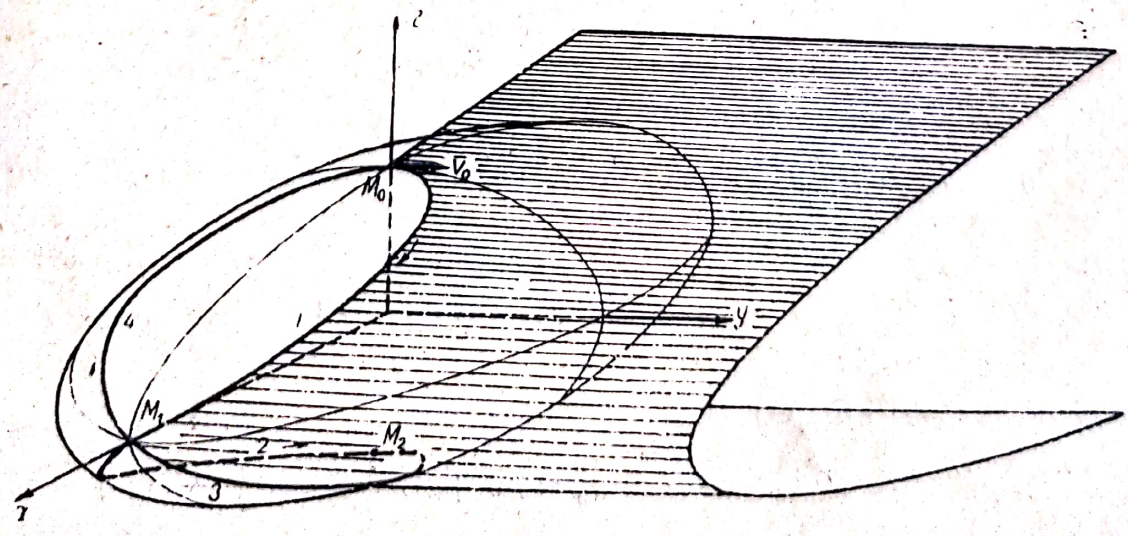


Fig. 13.29

putem elimina timpul t între aceste ecuații obținînd ecuațiile:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{și} \qquad \frac{x}{a}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{3}$$

deci traiectoria este intersecția unui elipsoid cu un cilindru parabolic (fig. 13.29, traiectoria fiind curba $M_0M_1M_2M_1M_0$).

Componentele vitezei (13.5) și ale accelerației (13.6) sînt:

$$\dot{x}=\nu a\sin 2\nu t \qquad \dot{y}=\nu b\cos 2\nu t \qquad \dot{z}=-\nu c\sin \nu t \tag{4}$$

$$\ddot{x}=2\nu^2 a\cos 2\nu t \qquad \ddot{y}=-2\nu^2 b\sin 2\nu t \qquad \ddot{z}=-\nu^2 c\cos \nu t \tag{5}$$

La momentul inițial $t=0$, $x=y=0$, $z=c$, $\dot{x}=\dot{z}=0$, $\dot{y}=\nu b=v_0$, mobilul pornește din M_0 (0, 0, c) cu viteza $\bar{v}_0$ (fig. 13.29) în sensul indicat. Cum:

$$|\bar{v}|=\nu\sqrt{a^2\sin^2 2\nu t+b^2\cos^2 2\nu t+c^2\sin^2 \nu t}>0$$

mobilul se mișcă în același sens pe traiectorie, sensul indicat prin săgeți pe figură.

Pentru $2k\pi\leqslant \nu t\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ mobilul se găsește pe ramura *1* a traiectoriei;

pentru $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant \nu t\leqslant (2k+1)\pi$, $y\leqslant 0$, $z\leqslant 0$ mobilul se găsește pe ramura 2 a traiectoriei ș.a.m.d.

13.30. Să se determine: a) condiția ca vectorul de poziție $\bar{r}$ și vectorul viteză $\bar{v}$ să fie perpendiculari; b) condiția ca vectorul de poziție $\bar{r}$ și vectorul viteză $\bar{v}$ să fie coliniari.

Rezolvare. Din (13.1) și (13.3) avem în coordonate carteziene:

$$\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k} \qquad \bar{v}=\dot{\bar{r}}=\dot{x}\bar{i}+\dot{y}\bar{j}+\dot{z}\bar{k}. \tag{1}$$

a) Vectorii sînt perpendiculari, deci produsul lor scalar este nul:

$$\bar{r}\,\dot{\bar{r}}=x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}=0 \tag{2}$$

Însă:

$$\bar{r}\,\dot{\bar{r}}=\frac{1}{2}\frac{d(\bar{r}\,\bar{r})}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{dt}=0. \tag{3}$$

Notînd $|\bar{r}|=r$, prin integrare obținem:

$$r^2=x^2+y^2+z^2=C \tag{4}$$

deci punctul trebuie să se miște pe o sferă avînd centrul în originea O a sistemului de referință considerat.

b) Vectorii sînt coliniari dacă $\dot{\bar{r}} = \lambda \bar{r}$ deci:

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{z}}{z} = \lambda(t) \tag{5}$$

$\lambda = \lambda(t)$ fiind o funcție oarecare de timp. Putem separa variabilele în sistemul de ecuații diferențiale (5), care devine:

$$\frac{dx}{x} = \lambda(t)\,dt \qquad \frac{dy}{y} = \lambda(t)\,dt \qquad \frac{dz}{z} = \lambda(t)\,dt. \tag{6}$$

Integrînd ecuațiile (6) obținem:

$$x = \alpha f(t) \qquad y = \beta f(t) \qquad z = \gamma f(t) \tag{7}$$

unde α, β, γ sînt constante de integrare, iar $f(t) = e^{\int \lambda(t)dt}$.

Din (7) rezultă:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}, \tag{8}$$

deci punctul trebuie să se miște pe o dreaptă trecînd prin originea O.

Putem da și o soluție vectorială. Notînd $\bar{\rho} = \text{vers}\,\bar{r}$:

$$\bar{r} = r\bar{\rho} \qquad \bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{r}\bar{\rho} + r\dot{\bar{\rho}} \tag{9}$$

Vectorii fiind coliniari, produsul lor vectorial este nul:

$$\bar{r} \times \dot{\bar{r}} = r\dot{r}\,\bar{\rho} \times \bar{\rho} + r^2\,\bar{\rho} \times \dot{\bar{\rho}} = r^2\,\bar{\rho} \times \dot{\bar{\rho}} = 0.$$

Deci:

$$\bar{\rho} \times \dot{\bar{\rho}} = 0. \tag{10}$$

Însă $|\bar{\rho}| = 1$, $\bar{\rho} \cdot \bar{\rho} = 1$ deci:

$$\bar{\rho}\,\dot{\bar{\rho}} = 0. \tag{11}$$

Relațiile (10) și (11) fiind îndeplinite simultan, cum $|\bar{\rho}| \neq 0$ trebuie ca

$$\dot{\bar{\rho}} = 0 \tag{12}$$

căci vectorul $\dot{\bar{\rho}}$ nu poate fi în același timp coliniar și perpendicular cu $\bar{\rho}$. Din (12) prin integrare rezultă că versorul $\bar{\rho}$ are și direcția constantă:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0$$

adică și direcția lui $\bar{r} = r\bar{\rho}_0$ este constantă, punctul descriind o dreaptă.

13.31. Un punct se mișcă pe o curbă plană cu viteza constantă în modul $|\bar{v}| = v_0$, și avînd proiecția accelerației pe o dreaptă Δ constantă $|a_\Delta| = c$. În momentul inițial viteza punctului este coliniară cu dreapta Δ sensul lui $\bar{v}_0$ fiind opus sensului lui a_Δ. Să se determine traiectoria punctului.

Rezolvare. Alegînd originea în poziţia iniţială şi axa Oy orientată pe direcţia şi în sensul vitezei iniţiale $\bar{v}_0$ din enunţ, avem:

$$\ddot{y} = -c \tag{1}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_0^2 \tag{2}$$

iar condiţiile iniţiale ale problemei sînt:

$$t = 0 \qquad x = y = 0 \qquad \dot{x} = 0 \qquad \dot{y} = v_0 . \tag{3}$$

Integrînd ecuaţia (1) şi ţinînd seama de (3):

$$\dot{y} = -ct + v_0 \tag{4}$$

$$y = -\frac{ct^2}{2} + v_0 t. \tag{5}$$

Înlocuind (4) în (2):

$$\dot{x}^2 = 2 v_0 ct - c^2 t^2 = 2 cy \tag{6}$$

şi cum $\dot{x}^2 \geqslant 0$ mişcarea nu poate avea loc decît pentru $y \geqslant 0$ adică pentru:

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{2v_0}{c} . \tag{7}$$

Din ecuaţia (6) presupunînd $\dot{x} > 0$ avem:

$$dx = \sqrt{2 v_0 ct - c^2 t^2}\, dt \tag{8}$$

şi integrînd şi ţinînd seama de (3) rezultă:

$$x = \frac{ct - v_0}{2c} \sqrt{2 v_0 ct - c^2 t^2} + \frac{v_0^2}{2c} \arcsin \left(\frac{ct - v_0}{v_0} \right) + \frac{\pi v_0^2}{4c} . \tag{9}$$

Ecuaţiile (5) şi (9) sînt ecuaţiile parametrice ale traiectoriei. Eliminînd timpul t se obţine ecuaţia carteziană a traiectoriei.

Putem identifica mai uşor ce este traiectoria făcînd schimbarea de variabilă:

$$t = \frac{2 v_0}{c} \sin^2 \varphi \tag{10}$$

căci $0 \leqslant t \leqslant \frac{2 v_0}{c}$. Pentru $t = 0$ vom avea $\varphi = 0$, iar pentru $t = \frac{2 v_0}{c}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Cum $dt = \frac{4 v_0}{c} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi$ înlocuind în (8):

$$dx = \frac{2 v_0^2}{c} \sin^2 2\varphi \, d\varphi$$

şi integrînd, cum pentru $\varphi = 0$, $x = 0$ obţinem:

$$x = \frac{v_0^2}{4c} (4\varphi - \sin 4\varphi) \tag{11}$$

iar din (5) și (10):

$$y = \frac{v_0^2}{2c} \sin^2 2\varphi = \frac{v_0^2}{4c} (1 - \cos 4\varphi). \qquad (12)$$

Ecuațiile (11) și (12) sînt ecuațiile parametrice ale unei cicloide tangente în O la axa Oy (v. problema 13.34).

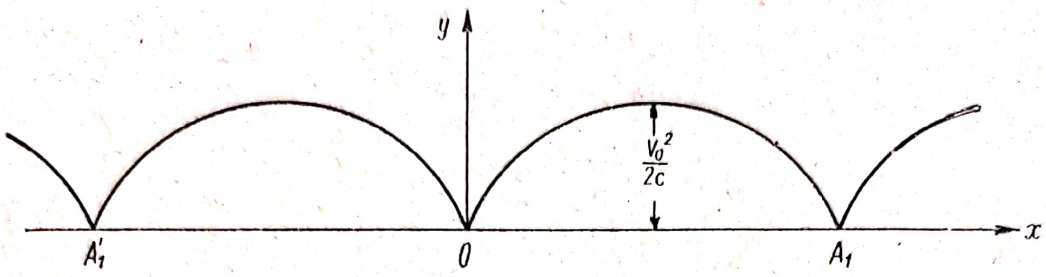


Fig. 13.31

Mișcarea are loc pe arcul de cicloidă OA_1 (fig. 13.31) pentru $\dot{x} > 0$, și pe arcul OA_1' pentru $\dot{x} < 0$, mișcarea nefiind posibilă dincolo de punctul A_1 sau A_1' $\left(\text{căci } t \leqslant \frac{2v_0^2}{c} \text{ adică } \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

13.32. O bară AB de lungime l se mișcă astfel încît capetele ei se sprijină pe două drepte perpendiculare Ox și Oy. Să se determine traiectoria unui punct M al barei. Să se studieze mișcarea punctului M știind că punctul A execută o mișcare oscilatorie armonică după legea $x = l \sin \nu t$.

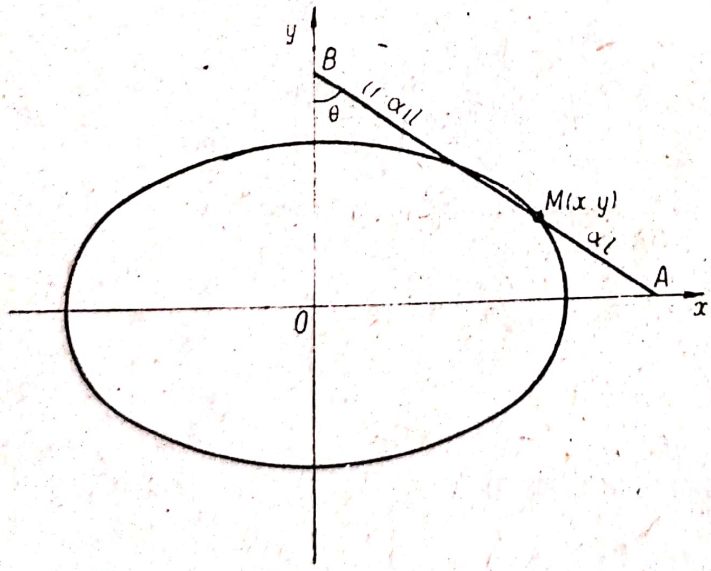


Fig. 13.32

Rezolvare. Notînd $\theta = \widehat{OBA}$ coordonatele unui punct M de pe bară situat la distanța $AM = \alpha l$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ de capătul A al barei sînt:

$$x = (1 - \alpha)\, l \sin \theta$$

$$y = \alpha l \cos \theta. \qquad (1)$$

Eliminînd parametrul θ între ecuațiile (1) obținem ecuația carteziană a traiectoriei:

$$\frac{x^2}{l^2 (1 - \alpha)^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 l^2} = 1 \qquad (2)$$

care este o elipsă de semiaxe $(1 - \alpha)l$, αl cu centrul în punctul O. Putem deci construi cu ajutorul acestei bare un elipsograf (dispozitiv pentru construirea elipselor avînd axe date).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă punctul M se găsește la mijlocul barei $\alpha = {}^1/_2$ ecuația (2) devenind:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 \qquad (2')$$

punctul de pe mijlocul barei descriind un cerc de rază $\frac{l}{2}$.

Pentru punctul A, $\alpha = 0$, deci $x = l \sin\theta$, $y = 0$ și ținînd seama de enunțul problemei:

$$\theta = \nu t. \qquad (3)$$

Deci ecuațiile carteziene de mișcare ale punctului M sînt:

$$x = (1 - \alpha)\, l \sin \nu t \qquad y = \alpha l \cos \nu t. \qquad (4)$$

Componentele (13.5) și (13.6) ale vitezei și accelerației sînt:

$$\dot{x} = (1 - \alpha)\, l\nu \cos \nu t \qquad \dot{y} = -\alpha l \nu \sin \nu t \qquad (5)$$

$$\ddot{x} = -(1-\alpha) l\nu^2 \sin \nu t = -\nu^2 x \qquad \ddot{y} = -\alpha l \nu^2 \cos \nu t = -\nu^2 y. \qquad (6)$$

Punctul M descrie elipsa în sens invers, iar accelerația lui, $\bar{a} = -\nu^2 \overline{OM}$ este coliniară cu vectorul $\overline{OM}$ și este dirijată spre centrul elipsei. O mișcare de acest tip a fost examinată la problema 13.23.

Dacă M se găsește în mijlocul barei, $\alpha = \frac{1}{2}$, iar din $\dot{x} = \frac{l\nu}{2} \cos \nu\, t$, $\dot{y} = -\frac{l\nu}{2} \sin \nu\, t$, rezultă:

$$|\bar{v}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{l\nu}{2} \qquad (7)$$

adică mișcarea punctului pe cerc este uniformă.

Pentru punctul B, $\alpha = 1$, deci $x = 0$, $y = l \cos \nu\, t$, punctul B executînd o mișcare oscilatorie armonică pe axa Oy.

13.33. Să se afle traiectoriile punctelor de articulație A_1, A_2, A_3, ... ale mecanismului din figura 13.33 cînd punctul B se mișcă pe axa Ox. Se dă: $OA_1 = OA_1' = A_nB = A_n'B = l$, $A_1A_2' = A_2A_3' = \ldots = A_{n-1}A_n' = A_1'A_2 = \ldots = A_{n-1}'A_n = 2l$.

Rezolvare. Notînd $\varphi = \widehat{OA_1}x$ coordonatele punctelor A_1, A_2, ... A_n sînt:

$$x_i = (2i - 1)\, l \cos \varphi; \qquad y_i = l \sin \varphi \qquad (1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

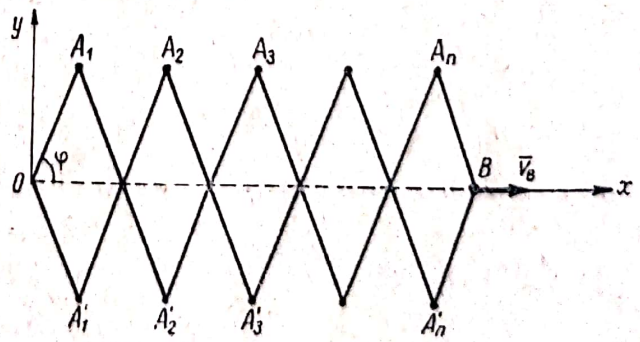


Fig. 13.33

Eliminînd parametrul φ obținem ecuațiile traiectoriilor:

$$\frac{x_i^2}{(2i-1)^2 l^2} + \frac{y_i^2}{l^2} = 1 \qquad (2)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Deci punctele A_i descriu arce de elipsă cu semiaxele l și $(2\ i-1)l$ $[l, 3\ l, 5\ l, \ldots]$.

Punctul A_1 descrie un cerc (elipsă cu semiaxe egale).

Mișcarea punctelor A_i pe elipse depinde de mișcarea punctului B. Cum abscisa punctului B este:

$$x = 2\ nl \cos \varphi, \tag{3}$$

înlocuind în ecuațiile (1) obținem:

$$x_i = \frac{2\ i-1}{2n}\ x \qquad y_i = \sqrt{l^2 - \left(\frac{x}{2n}\right)^2} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{4}$$

de unde prin derivare în raport cu timpul putem obține componentele vitezelor și accelerațiilor punctelor A_i. Viteza și accelerația punctului B sînt: $v_B = \dot{x},\ a_B = \ddot{x}$.

13.34. Un disc de rază R se rostogolește fără alunecare pe o dreaptă Ox. Să se determine traiectoria unui punct M de pe periferia discului precum și legile lui de mișcare cunoscînd viteza constantă v_0 a centrului C al discului.

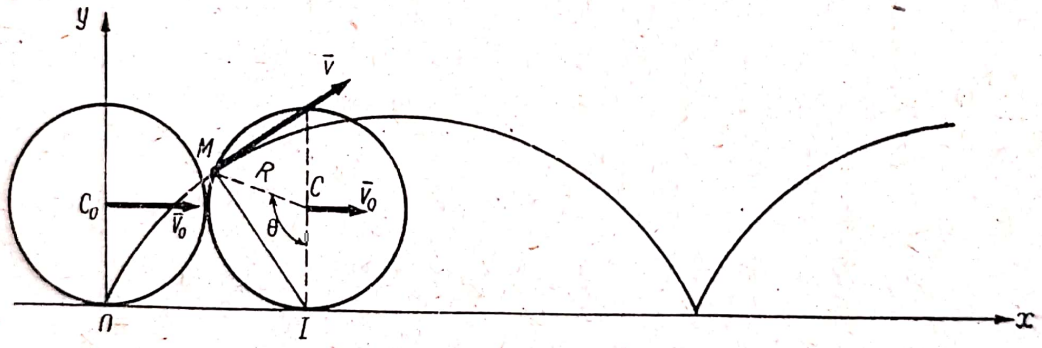


Fig. 13.34

Rezolvare. Cu axele din fig. 13.34 alegînd ca origine punctul O cînd M coincide cu punctul de contact dintre disc și dreaptă avem:

$$OI = \text{arc}\ IM = R\theta$$

deoarece discul se rostogolește fără să alunece. Coordonatele punctului M vor fi:

$$x = R\theta - R \sin \theta = R\ (\theta - \sin \theta) \tag{1}$$

$$y = R - R \cos \theta = R\ (1 - \cos \theta). \tag{2}$$

Ele reprezintă ecuațiile parametrice ale unei cicloide reprezentate în figura 13.34.

Cum viteza punctului C este constantă $C_0C = OI = v_0 t$ deci:

$$\theta = \frac{v_0\ t}{R} \qquad \dot{\theta} = \frac{v_0}{R}. \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind în (1) și (2), ecuațiile de mișcare ale punctului M sînt:

$$x = v_0 t - R \sin \frac{v_0 t}{R} \qquad y = R\left(1 - \cos \frac{v_0 t}{R}\right). \tag{4}$$

Componentele (13.5) vitezei punctului sînt:

$$\dot{x} = v_0\left(1 - \cos \frac{v_0 t}{R}\right) = v_0 (1 - \cos \theta); \quad \dot{y} = v_0 \sin \frac{v_0 t}{R} = v_0 \sin \theta \tag{5}$$

iar modulul vitezei este:

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2v_0 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|.$$

Însă cum: $IM = 2R \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$

$$|\bar{v}| = \frac{v_0}{R} \cdot IM = \dot{\theta} \cdot IM. \tag{6}$$

Viteza este perpendiculară pe vectorul $\overline{IM} = -R \sin \theta \cdot \bar{i} + R(1 - \cos \theta)\bar{j}$, căci

$$\bar{v} \cdot \overline{IM} = [v_0 (1 - \cos \theta)\bar{i} + v_0 \sin \theta \bar{j}] \cdot [-R \sin \theta \cdot \bar{i} + R (1 - \cos \theta)\bar{j}] = 0.$$

Deci la un moment dat viteza mobilului este ca și cum punctul M s-ar roti în jurul punctului I cu viteza unghiulară $\dot{\theta} = \frac{v_0 t}{R}$. Cînd M coincide cu I viteza lui este nulă, deci viteza punctului de contact I dintre dreaptă și disc este nulă.

13.35. Extremitățile A și B a două bare AM și MB de lungime l descriu aceeași axă Ox, după legile $x_A = f(t)$, $x_B = \frac{k}{f(t)}$. Să se determine ecuațiile parametrice ale traiectoriei punctului M în coordonate polare. Ce expresie trebuie să aibă $f(t)$ pentru ca punctul M să se miște uniform pe traiectorie?

Rezolvare. Cum $OC = \frac{x_A + x_B}{4}$, $CM = \sqrt{AM^2 - AC^2} = \sqrt{l^2 - \frac{(x_B - x_A)^2}{4}}$, coordonatele polare ale punctului M sînt:

$$r = \sqrt{OC^2 + CM^2} = \sqrt{l^2 + k} = \text{const} \quad (1)$$

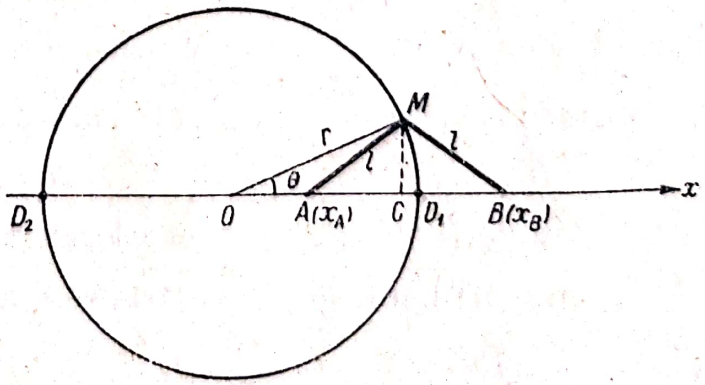


Fig. 13.35 *a*

$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\pm\frac{CM}{OC}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(\pm\frac{\sqrt{4l^2-(x_B-x_A)^2}}{x_A+x_B}\right) \qquad (2)$$

(s-a ţinut seama că $x_A \cdot x_B = k$).

Punctul M va descrie un cerc de rază $r = \sqrt{l^2+k}$ (dacă $k > -l^2$) cu centrul în O.

Pentru $k > 0$ (fig. 13.35 *a*) punctele A şi B se găsesc de aceeaşi parte a lui O. Cum $0 \leqslant |x_B - x_A| \leqslant 2l$ rezultă $|\operatorname{tg}\theta| \leqslant \frac{l}{\sqrt{k}} = \operatorname{tg}\theta_1$ mişcarea nefiind posibilă decît în vecinătatea punctului D_1 (dacă $x_A > 0$, $x_B > 0$) pe arcul $-\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$ sau în vecinătatea punctului D_2 (dacă $x_A < 0$, $x_B < 0$) pe arcul $\pi - \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \pi + \theta_1$.

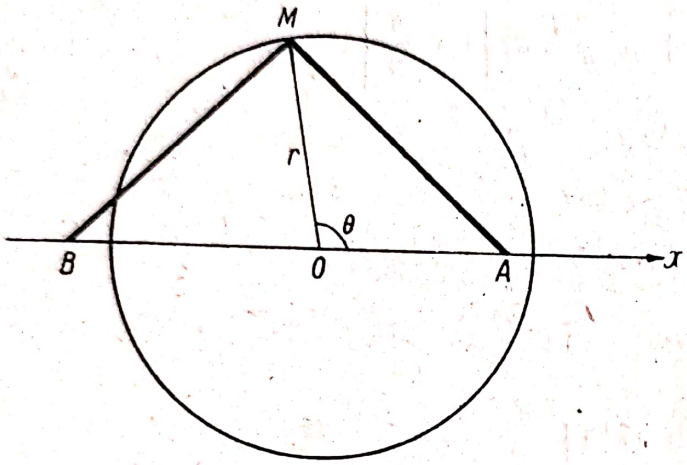


Fig. 13.35 *b*

Pentru $k<0$ (fig. 13.35, *b*) punctul O se găseşte între punctele A şi B, iar mişcarea punctului M este posibilă pe tot cercul. Dacă $x_A > 0$, $x_B < O$ atunci $l - r \leqslant x_A \leqslant l + r$, $-l - r \leqslant x_B \leqslant -l + r$.

În sfîrşit pentru $k = 0$ punctul B este fix (se găseşte în O), punctul A se poate mişca pe segmentul $[-2l, +2l]$, iar M descrie un cerc de rază $r = l$.

Cînd punctul M se mişcă uniform, viteza unghiulară $\dot{\theta} = \omega$ este constantă, deci $\theta = \omega t + \theta_0$. Cum:

$$x_A = r\cos\theta \pm \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\theta}$$

obţinem:

$$f(t) = \sqrt{l^2+k}\cos(\omega t+\theta_0) \pm \sqrt{l^2\cos^2(\omega t+\theta_0) - k\sin^2(\omega t+\theta_0)}. \qquad (3)$$

Şi din ecuaţia (3) se vede că pentru $k>0$ trebuie ca $l^2\cos^2\theta - k\sin^2\theta \geqslant 0$ deci $|\operatorname{tg}\theta| \leqslant \frac{l}{\sqrt{k}}$. Pentru $k = 0$ ecuaţia (3) devine :

$$x_A = f(t) = 2l\cos(\omega t + \theta_0) \qquad (3')$$

punctul A executînd o oscilaţie armonică pe axa Ox.

13.36. Ecuaţiile de mişcare ale unui punct în coordonate polare sînt:

$$r = r_0 e^{\alpha t} \qquad \theta = \beta t. \qquad (1)$$

Ce este traiectoria punctului? Să se determine viteza şi acceleraţia punctului.

Rezolvare. Eliminînd timpul t între ecuaţiile (1) obţinem :

$$r = r_0 e^{\frac{\alpha}{\beta}\theta} \qquad (2)$$

adică traiectoria este o spirală logaritmică.

Scanned with OKEN Scanner

Componentele (13.11) și (13.12) ale vitezei și accelerației în coordonate polare sînt:

$$v_\rho = \dot{r} = \alpha r_0 e^{\alpha t} \qquad v_n = r\dot{\theta} = \beta r_0 e^{\alpha t} \tag{3}$$

$$a_\rho = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = (\alpha^2 - \beta^2) r_0 e^{\alpha t} \qquad a_n = \dot{r}\dot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2\alpha\beta r_0 e^{\alpha t}. \tag{4}$$

Modulele vitezei și accelerației sînt:

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_\rho^2 + v_n^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} r_0 e^{\alpha t} \qquad |\bar{a}| = \sqrt{a_\rho^2 + a_n^2} = (\alpha^2 + \beta^2) r_0 e^{\alpha t}, \tag{5}$$

iar unghiurile φ și ψ formate de vectorii $\bar{v}$ și $\bar{a}$ cu raza polară OP sînt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_n}{v_\rho} = \frac{\beta}{\alpha} = \text{const}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{a_n}{a_\rho} = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} = \text{const}. \tag{6}$$

Regăsim astfel o proprietate a spiralei logaritmice, unghiul φ dintre tangenta la traiectorie și raza vectoare OP (adică între $\bar{v}$ și $\overline{OP}$) nu depinde de poziția punctului P pe traiectorie (fig. 13.36).

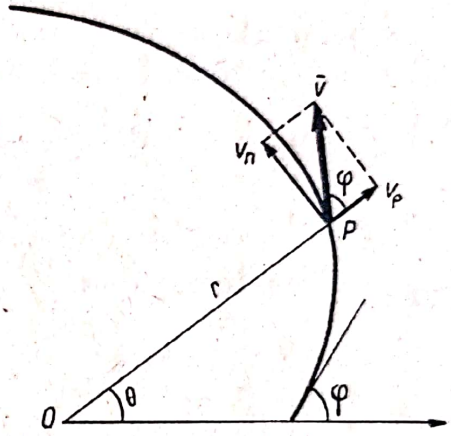


Fig. 13.36

13.37. Un punct se mișcă într-un plan astfel încît viteza lui areolară în raport cu un punct O este proporțională cu raza vectoare, $\Omega = k_1 r$, iar $v_\rho = k_2$. Știind că în momentul inițial $r = r_0$ să se studieze mișcarea punctului.

Rezolvare. Cum conform (13.11):

$$v_\rho = \dot{r} = k_2 \tag{1}$$

prin integrare, ținînd seama de condiția inițială $t = 0$, $r = r_0$ obținem:

$$r = k_2 t + r_0. \tag{2}$$

Viteza areolară (13.13) este:

$$\Omega = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = k_1 r$$

de unde:

$$v_n = r\dot{\theta} = 2k_1 \tag{3}$$

și ținînd seama de ecuația (2) obținem:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2k_1}{k_2 t + r_0}.$$

Integrînd și presupunînd $\theta = 0$ pentru $t = 0$ (ceea ce nu particularizează problema) rezultă:

$$\theta = \frac{2k_1}{k_2} \ln \frac{k_2 t + r_0}{r_0}. \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Eliminînd timpul t între ecuațiile (2) și (4) de mișcare obținem ecuația traiectoriei în coordonate polare:

$$\theta = \frac{2k_1}{k_2} \ln \frac{r}{r_0} \qquad \text{sau} \qquad r = r_0 e^{\frac{k_2 \theta}{2k_1}} \tag{5}$$

adică traiectoria este o spirală logaritmică.

Componentele v_ρ și v_n ale vitezei fiind constante, viteza este constantă în modul:

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_\rho^2 + v_n} = \sqrt{4k_1^2 + k_2^2}$$

adică punctul se mișcă uniform pe traiectorie.

Componentele (13.12) ale accelerației sînt:

$$a_\rho = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{4k_1^2}{k_2 t + r_0} \qquad a_n = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \frac{2k_1 k_2}{k_2 t + r_0}. \tag{6}$$

13.38. Raportul vitezelor areolare al unui punct mobil P în raport cu două puncte fixe O și O_1 este constant $\frac{\Omega}{\Omega_1} = k$. Să se studieze mișcarea punctului A, punctul de intersecție al suportului vitezei $\bar{v}$ a punctului P cu dreapta OO_1. Să se determine apoi traiectoria punctului P.

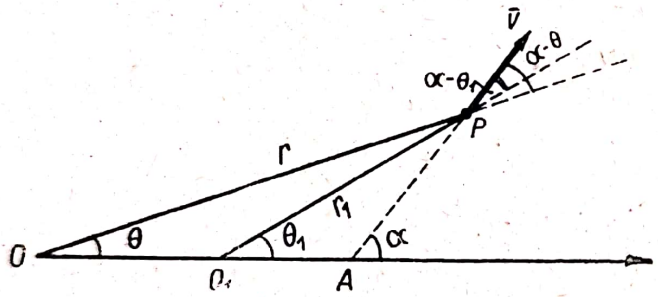


Fig. 13.38

Rezolvare. Viteza areolară (13.13) a unui punct este:

$$\Omega = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} r v_n .$$

Cum proiecțiile vitezei $\bar{v}$ pe normalele la razele vectoare OP și OP_1 (fig. 13.38) sînt:

$$v_n = v \sin(\alpha - \theta) \qquad v_{n_1} = v \sin(\alpha - \theta_1)$$

rezultă:

$$\Omega = \frac{1}{2} r v \sin(\alpha - \theta) \qquad \Omega_1 = \frac{1}{2} r_1 v \sin(\alpha - \theta_1)$$

de unde:

$$\frac{\Omega}{\Omega_1} = \frac{r \sin(\alpha - \theta)}{r_1 \sin(\alpha - \theta_1)} = k. \tag{1}$$

Să determinăm poziția punctului A. Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiurile OAP și O_1AP obținem:

$$OA = \frac{r \sin(\alpha - \theta)}{\sin \alpha} \qquad O_1A = \frac{r_1 \sin(\alpha - \theta_1)}{\sin \alpha}$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci în baza relației (1):

$$\frac{OA}{O_1A} = k$$

adică punctul A este fix.

Traiectoria punctului P este o dreaptă deoarece tangenta la traiectorie (suportul vitezei) trece printr-un punct fix. Într-adevăr considerînd un sistem de referință cu polul în punctul A și notînd $AP = \rho$ avem:

$$v_\rho = \dot{\rho} = v \qquad v_n = \rho\dot{\alpha} = 0$$

deci:

$$\dot{\alpha} = 0 \qquad \alpha = \text{const}$$

adică punctul P are o mișcare rectilinie.

13.39. Să se determine ecuațiile de mișcare în coordonate polare ale unui punct avînd o mișcare plană, știind că $|\overline{v}| = v_0$ (mișcare uniformă), $\dot{\theta} = \omega_0$ și că în momentul inițial $t = 0$, $r = 0$.

Rezolvare. Cum:

$$|\overline{v}| = \sqrt{v_\rho^2 + v_n^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$$

ținînd seama de datele problemei, obținem ecuația diferențială:

$$\dot{r} = \sqrt{v_0^2 - r^2\omega_0^2}$$

și separînd variabilele r și t:

$$\frac{dr}{\sqrt{v_0^2 - r^2\omega_0^2}} = dt.$$

Integrînd și ținînd seama de condițiile inițiale:

$$t = \frac{1}{\omega_0} \arcsin \frac{r\omega_0}{v_0}$$

sau:

$$r = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \qquad (1)$$

Fără a particulariza problema putem presupune pentru $t = 0$, $\theta = 0$ deci din $\dot{\theta} = \omega_0$ prin integrare obținem:

$$\theta = \omega_0 t. \qquad (2)$$

Eliminînd timpul t între ecuațiile parametrice ale mișcării (1) și (2), obținem ecuația polară a traiectoriei:

$$r = \frac{v_0}{\omega_0} \sin\theta. \qquad (3)$$

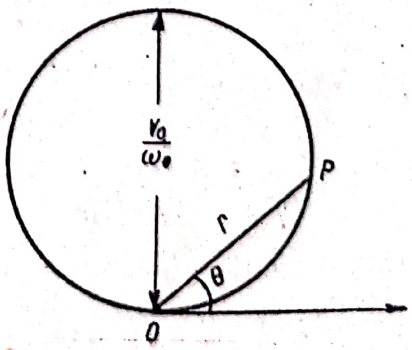


Fig. 13.39

Traiectoria este un cerc cu diametrul $\frac{v_0}{\omega_0}$ (fig. 13.39).

Componentele vitezei sînt:

$$v_\rho = \dot{r} = v_0 \cos\theta \qquad v_n = r\,\dot{\theta} = v_0 \sin\theta$$

iar ale acceleraţiei:

$$a_\rho = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -2v_0\omega_0 \sin\theta \qquad a_n = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta} = 2v_0\omega_0 \cos\theta$$

modulul acceleraţiei fiind:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_\rho^2 + a_n^2} = 2v_0\omega_0.$$

13.40. Un punct P descrie o elipsă astfel încît diferenţa:

$$PF_1 - PF_2 = 2c\cos\omega t \tag{1}$$

unde F_1 şi F_2 sînt focarele elipsei, $F_1F_2 = 2c$, iar axa mare a elipsei este $2a$. Să se determine vitezele areolare ale punctului P în raport cu F_1, F_2 şi O (centrul elipsei).

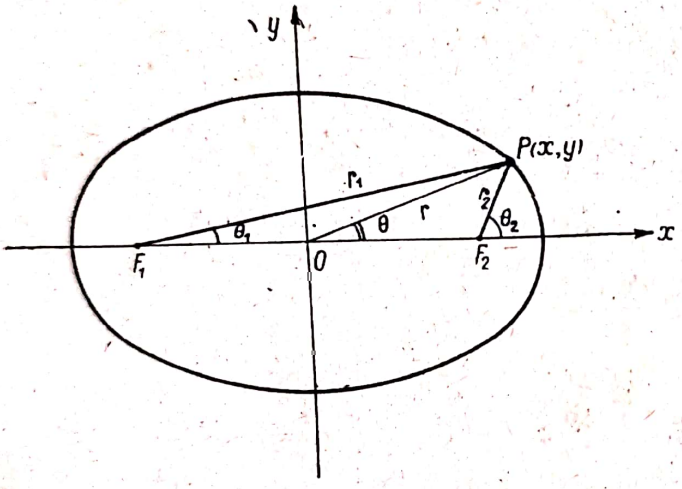


Fig. 13.40 *a*

Rezolvare. Notînd $F_1P = r_1$, $F_2P = r_2$, $OP = r$ (fig. 13.40 *a*) din ecuaţia (1) şi ţinînd seama de proprietatea că suma distanţelor de la un punct P al elipsei la focare este egală cu axa mare, avem:

$$r_1 - r_2 = 2c\cos\omega t$$
$$r_1 + r_2 = 2a \tag{2}$$

de unde:

$$r_1 = a + c\cos\omega t$$
$$r_2 = a - c\cos\omega t. \tag{3}$$

Aplicînd teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile F_1F_2P şi OF_2P obţinem:

$$\cos\theta_1 = \frac{a\cos\omega t + c}{a + c\cos\omega t} \qquad \cos\theta_2 = \frac{a\cos\omega t - c}{a - c\cos\omega t} \tag{4}$$

$$r = \sqrt{b^2 + c^2\cos^2\omega t} \quad (\text{unde } a^2 = b^2 + c^2) \qquad \cos\theta = \frac{a\cos\omega t}{\sqrt{b^2 + c^2\cos^2\omega t}}. \tag{5}$$

Vitezele unghiulare $\dot{\theta}$, $\dot{\theta}_1$ şi $\dot{\theta}_2$ se obţin derivînd în raport cu timpul expresiile lui $\cos\theta$, $\cos\theta_1$ şi $\cos\theta_2$. Cum:

$$\sin\theta = \frac{b\sin\omega t}{\sqrt{b^2 + c^2\cos^2\omega t}} \qquad \sin\theta_1 = \frac{b\sin\omega t}{a + c\cos\omega t} \qquad \sin\theta_2 = \frac{b\sin\omega t}{a - c\cos\omega t} \tag{6}$$

după calcule elementare rezultă:

$$\dot{\theta} = \frac{ab\,\omega}{b^2 + c^2\cos^2\omega t} \qquad \dot{\theta}_1 = \frac{b\omega}{a + c\cos\omega t} \qquad \dot{\theta}_2 = \frac{b\omega}{a - c\cos\omega t}.$$

Vitezele areolare ale punctului P în raport cu O, F_1 și F_2 sînt:

$$\Omega = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} ab\,\omega = \text{const} \qquad \Omega_1 = \frac{1}{2} r_1^2 \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2} (a + c\cos\omega t)\, b\omega$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2} r_2^2 \dot{\theta}_2 = \frac{1}{2} (a - c\cos\omega t)\, b\omega.$$

Viteza areolară în raport cu polul O, Ω fiind constantă ținînd seama de expresia (13.12), componenta a_n pe normala la raza vectoare OP este nulă $a_n = 0$, iar:

$$a_\rho = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{c^2\omega^2 (b^2\cos^2\omega t - b^2\sin^2\omega t + c^2\cos^4\omega t)}{(b^2 + c^2\cos^2\omega t)^{3/2}} - \frac{a^2 b^2 \omega^2}{(b^2 + c^2\cos^2\omega t)^{3/2}}$$

și cum $a^2 = b^2 + c^2$ rezultă:

$$a_\rho = -\omega^2 \sqrt{b^2 + c^2\cos^2\omega t} = -\omega^2 r,$$

deci accelerația punctului are direcția PO și este proporțională cu raza vectoare OP, $\bar{a} = -\omega^2 \bar{r}$.

Putem găsi o proprietate a proiecțiilor vitezei prin derivarea relației (2):

$$\dot{r}_1 + \dot{r}_2 = 0$$

sau:

$$v_{\rho_1} = -v_{\rho_2}$$

adică proiecțiile vitezei pe razele vectoare F_1P și F_2P sînt egale și de sens contrar, deci tangenta la elipsa în punctul P este bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{F_1PF_2}$ (fig. 13.40 *b*). Cititorul poate căuta să găsească pe o cale asemănătoare proprietăți ale tangentelor la o hiperbolă și la o parabolă.

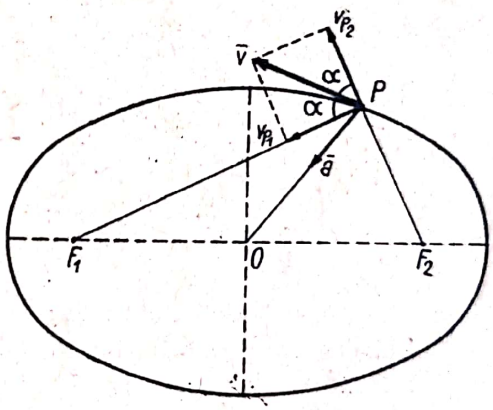


Fig. 13.40 *b*

Evident problema se putea rezolva și folosind un sistem de coordonate carteziene. Coordonatele punctului P fiind:

$$x = r\cos\theta = a\cos\omega t \qquad y = r\sin\theta = b\sin\omega t$$

mișcarea punctului este identică cu cea studiată în problema 13.23. Spre exemplu și acolo s-a găsit aceeași expresie pentru accelerație:

$$\bar{a} = -\omega^2 \bar{r}.$$

13.41. Un punct P se mișcă pe un con circular drept cu unghiul la vîrf 2φ. Știind că mișcarea punctului este uniformă $|\bar{v}| = v_0$ și că viteza areolară în raport cu vîrful O al conului, a punctului P' (proiecția punctului P pe un plan perpendicular dus prin O pe axa conului) este constantă, să se studieze mișcarea punctului P. Condițiile inițiale ale problemei: în momentul

inițial $t = 0$, $PP' = z_0$, iar viteza formează unghiul α_0 cu tangenta la cercul paralel dus prin $P\,(0 \leqslant \alpha_0 \leqslant \pi)$. Cazuri particulare: $z_0 = 0$, $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$.

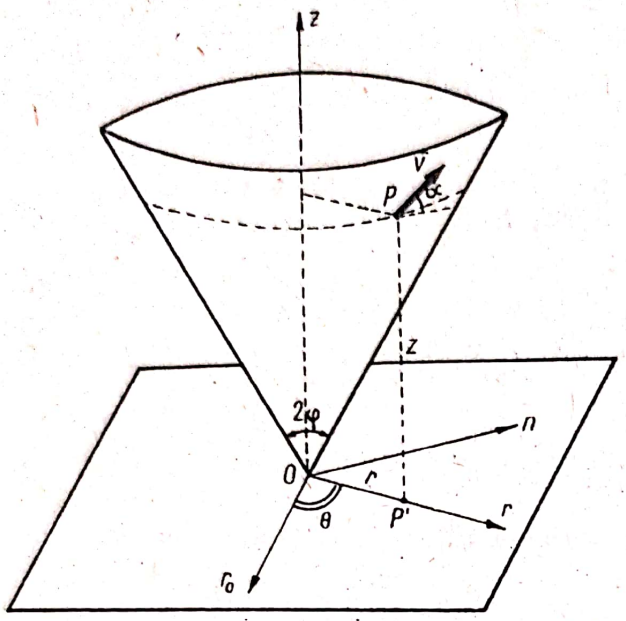


Fig. 13.41 *a*

Rezolvare. Într-un sistem de coordonate cilindrice *Ornz*, ecuația conului este:

$$r = z \operatorname{tg} \varphi . \qquad (1)$$

Din datele problemei conform (13.9):

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = v_0^2 \qquad (2)$$

iar viteza areolară (13.13) a punctului P' având coordonatele polare r și θ (fig. 13.41 *a*) este:

$$\Omega = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} r v_n \qquad (3)$$

și ținînd seama de condiția inițială $t=0, r=z_0 \operatorname{tg} \varphi, v_n = v_0 \cos \alpha_0$, (*On* fiind paralelă cu tangenta la cercul paralel)

$$z^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \dot{\theta} = z_0 v_0 \operatorname{tg} \varphi \cos \alpha_0$$

de unde:

$$\dot{\theta} = \frac{z_0 v_0 \cos \alpha_0}{z^2 \operatorname{tg} \varphi} . \qquad (4)$$

Ținînd seama de ecuația (4) și de relația $\dot{r} = \dot{z} \operatorname{tg} \varphi$ obținută prin derivarea ecuației (1) din ecuația (2) obținem:

$$\dot{z}^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{z_0^2 v_0^2 \cos^2 \alpha_0}{z^2} + \dot{z}^2 = v_0^2 ,$$

deci:

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{v_0 \cos \varphi \sqrt{z^2 - z_0^2 \cos^2 \alpha_0}}{z} . \qquad (5)$$

Mișcarea este posibilă numai pentru $z > z_0 \,|\cos \alpha_0|$.

Separînd variabilele z și t și integrînd obținem:

$$\sqrt{z^2 - z_0^2 \cos^2 \alpha_0} - z_0 \sin \alpha_0 = v_0 t \cos \varphi$$

de unde:

$$z = \sqrt{z_0^2 + 2 v_0 z_0 t \sin \alpha_0 \cos \varphi + v_0^2 t^2 \cos^2 \varphi} . \qquad (6)$$

Dacă $\pi < \alpha_0 < 2\pi$ atunci schimbăm semnul expresiei (5) a lui $\dot{z}$ și apoi integrăm, găsind legea de mișcare pînă în momentul în care $\dot{z} = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind expresia (6) a lui z în ecuația (4) și integrînd obținem:

$$\theta = \frac{1}{\sin\varphi} \operatorname{arc\,tg} \frac{v_0 t \cos\varphi + z_0 \sin\alpha_0}{z_0 \cos\alpha_0} - \frac{\alpha_0}{\sin\varphi} \tag{7}$$

(s-a presupus $\theta = 0$ pentru $t = 0$ ceea ce nu particularizează problema).

Ecuațiile (6) și (7) sînt ecuațiile parametrice ale mișcării punctului. Putem determina componentele (13.9) ale vitezei:

$$v_\rho = \dot{r} = \dot{z} \operatorname{tg}\varphi = \frac{v_0 \sin\varphi}{z} \sqrt{z^2 - z_0^2 \cos^2\alpha_0} \qquad v_n = r\dot{\theta} = \frac{z_0}{z} v_0 \cos\alpha_0 \tag{8}$$

$$v_z = \dot{z} = \frac{v_0 \cos\varphi}{z} \sqrt{z^2 - z_0^2 \cos^2\alpha_0}$$

deci unghiul α dintre $\bar{v}$ și tangenta la paralel (fig. 13.41 *a*) este dat de:

$$\cos\alpha = \frac{v_n}{v_0} = \frac{z_0}{z} \cos\alpha_0 .$$

Componentele acceleraţiei (13.10) sînt:

$$a_\rho = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{v_0^2 z_0^2 \cos^2\alpha_0 \cos^2\varphi}{z^3 \operatorname{tg}\varphi} \qquad a_n = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \tag{9}$$

$$a_z = \ddot{z} = \frac{v_0^2 z_0^2 \cos^2\alpha_0 \cos^2\varphi}{z^3}$$

deci acceleraţia se găseşte în planul meridian *Orz* şi este normală pe generatoarea $\overline{OP}$ căci $\operatorname{tg}\psi = -\frac{a_z}{a_\rho} = \operatorname{tg}\varphi$ $(\psi = \varphi)$ deci acceleraţia este dirijată după normala la con (fig. 13.41 *b*). Însă componentele (13.18) ale acceleraţiei pe axele triedrului lui Frenet fiind:

$$a_\tau = \dot{v} = 0 \qquad a_\nu = \frac{v^2}{\rho} \neq 0 \qquad a_\beta = 0$$

acceleraţia are şi direcţia normalei principale la traiectorie.

Normala principală la traiectorie coincide deci cu normala la suprafaţa conului, deci traiectoria este o linie geodezică a conului.

Cazuri particulare: $z_0 = 0$ punctul porneşte din vîrful conului. Din (6) şi din (7) $\left(\text{unde } \alpha_0 = \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă:

$$z = v_0 t \cos\varphi \qquad \theta = 0$$

adică mişcarea este o mişcare rectilinie uniformă pe generatoarea conului. La acelaşi rezultat se ajunge şi în cazul $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ cînd:

$$z = z_0 + v_0 t \cos\varphi \qquad \theta = 0.$$

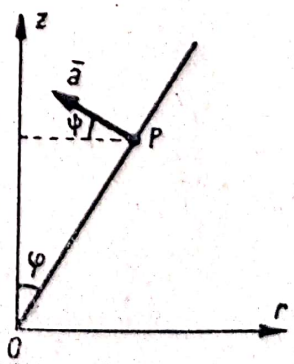


Fig. 13.41 *b*

13.42. Un punct P se mişcă pe un cilindru drept eliptic de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ descriind o elice, unghiul de înclinare al elicei (faţă de cercurile paralele) fiind α. Ştiind că viteza areolară a proiecţiei P' a punctului P pe un plan perpendicular pe axa cilindrului este constantă şi egală cu $\frac{1}{2}ab\omega$, să se determine viteza punctului.

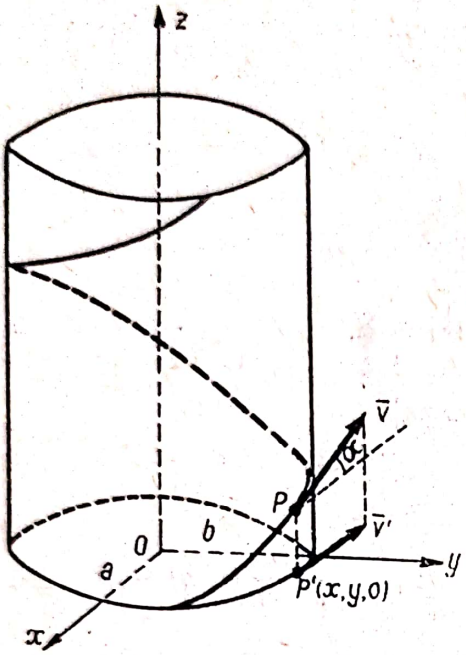


Fig. 13.42

Rezolvare. Cunoscînd coordonatele punctului P' (x, y), să determinăm expresia vitezei areolare (13.13) în coordonate carteziene. Cum $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$:

$$\Omega=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}=\frac{1}{2}(x\dot{y}-y\dot{x}). \qquad (1)$$

La acelaşi rezultat ajungem observînd că în cazul mişcării plane a punctului scalarul produsului vectorial $\bar{r}\times\bar{v}$ este dublul vitezei areolare. Într-adevăr:

$$\bar{r}\times\bar{v}=\begin{vmatrix}\bar{\rho} & \bar{n} & \bar{k}\\ r & 0 & 0\\ \dot{r} & r\dot{\theta} & 0\end{vmatrix}=r^2\dot{\theta}\,\bar{k} \qquad \bar{r}\times\bar{v}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x & y & 0\\ \dot{x} & \dot{y} & 0\end{vmatrix}=(x\dot{y}-y\dot{x})\bar{k}.$$

Să exprimăm viteza areolară ştiind că punctul P' se găseşte pe elipsă avînd ecuaţiile parametrice:

$$x=a\cos\varphi \qquad y=b\sin\varphi$$

deci:

$$\dot{x}=-a\dot{\varphi}\sin\varphi \qquad \dot{y}=b\dot{\varphi}\cos\varphi\,.$$

Viteza areolară:

$$\Omega=\frac{1}{2}(x\dot{y}-y\dot{x})=\frac{1}{2}ab\dot{\varphi}(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=\frac{1}{2}ab\omega$$

deci:

$$\dot{\varphi}=\omega \qquad \varphi=\omega t+\varphi_0.$$

Viteza punctului P' este:

$$v'=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\omega\sqrt{a^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)+b^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Însă proiecția vitezei $\bar{v}$ pe planul xOy este viteza $\bar{v}'$, deci $v' = v \cos \alpha$, de unde viteza punctului P este:

$$v = \frac{\omega}{\cos \alpha} \sqrt{a^2 \sin^2 (\omega t + \varphi_0) + b^2 \cos^2 (\omega t + \varphi_0)}$$

iar componentele ei pe axe sînt:

$$\dot{x} = -a\,\omega \sin (\omega t + \varphi_0) \qquad \dot{y} = b\,\omega \cos (\omega t + \varphi_0)$$

$$\dot{z} = v \sin \alpha = \omega \operatorname{tg} \alpha \sqrt{a^2 \sin^2 (\omega t + \varphi_0) + b^2 \cos^2 (\omega t + \varphi_0)}.$$

13.43. Un punct se mișcă astfel încît accelerația lui trece printr-un punct fix O. Să se arate că mișcarea punctului este plană, se face cu viteză areolară constantă și că într-un sistem de coordonate polare (r, θ) cu polul în O scalarul accelerației este:

$$a = v \frac{dv}{dr}. \tag{1}$$

Să se studieze mișcarea în cazul particular cînd viteza este constantă $v = v_0$.

Rezolvare. Accelerația $\ddot{\bar{r}}$ trecînd prin polul O este coliniară cu vectorul de poziție $\bar{r}$ al punctului în raport cu polul O, deci:

$$\bar{r} \times \ddot{\bar{r}} = 0. \tag{2}$$

Însă:

$$\bar{r} \times \ddot{\bar{r}} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times \dot{\bar{r}}) - \dot{\bar{r}} \times \dot{\bar{r}} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times \dot{\bar{r}}) \tag{3}$$

deci din (2) și (3):

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times \dot{\bar{r}}) = 0$$

$$\bar{r} \times \dot{\bar{r}} = \bar{C} \tag{4}$$

unde: $\bar{C} = C_x \bar{i} + C_y \bar{j} + C_z \bar{k}$ este un vector constant.

Multiplicînd relația (4) scalar cu $\bar{r}$ obținem:

$$\bar{r}(\bar{r} \times \dot{\bar{r}}) = \bar{C}\bar{r} = 0$$

adică:

$$C_x x + C_y y + C_z z = 0. \tag{5}$$

Ecuația (5) reprezintă ecuația unui plan trecînd prin O, normal pe vectorul $\bar{C}$, deci punctul se mișcă într-un plan fix trecînd prin O, și cum $\bar{r}_0 \times \dot{\bar{r}}_0 = \bar{C}$, planul este cel determinat de vectorul de poziție și de viteză în momentul inițial.

Scanned with OKEN Scanner

Din relația (4) rezultă că viteza areolară este constantă căci:

$$\bar{r} \times \dot{\bar{r}} = \begin{vmatrix} \bar{\rho} & \bar{n} & \bar{k} \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} = r^2 \dot{\theta}\, \bar{k} = 2\, \Omega\, \bar{k} = \bar{C}. \qquad (4')$$

În sfîrșit:

$$v \frac{dv}{dr} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr}(v^2) = \frac{1}{2} \frac{dt}{dr} \frac{d}{dt}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) = \frac{1}{2\dot{r}}(2\dot{r}\ddot{r} + 2r\dot{r}\dot{\theta}^2 + 2r^2\dot{\theta}\ddot{\theta})$$

$$v \frac{dv}{dr} = \ddot{r} + r\dot{\theta}^2 + \frac{r^2 \dot{\theta}\ddot{\theta}}{\dot{r}}. \qquad (6)$$

Componentele accelerației sînt:

$$a_\rho = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = a \qquad a_n = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0. \qquad (7)$$

Din a doua relație (7) $\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r}$ și înlocuind în (6) obținem:

$$v \frac{dv}{dr} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = a \qquad (1)$$

ceea ce trebuia demonstrat.

În cazul particular cînd viteza este constantă scriind condiția (1) sub forma:

$$d(v^2) = 2\, a dr$$

rezultă:

$$adr = 0. \qquad (8)$$

Fie $a = 0$ deci $\bar{a} = 0$ mișcarea punctului este o mișcare rectilinie uniformă pe direcția vitezei inițiale.

Fie $dr = 0$ deci $r = \text{const}$ mișcarea punctului este o mișcare circulară uniformă.

13.44. Un punct se mișcă pe un cerc de rază $R = 1{,}2$ m avînd o mișcare uniform accelerată cu $a_\tau = 0{,}5$ m/s². Știind că după o secundă de la începutul mișcării accelerația este $a = 1{,}3$ m/s², să se determine viteza inițială $\bar{v}_0$ a punctului, ecuația orară de mișcare precum și viteza și accelerația la un moment dat.

Rezolvare. Făcînd înlocuirile în sistemul MKS:

$$a_\tau = \dot{v} = 0{,}5$$

Scanned with OKEN Scanner

și prin integrare:

$$v = \dot{s} = 0{,}5\, t + C_1$$

$$s = 0{,}25\, t^2 + C_1 t + C_2.$$

Fără a particulariza problema, putem presupune la $t = 0$, $v = v_0$, $s = 0$ deci:

$$s = 0{,}25\, t^2 + v_0 t \qquad v = 0{,}5\, t + v_0.$$

Pentru $t = 1$s componentele (13.18) ale accelerației sînt:

$$a_\tau = 0{,}5 \qquad a_\nu = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(0{,}5 + v_0)^2}{1{,}2} \qquad a_\beta = 0$$

deci:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_\nu^2} = \sqrt{0{,}25 + \frac{(0{,}5 + v_0)^4}{1{,}44}} = 1{,}3$$

de unde:

$$v_0 = 0{,}7 \text{ m/s} \quad \text{sau} \quad v_0 = -1{,}7 \text{ m/s}.$$

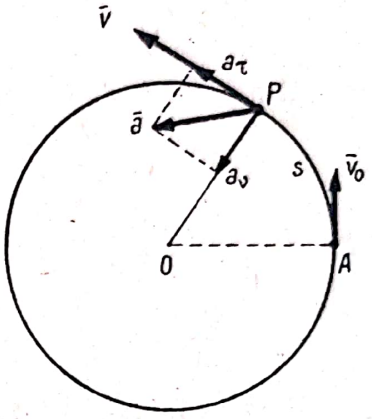


Fig. 13.44

Soluția a doua nu are sens căci mișcarea fiind uniform accelerată v și a_τ au același sens. Făcînd înlocuirile obținem:

$$s = 0{,}25\, t^2 + 0{,}7\, t \qquad v = 0{,}5\, t + 0{,}7 \qquad a_\tau = 0{,}5 \qquad a_\nu = \frac{(0{,}5\, t + 0{,}7)^2}{1{,}2}.$$

13.45. Două puncte P_1 și P_2 se mișcă pe un cerc de rază R. Ele pornesc în același moment $t = 0$ dintr-un punct A cu vitezele v_0 egale și de sens contrar. Primul punct are o mișcare uniformă, iar cel de-al doilea o mișcare uniform întîrziată. Știind că punctele P_1 și P_2 se întîlnesc pentru prima oară în punctul B în care se anulează viteza punctului P_2, să se determine poziția punctului B și timpul după care are loc întîlnirea.

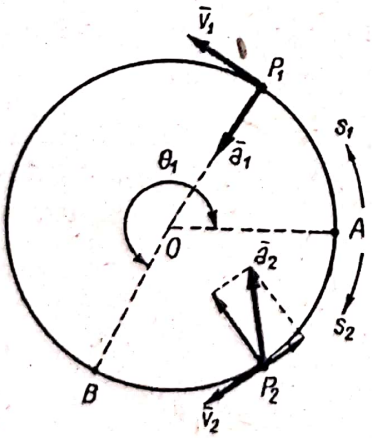


Fig. 13.45

Rezolvare. Primul punct avînd o mișcare uniformă conform (13.19):

$$a_{\tau_1} = \ddot{s}_1 = 0 \qquad v_1 = \dot{s}_1 = v_0.$$

Prin integrare rezultă:

$$s_1 = v_0 t \tag{1}$$

s-a ținut seama de condițiile inițiale $t = 0$, $v_1 = v_0$, $s_1 = 0$, arcele s_1 și s_2 măsurîndu-se din A în sensurile indicate pe figura 13.45.

Pentru al doilea punct mișcarea fiind uniform variată conform (13.20)

$$a_{\tau_2} = \ddot{s}_2 = c.$$

Prin integrare rezultă:

$$v_2 = \dot{s}_2 = ct + v_0 \qquad s_2 = \frac{ct^2}{2} + v_0 t. \tag{2}$$

Mobilele se întîlnesc în B cînd $s_1 + s_2 = 2\pi R$, iar $v_2 = 0$. Rezultă:

$$v_0 t + \frac{ct^2}{2} + v_0 t = 2\pi R \qquad ct + v_0 = 0 \tag{3}$$

de unde:

$$c = -\frac{3v_0^2}{4\pi R} \qquad t = \frac{4\pi R}{3v_0}$$

iar:

$$s_1 = \frac{4}{3}\pi R \qquad s_2 = \frac{2}{3}\pi R.$$

Am determinat astfel și accelerația tangențială a punctului P_2, $a_{\tau_2} = -\frac{3v_0^2}{4\pi R}$ opusă vitezei căci mișcarea este întîrziată. Punctul B corespunde unui unghi la centru $\theta_1 = \frac{4}{3}\pi = 240°$, adică P_1 a parcurs două treimi din circumferința cercului.

13.46. Un punct P descrie curba ABC, formată din arcele de cerc AB și BC, avînd razele r_1 și r_2 și unghiurile la centru θ_1 și θ_2. Punctul are o mișcare uniform întîrziată pornind cu viteza v_0 din A și ajungînd cu viteza $v_2 < v_0$ în C. Să se determine viteza și accelerația punctului și să se reprezinte diagramele $v = v(t)$, $a_\tau = a_\tau(t)$, $a_v = a_v(t)$.

Aplicație numerică: $\theta_1 = \theta_2 = 1$ rad, $r_1 = 30$ m, $r_2 = 48$ m, $v_0 = 8$ m/s, $v_2 = 5$ m/s.

Rezolvare. Mișcarea fiind uniform întîrziată, accelerația tangențială este constantă și opusă vitezei $a_\tau = \ddot{s} = -c$. Integrînd și ținînd seama de condițiile inițiale $t = 0$, $v = v_0$, $s = 0$ rezultă:

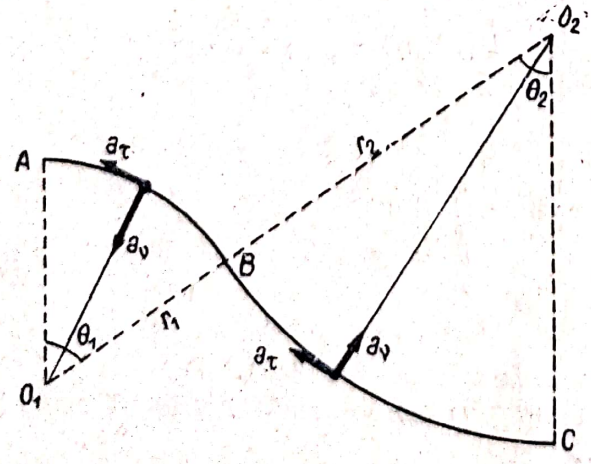


Fig. 13.46 *a*

$$v = \dot{s} = -ct + v_0$$

$$s = -\frac{ct^2}{2} + v_0 t. \tag{1}$$

În punctul C pentru $t = t_2$ avem:

$$v_2 = -ct_2 + v_0$$

$$r_1\theta_1 + r_2\theta_2 = -\frac{ct_2^2}{2} + v_0 t_2$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde:

$$t_2 = \frac{2(r_1\theta_1 + r_2\theta_2)}{v_0 + v_2} \qquad c = \frac{v_0^2 - v_2^2}{2(r_1\theta_1 + r_2\theta_2)}.$$

Înlocuind în (1) obținem expresiile ecuației orare a mișcării, vitezei și accelerației tangențiale:

$$s = -\frac{v_0^2 - v_2^2}{4(r_1\theta_1 + r_2\theta_2)} t^2 + v_0 t \qquad v = -\frac{v_0^2 - v_2^2}{2(r_1\theta_1 + r_2\theta_2)} t + v_0$$

$$a_\tau = -\frac{v_0^2 - v_2^2}{2(r_1\theta_1 + r_2\theta_2)}, \tag{2}$$

iar accelerația normală pe arcele AB și BC are expresiile :

$$a_\nu = \frac{\left[-\frac{v_0^2 - v_2^2}{2(r_1\theta_1 + r_2\theta_2)} t + v_0\right]^2}{r_1}$$

respectiv :

$$a_\nu = \frac{\left[-\frac{v_0^2 - v_2^2}{2(r_1\theta_1 + r_2\theta_2)} t + v_0\right]^2}{r_2}, \tag{4}$$

și este orientată spre centrele O_1 și O_2 ale arcelor de cerc. În punctul B accelerația normală variază discontinuu schimbîndu-și atît sensul cît și modulul ($v_B = v_1$):

$$a_{\nu 1B} = \frac{v_1^2}{r_1} \qquad a_{\nu 2B} = \frac{v_1^2}{r_2}.$$

Pentru aplicația numerică avem :

$$c = \frac{v_0^2 - v_2^2}{2(r_1\theta_1 + r_2\theta_2)} = \frac{8^2 - 5^2}{2(30 + 48)} = 0{,}25 \text{ m/s}^2$$

deci:

$$s = -0{,}125\ t^2 + 8t \qquad v = -0{,}25t + 8 \qquad a_\tau = -0{,}25$$

$$a_{\nu_1} = \frac{(-0{,}25t + 8)^2}{30} \qquad a_{\nu_2} = \frac{(-0{,}25t + 8)^2}{48}.$$

Mobilul ajunge în B cînd $s = r_1\ \theta_1$ adică pentru $30 = -0{,}125\ t_1^2 + 8t_1$, deci $t_1 = 4$ s, deci $v_1 = 7$ m/s. Mobilul ajunge în C pentru $t_2 = \frac{2(r_1\theta_1 + r_2\theta_2)}{v_0 + v_2} =$ $= 12$ s.

Scanned with OKEN Scanner

În figurile 13.46 *b*, *c*, *d* sînt reprezentate diagramele $v = v(t)$, $a_\tau = a_\tau(t)$, $a_v = a_v(t)$ (ținînd seama și de sensul accelerației).

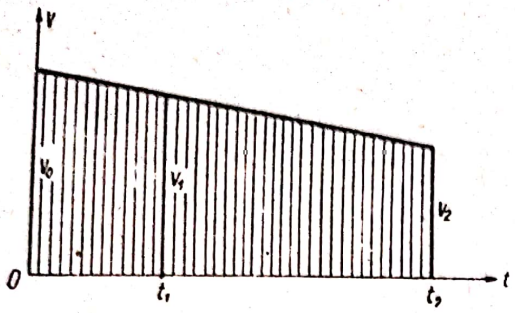


Fig. 13.46 *b*

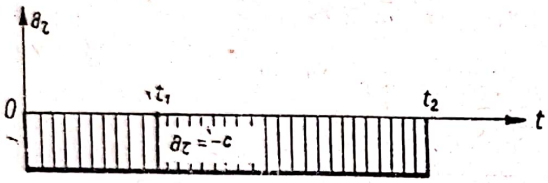


Fig. 13.46 *c*

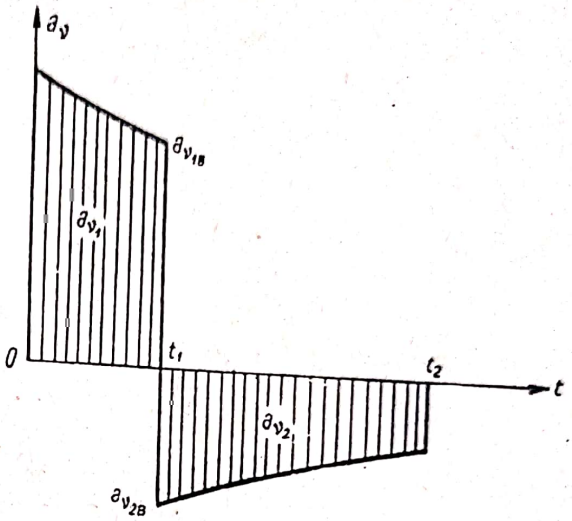


Fig. 13.46 *d*

13.47. Un punct se mișcă uniform cu viteza v_0 pe parabola de ecuație $y = \frac{x^2}{2p}$ (fig. 13.47). Să se determine accelerația punctului cînd punctul se găsește în vîrful *O* al parabolei. Aplicație numerică: $v_0 = 72$ km/h, $p = 50$m.

Rezolvare. Accelerația tangențială este nulă căci mișcarea este uniformă (13.19):

$$a_\tau = \dot{v} = 0.$$

Pentru a determina accelerația normală trebuie să determinăm raza de curbură a traiectoriei:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{\left(1 + \frac{x}{p}\right)^{3/2}}{\frac{1}{p}} = \frac{(p + x)^{3/2}}{p^{1/2}}$$

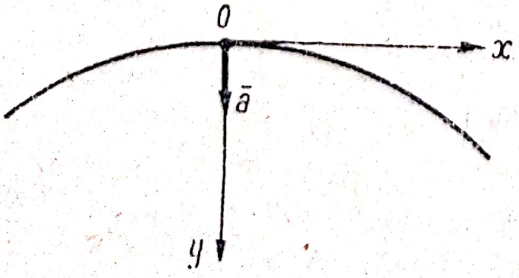


Fig. 13.47

deci:

$$a_v = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v_0^2 p^{1/2}}{(p + x)^{3/2}}.$$

În vîrful parabolei $x = 0$, $\rho = p$, iar:

$$a_v = \frac{v_0^2}{p}.$$

În cazul aplicației numerice $v_0 = 72$ km/h $= 20$ m/s, deci:

$$a_v = \frac{20^2}{50} = 8 \text{ m/s}^2.$$

13.48. Un punct care descrie parabola $y^2 - 2px = 0$ trece prin vîrful ei în momentul inițial cu viteza v_0. Știind că în fiecare moment accelerația este paralelă cu axa parabolei, să se calculeze viteza și accelerația acestui punct.

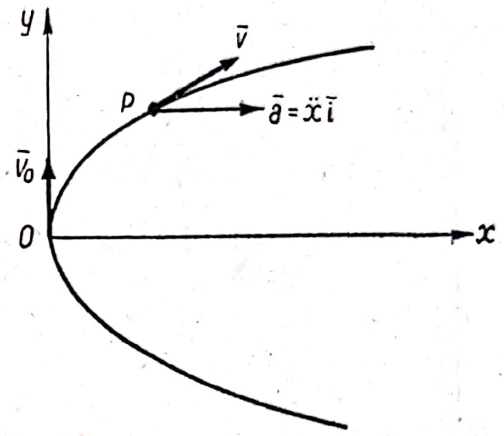


Fig. 13.48

Rezolvare. Accelerația fiind paralelă cu axa Ox a parabolei (fig. 13.48) proiecția ei pe axa Oy este nulă, vom avea deci:

$$\ddot{y} = 0 \qquad \dot{y} = v_0 \qquad y = v_0 t$$

deoarece în momentul inițial $t = 0$, $\dot{y} = v_0$, $y = 0$. Cum:

$$x = \frac{y^2}{2p} = \frac{v_0^2 t^2}{2p}$$

rezultă:

$$\dot{x} = \frac{v_0^2 t}{p} \qquad \ddot{x} = \frac{v_0^2}{p}.$$

Modulele vitezei și accelerației vor fi:

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\frac{v_0^4 t^2}{p^2} + v_0^2} \qquad |\bar{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \frac{v_0^2}{p}.$$

13.49. Să se arate că orice mișcare în care avem îndeplinită relația:

$$v^2 = C_1 s + C_2, \tag{1}$$

unde s este arcul de curbă parcurs de mobil, iar v viteza lui, este o mișcare uniform variată.

Rezolvare. Într-o mișcare uniform variată $a_\tau = \text{const.}$ Derivînd relația (1) obținem:

$$2v\dot{v} = C_1 \dot{s}.$$

Însă $\dot{v} = a_\tau$, iar $\dot{s} = v$, deci relația (2) devine:

$$a_\tau = \frac{C_1}{2} = \text{const.}$$

ceea ce era de demonstrat.

13.50. Să se arate că în cazul unei mișcări plane modulul vitezei punctului este:

$$v = \rho \left| \frac{d\theta}{dt} \right| \tag{1}$$

unde ρ este raza de curbură a traiectoriei, iar θ unghiul dintre $\bar{v}$ și o axă fixă, de exemplu axa Ox (fig. 13.50). Folosind relația (1) să se arate apoi că dacă unghiul α dintre viteza $\bar{v}$ și accelerația $\bar{a}$ este constant:

$$v = v_0 e^{\operatorname{ctg}\alpha\,|\theta-\theta_0|} \tag{2}$$

unde v_0 este viteza inițială a punctului. Caz particular $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

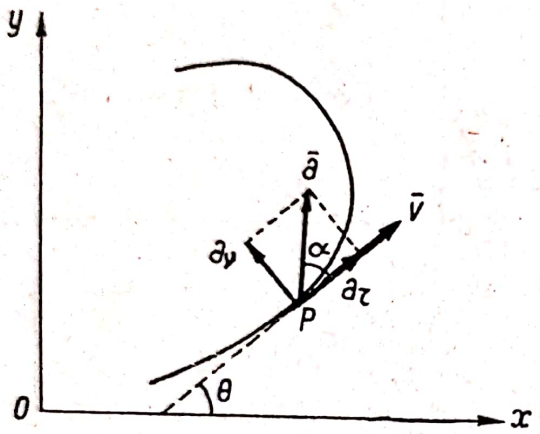


Fig. 13.50

Rezolvare. Raza de curbură a traiectoriei este:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

Cum :

$$y' = \operatorname{tg}\theta \qquad y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d\theta}{dx}\frac{d}{d\theta}(\operatorname{tg}\theta) = \frac{d\theta}{dx}\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\rho = \left| \frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta} \right|.$$

Însă:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\theta} = v\cos\theta\frac{dt}{d\theta}$$

deci :

$$\rho = \left| v\frac{dt}{d\theta} \right|$$

iar

$$v = \rho \left| \frac{d\theta}{dt} \right| \tag{1}$$

ceea ce trebuia demonstrat. Pentru a demonstra relația (2) observăm că:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a_\tau}{a_\nu} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{v^2}{\rho}}$$

și în baza relației (1):

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{dv}{v\,|d\theta|}. \tag{3}$$

Separînd variabilele v și $|\theta|$ rezultă:

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = \int_{\theta_0}^{\theta}\operatorname{ctg}\alpha\,|d\theta|$$

deci:

$$\ln\frac{v}{v_0} = \operatorname{ctg}\alpha\int_{\theta_0}^{\theta}|d\theta| = \operatorname{ctg}\alpha\,|\theta-\theta_0| \tag{4}$$

deoarece α fiind constant și v variind continuu $dv \neq 0$ iar $d\theta$ păstrează un semn constant (dacă traiectoria nu are puncte de inflexiune).

Din ecuația (4) obținem:

$$v = v_0\, e^{\operatorname{ctg}\alpha\,|\theta-\theta_0|}. \tag{2}$$

În cazul particular $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 0$ deci:

$$v = v_0$$

mișcarea este uniformă, rezultat evident deoarece pentru orice mișcare uniformă $\bar{v} \perp \bar{a}$.

13.51. Un punct descrie o traiectorie plană, proiecția vitezei pe o axă (de exemplu axa Ox) fiind constantă $\dot{x} = c$. Să se arate că modulul accelerației este:

$$a = \frac{v^3}{c\rho} \tag{1}$$

unde v este modulul vitezei și ρ raza de curbură a traiectoriei. Folosind acest rezultat să se determine raza de curbură a traiectoriei unui punct greu în vid (problema 13.24).

Rezolvare. Dacă θ este unghiul dintre $\bar{v}$ și Ox (fig. 13.51 *a*), $c = v\cos\theta$ adică:

$$v = \frac{c}{\cos\theta}. \tag{2}$$

Componentele (13.18) ale accelerației pe axele triedrului lui Frenet sînt:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \qquad a_\nu = \frac{v^2}{\rho}$$

unde:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{c\sin\theta}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dt} = v\operatorname{tg}\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

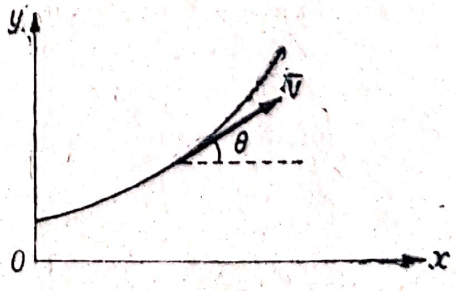


Fig. 13.51 *a*

Însă așa cum s-a arătat în problema 13.50: $\left|\frac{d\theta}{dt}\right| = \frac{v}{\rho}$, deci:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \pm \frac{v^2}{\rho} \operatorname{tg} \theta.$$

Modulul accelerației va fi:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\nu^2} = \frac{v^2}{\rho}\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta + 1} = \frac{v^2}{\rho \cos \theta} = \frac{v^3}{c\rho}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

În cazul mișcării punctului greu în vid (fig. 13.51 *b*) proiecțiile accelerației și vitezei pe axe sînt:

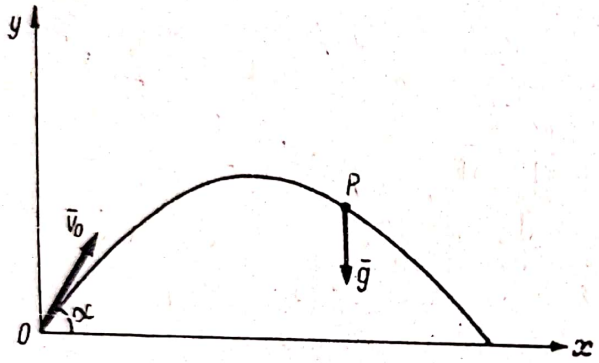


Fig. 13.51 *b*

$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = -g$$

$$\dot{x} = v_0 \cos \alpha$$

$$\dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha$$

deci $\dot{x} = \text{const}$. Putem aplica formula (1) în care:

$$a = g$$

$$c = v_0 \cos \alpha$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2gt v_0 \sin \alpha}.$$

Însă $y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha$, deci:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gy}$$

și înlocuind în (1) obținem:

$$\rho = \frac{(v_0^2 - 2gy)^{3/2}}{v_0 g \cos \alpha}.$$

13.52. Un punct se mișcă pe un cerc de rază r. Știind că între modulele vitezei și accelerației există relația:

$$v^3 - cra = 0 \qquad (1)$$

să se arate că accelerația are o direcție constantă și că proiecția vitezei pe normala la accelerație este constantă și egală cu c.

Rezolvare. Cum:

$$a = \frac{v^3}{cr}$$

$$a_\tau = \pm\sqrt{a^2 - a_\nu^2} = \pm \frac{v^2}{r}\sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1}. \quad (2)$$

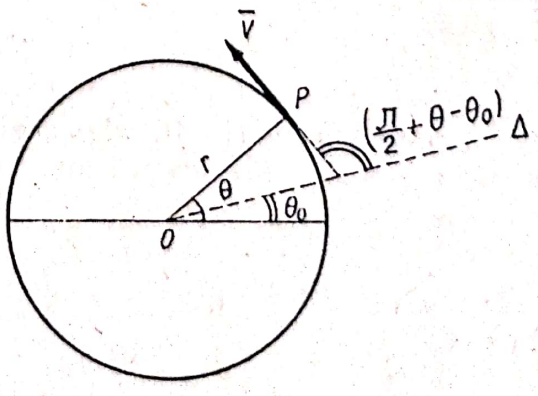


Fig. 13.52

însă:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\cdot\frac{v}{r} \qquad (3)$$

căci (conform 13.22) în mişcarea circulară a punctului $v = r\,\frac{d\theta}{dt}$.

Din (2) şi (3) obţinem:

$$\frac{\pm\, dv}{v\sqrt{\frac{v^2}{c^2}-1}} = d\theta$$

sau:

$$\frac{\mp\, d\left(\frac{1}{v}\right)}{\sqrt{\frac{1}{c^2}-\left(\frac{1}{v}\right)^2}} = d\theta$$

şi prin integrare:

$$\mp \arcsin\frac{c}{v} = \theta - \theta_0$$

unde θ_0 este o constantă de integrare de unde:

$$v_\Delta = v\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta-\theta_0\right) = \pm c$$

adică proiecţia vitezei pe direcţia Δ, v_Δ (fig. 13.52) este constantă. Proiecţia acceleraţiei pe aceeaşi direcţie a_Δ va fi nulă

$$a_\Delta = a_\tau\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta-\theta_0\right) - a_\nu\cos(\theta-\theta_0) = \pm\frac{v^2}{r}\sqrt{\frac{v^2}{c^2}-1}\cdot\left(\pm\frac{c}{v}\right) -$$

$$-\frac{v^2}{r}\sqrt{1-\frac{c^2}{v^2}} = 0,$$

deci acceleraţia are o direcţie normală pe Δ.

13.53. Să se exprime componentele intrinseci (13.18) ale acceleraţiei cunoscînd proiecţiile (13.5) şi (13.6) ale vitezei şi acceleraţiei pe axele unui sistem de axe carteziene.

Rezolvare. Dacă $\bar{\tau}$ este versorul tangentei:

$$a_\tau = a\cos(\bar{a},\bar{\tau}) \qquad a_\nu = a\sin(\bar{a},\bar{\tau}).$$

Însă:

$$\bar{v}\cdot\bar{a} = v\cdot a\cos(\bar{a},\bar{\tau}) \qquad |\bar{v}\times\bar{a}| = v\,a\sin(\bar{a},\bar{\tau})$$

deci:

$$a_\tau = \frac{\bar{v}\cdot\bar{a}}{v} \qquad a_\nu = \frac{|\bar{v}\times\bar{a}|}{v}. \qquad (1)$$

Cum:

$$\bar{v}\cdot\bar{a}=\dot{x}\,\ddot{x}+\dot{y}\,\ddot{y}+\dot{z}\,\ddot{z} \qquad \bar{v}\times\bar{a}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\ \dot{x}&\dot{y}&\dot{z}\\ \ddot{x}&\ddot{y}&\ddot{z}\end{vmatrix}$$

$$|\bar{v}\times\bar{a}|=\sqrt{(\dot{x}\,\ddot{y}-\dot{y}\,\ddot{x})^2+(\dot{y}\,\ddot{z}-\dot{z}\,\ddot{y})^2+(\dot{z}\,\ddot{x}-\dot{x}\,\ddot{z})^2} \qquad v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$

rezultă:

$$a_\tau=\frac{\dot{x}\,\ddot{x}+\dot{y}\,\ddot{y}+\dot{z}\,\ddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} \qquad a_\nu=\sqrt{\frac{(\dot{x}\,\ddot{y}-\dot{y}\,\ddot{x})^2+(\dot{y}\,\ddot{z}-\dot{z}\,\ddot{y})^2+(\dot{z}\,\ddot{x}-\dot{x}\,\ddot{z})^2}{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}. \tag{2}$$

În cazul particular al unei mișcări plane în planul xOy ecuațiile (2) devin:

$$a_\tau=\frac{\dot{x}\,\ddot{x}+\dot{y}\,\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \qquad a_\nu=\frac{|\dot{x}\,\ddot{y}-\dot{y}\,\ddot{x}|}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}. \tag{3}$$

Raza de curbură a unei traiectorii fiind $\rho=\frac{v^2}{a_\nu}$ obținem:

$$\rho=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{3/2}}{[(\dot{x}\,\ddot{y}-\dot{y}\,\ddot{x})^2+(\dot{y}\,\ddot{z}-\dot{z}\,\ddot{y})^2+(\dot{z}\,\ddot{x}-\dot{x}\,\ddot{z})^2]^{1/2}} \tag{4}$$

iar în cazul unei mișcări plane:

$$\rho=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\,\ddot{y}-\dot{y}\,\ddot{x}|}. \tag{5}$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

13.54. Un mobil are o mișcare rectilinie uniform accelerată. Știind că el pornește din stare de repaus și după ce a parcurs 2 km viteza lui $v=72$ km/h, să se determine legea de mișcare, viteza și accelerația lui și să se reprezinte diagramele $x=x(t)$, $v=v(t)$, $a=a(t)$.

Răspuns: $x=0{,}05t^2$, $v=0{,}1t$, $a=0{,}1$ m/s² (MKS).

13.55. Un corp este lăsat să cadă de la înălțimea h. De la sol se aruncă un alt corp cu viteza v_0. Ce valoare trebuie să aibă v_0 ca ele să se întîlnească la înălțimea $\frac{h}{2}$?

Răspuns: $v_0=\sqrt{gh}$.

13.56. Un corp este lăsat să cadă, după ce a străbătut spațiul h; un al doilea corp cade de la aceeași înălțime. Să se determine distanța dintre cele două corpuri în funcție de timp și de spațiul s parcurs de primul corp.

Răspuns: $d=\sqrt{2gh}\;t-h=2\sqrt{hs}-h$.

Scanned with OKEN Scanner

13.57. Două culise A și B se pot mișca una pe o bară orizontală și una pe o bară verticală (fig. 13.57), ele fiind legate cu ajutorul unui fir OAB de lungimea l petrecut prin culisa A și fixat în punctele O și B. Cunoscînd distanța $OC = c$ și viteza $v_0 = \text{const}$ a culisei A, să se determine legea de mișcare, viteza și accelerația culisei B în funcție de abscisa $OA = x$ a primei culise.

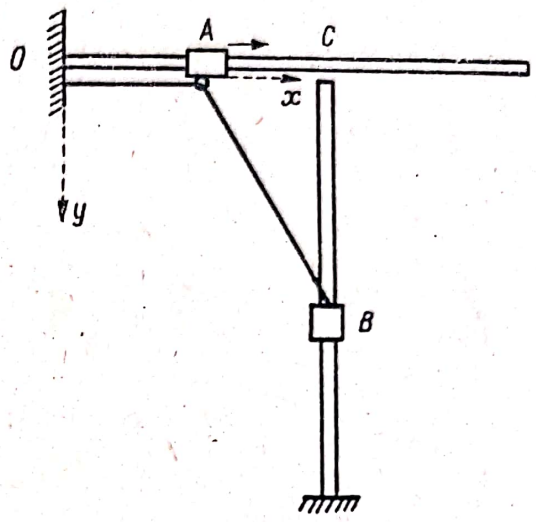


Fig. 13.57

Răspuns: $v = \dot{y} = -\frac{l-c}{y} v_0$,

$a = \ddot{y} = -\frac{(l-c)\, v_0^2}{y^3}$ unde

$CB = y = \sqrt{l^2 - c^2 - 2x(l-c)}$.

13.58. Legea de mișcare a unui punct este $\bar{r} = a \operatorname{ch} \omega t\, \bar{i} + b \operatorname{sh} \omega t \bar{j}$, unde a, b, ω sînt constante pozitive. Să se determine viteza, accelerația și traiectoria punctului.

Răspuns: $\bar{v} = \omega a \operatorname{sh} \omega t\, \bar{i} + \omega b \operatorname{ch} \omega t \bar{j}$,

$\bar{a} = \omega^2 a \operatorname{ch} \omega t \bar{i} + \omega^2 b \operatorname{sh} \omega t \bar{j} = \omega^2 \bar{r}$, traiectoria este hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

13.59. Să se studieze mișcarea punctului M situat pe biela AB a mecanismului bielă-manivelă din figura 13.59, știind că $OA = AB = l$, $AM = \frac{l}{2}$ și că manivela se rotește uniform astfel încît unghiul $\theta = \omega t$.

Răspuns: $x = \frac{3l}{2} \cos \omega t$, $y = \frac{l}{2} \sin \omega t$, traiectoria este elipsa

$\frac{x^2}{\left(\frac{3l}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = 1$, $\bar{v} = -\frac{3l\omega}{2} \sin \omega t\, \bar{i} + \frac{l}{2} \omega \cos \omega t \bar{j}$,

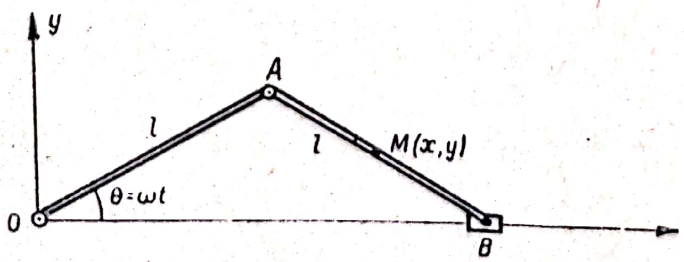


Fig. 13.59

$\bar{a} = -\frac{3l\omega^2}{2} \cos \omega t\, \bar{i} - \frac{l\omega^2}{2} \sin \omega t \bar{j}$.

13.60. Un punct descrie o traiectorie plană. Știind că viteza radială a punctului este

constantă $v_\rho = C_1$ și că accelerația radială este $a_\rho = -\frac{C_2}{r^3}$, să se determine viteza areolară a punctului ($C_2 > 0$ este o constantă).

Răspuns: $\Omega = \pm\frac{1}{2}\sqrt{C_2}$.

13.61. Două puncte P_1 și P_2 pornesc din A cu aceeași viteză $\bar{v}_0$, punctul P_1 are o mișcare uniform accelerată pe cercul AB de rază r, iar P_2 are o mișcare uniform întîrziată pe diametrul AB. Știind că accelerația tangențială a_{τ_1} a punctului P_1 este egală cu modulul accelerației $\bar{a}_2$ a punctului P_2 și punctele ajung simultan în B, se cere: timpul t după care ajung în B, precum și accelerațiile a_{τ_1} și a_2.

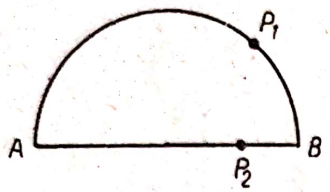


Fig. 13.61

Răspuns: $t = \frac{(\pi + 2)\, r}{2v_0}$, $a_{\tau_1} = -a_2 = \frac{4v_0^2(\pi - 2)}{r(\pi + 2)^2}$.

13.62. Un punct se mișcă pe un cerc de rază r, avînd o mișcare uniform accelerată cu $a_\tau = c$. Știind că el pleacă din stare de repaus, să se determine după cît timp unghiul dintre viteză și accelerație este $\alpha = \frac{\pi}{4}$ și care este spațiul s parcurs.

Răspuns: $t = \sqrt{\frac{r}{c}}$, $s = \frac{r}{2}$.

13.63. Știind că suportul accelerației a a unui punct P intercepteaza pe cercul de curbură din punctul P al traiectoriei coarda $PA = l$, să se exprime modulul accelerației în funcție de v și l.

Răspuns: $a = \frac{2v^2}{l}$.

Capitolul XIV

CINEMATICA SOLIDULUI

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Considerînd un triedru de referință fix $T_1(O_1x_1y_1z_1)$ și unul mobil $T(Oxyz)$ solidar legat de corpul a cărui mișcare o studiem, pentru un punct oarecare P al corpului avem:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r} \tag{14.1}$$

unde $\bar{r}_1$ și $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ sînt vectorii de poziție ai punctului P în raport cu triedrele T_1 și T, iar $\bar{r}_0 = \overline{O_1O}$ este vectorul de poziție al originii O a triedrului T față de T_1 (fig. 14. *a*).

Scanned with OKEN Scanner

Viteza și accelerația punctului P sînt:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} \tag{14.2}$$

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \tag{14.3}$$

unde $\dot{\bar{r}}_0 = \bar{v}_0$ și $\ddot{\bar{r}}_0 = \bar{a}_0$ sînt viteza și accelerația punctului O, iar proiecțiile vectorului viteză unghiulară $\bar{\omega}$ pe axele triedrului mobil T sînt:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\bar{j}}\,\bar{k} = -\dot{\bar{k}}\,\bar{j} \\ \omega_y &= \dot{\bar{k}}\,\bar{i} = -\dot{\bar{i}}\,\bar{k} \\ \omega_z &= \dot{\bar{i}}\,\bar{j} = -\dot{\bar{j}}\,\bar{i}. \end{aligned}\right\} \tag{14.4}$$

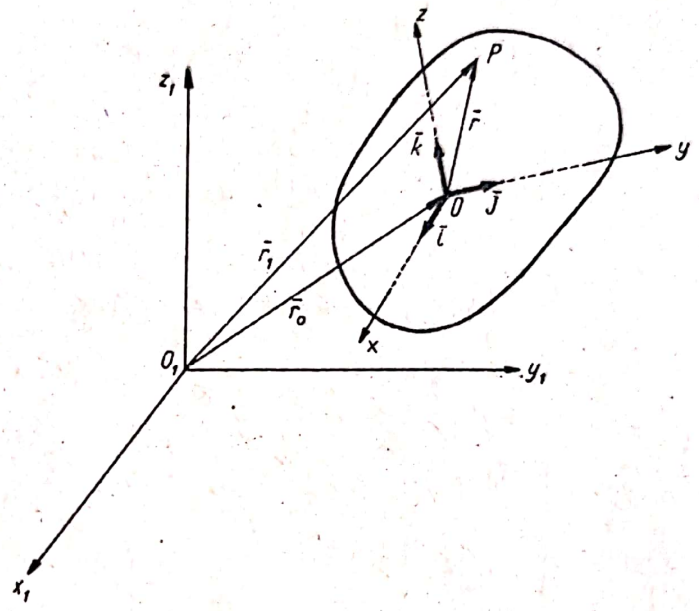


Fig. 14. *a*

Mișcarea cea mai simplă a solidului este *mișcarea de translație* cînd orice dreaptă din solid rămîne paralelă cu ea însăși, deci $\dot{\bar{i}} = \dot{\bar{j}} = \dot{\bar{k}} = 0$, adică în mișcarea de translație:

$$\bar{\omega} = \bar{0} \qquad \bar{v} = \bar{v}_0 \qquad \bar{a} = \bar{a}_0 \tag{14.5}$$

toate punctele avînd aceeași viteză și accelerație ca și punctul O. În mișcarea de translație ajunge deci să studiem mișcarea unui punct oarecare O al solidului.

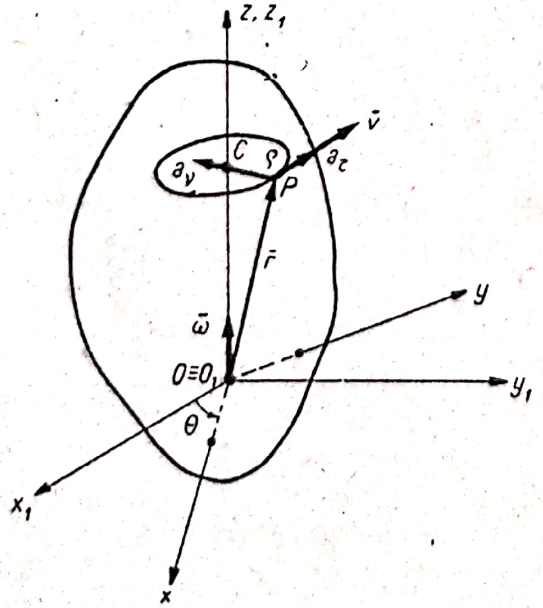


Fig. 14. *b*

În *mișcarea de rotație* în jurul unei axe fixe alegînd sistemele de referință ca în figura 14. *b*, axa $Oz \equiv O_1z$ fiind axa de rotație, viteza și accelerația originii sînt nule $\bar{v}_0 = 0$, $\bar{a}_0 = 0$ iar viteza și accelerația unghiulară au direcția axei de rotație:

$$\bar{\omega} = \dot{\theta}\,\bar{k} \qquad \dot{\bar{\omega}} = \ddot{\theta}\,\bar{k} \tag{14.6}$$

unde θ este unghiul dintre axele Ox_1 și Ox. Viteza și accelerația unui punct P al solidului sînt:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \tag{14.7}$$

$$\bar{a} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \tag{14.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

Punctele solidului descriu cercuri cu centrul C pe axa de rotație, scalarul vitezei fiind:

$$v = \omega\rho \tag{14.9}$$

unde $\rho = CP$ este raza cercului, iar componentele accelerației sînt:

$$a_\tau = \dot{\omega}\rho \qquad a_\nu = \omega^2\rho\ . \tag{14.10}$$

Dacă mișcarea de rotație este uniformă $\dot{\omega} = 0$ iar $\bar{a}_\tau = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} = 0$, accelerațiile punctelor, $\bar{a} = \bar{a}_\nu = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho})$ fiind îndreptate spre axa de rotație.

În *mișcarea elicoidală* suportul unei drepte Δ a solidului (axa mișcării elicoidale) este fix. Distribuția de viteze și de accelerații va fi dată de formulele generale (14.2) și (14.3). Alegînd originea O pe Δ, vectorii $\bar{v}_0$ și $\bar{\omega}$ sînt coliniari, în particular dacă Δ este axa Oz (fig. 14. *c*) vom avea:

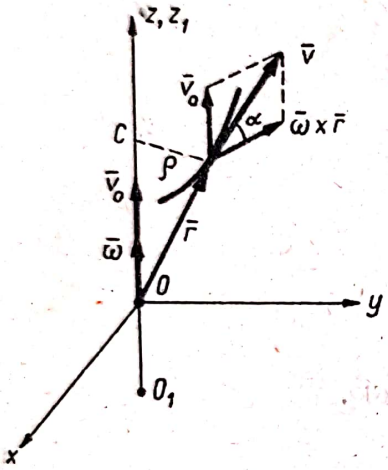


Fig. 14. *c*

$$\begin{aligned} \bar{v}_0 &= v_0\bar{k} \qquad & \bar{a}_0 &= a_0\bar{k} \\ \bar{\omega} &= \omega\bar{k} \qquad & \dot{\bar{\omega}} &= \dot{\omega}\bar{k} \end{aligned} \tag{14.11}$$

iar componentele $\bar{v}_0$ și $\bar{\omega} \times \bar{r}$ ale vitezei sînt normale ($|\bar{\omega} \times \bar{r}| = |\omega|\rho$ unde $\rho = CP$ este distanța de la P la axa Δ). Punctul P descrie o elice avînd înclinația variabilă α dată de:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0}{\omega\rho} \tag{14.12}$$

afară de cazul cînd raportul $\frac{v_0}{\omega}$ este constant. În acest caz mișcarea poartă denumirea de *mișcare de șurub*, iar pasul elicei descris de punctul P este:

$$p = 2\pi\rho \operatorname{tg}\alpha = 2\pi\frac{v_0}{\omega}\ . \tag{14.13}$$

Alte mișcări particulare, cum ar fi mișcarea solidului cu un punct fix sau mișcarea plan paralelă vor fi examinate în capitolele XV și XVI.

În *mișcarea cea mai generală a solidului* distribuția de viteze și accelerații este dată tot de formulele (14.2) și (14.3). Proiecția vitezei $\bar{v}$ pe vectorul $\bar{\omega}$ este constantă:

$$\bar{v}\,\bar{\omega} = \bar{v}_0\,\bar{\omega} \tag{14.14}$$

iar punctele în care viteza $\bar{v}$ este minimă, adică $\bar{v}$ este coliniar cu $\bar{\omega}$ ($\bar{v} \parallel \bar{\omega}$) formează *axa instantanee a mișcării elicoidale* ale cărei ecuații sînt:

$$\frac{v_{0x} - \omega_z y + \omega_y z}{\omega_x} = \frac{v_{0y} - \omega_x z + \omega_z x}{\omega_y} = \frac{v_{0z} - \omega_y x + \omega_x y}{\omega_z}\ . \tag{14.15}$$

Locul geometric al axei instantanee a mișcării elicoidale față de triedrul fix T_1 este o suprafață riglată denumită axoidă fixă, iar față de triedrul mobil T este o suprafață riglată denumită axoidă mobilă. În timpul mișcării axoida mobilă este tangenta axoidei fixe și se rostogolește peste axoida fixă alunecînd în același timp în lungul generatoarei comune.

B. PROBLEME REZOLVATE

14.1. Se consideră sistemul de bare din figura 14.1 *a* alcătuit din manivela OA_1 care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul punctului fix O, din barele A_1A și B_1B ale căror capete A și B se mișcă pe dreapta Ox și din barele A_1B_1 și A_2B_2. Să se studieze mișcarea barelor A_1B_1 și A_2B_2 determinîndu-se traiectoriile, vitezele $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ și accelerațiile $\bar{a}_1$ și $\bar{a}_2$ a două puncte oarecare P_1 și P_2 ale barelor. Distanțele $OA_1 = AA_1 = BB_1 = r$, $AA_2 = BB_2 = a$, $A_1B_1 = A_2B_2 = l$ se presupun cunoscute.

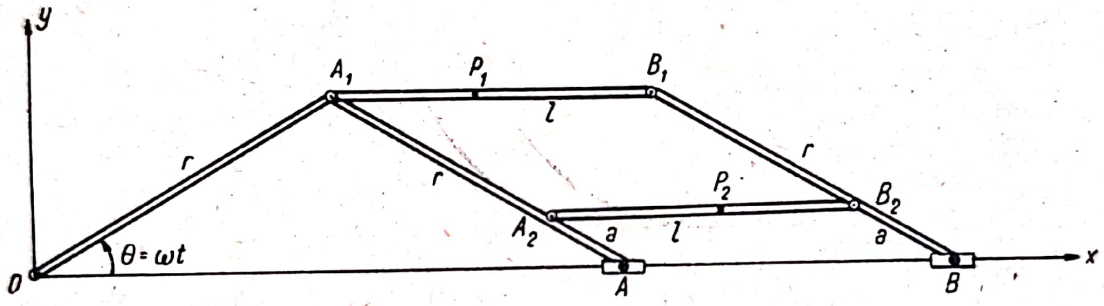


Fig. 14.1 *a*

Rezolvare. Barele A_1B_1 și A_2B_2 rămînînd paralele cu direcția fixă Ox execută o mișcare de translație, toate punctele lor avînd aceeași viteză și aceeași accelerație (14.5) adică:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_{A1} \qquad \bar{a}_1 = \bar{a}_{A1} \qquad \bar{v}_2 = \bar{v}_{A2} \qquad \bar{a}_2 = \bar{a}_{A2}. \tag{1}$$

Punctul A_1 găsindu-se pe bara OA_1, care se rotește uniform, are viteza (14.9) $v_{A1} = \omega r$ normală pe OA_1, și accelerația (14.10) normală pe traiectorie ($a_\tau = 0$) adică orientată de la A_1 spre O, $a_{A1} = a_n = \omega^2 r$. Traiectoria punctului A_1 este cercul $x^2 + y^2 = r^2$ cu centrul în O și de rază r, iar traiectoria punctului P_1 fiind paralelă cu prima este un cerc tot de rază r cu centrul într-un punct O_1, unde $\overline{OO_1} = \overline{A_1P_1}$ (fig. 14.1*b*). Într-adevăr notînd $A_1P_1 = x_1$ coordonatele punctului P_1 sînt:

$$x = r\cos\omega t + x_1 \qquad y = r\sin\omega t$$

și eliminînd timpul t obținem ecuația traiectoriei

$$(x - x_1)^2 + y^2 = r^2.$$

Ecuațiile parametrice ale mișcării punctelor A_2 și P_2 sînt respectiv:

$$x = (2r - a)\cos\omega t \qquad y = a\sin\omega t$$

$$x = (2r - a)\cos\omega t + x_2 \qquad y = a\sin\omega t$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $A_2P_2 = x_2$ deci traiectoria punctului A_2 este elipsa cu centrul în O:

$$\frac{x^2}{(2r-a)^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

iar traiectoria punctului P_2 elipsa:

$$\frac{(x-x_2)^2}{(2r-a)^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

având centrul în O_2 unde $\overline{OO_2} = \overline{A_2P_2}$.

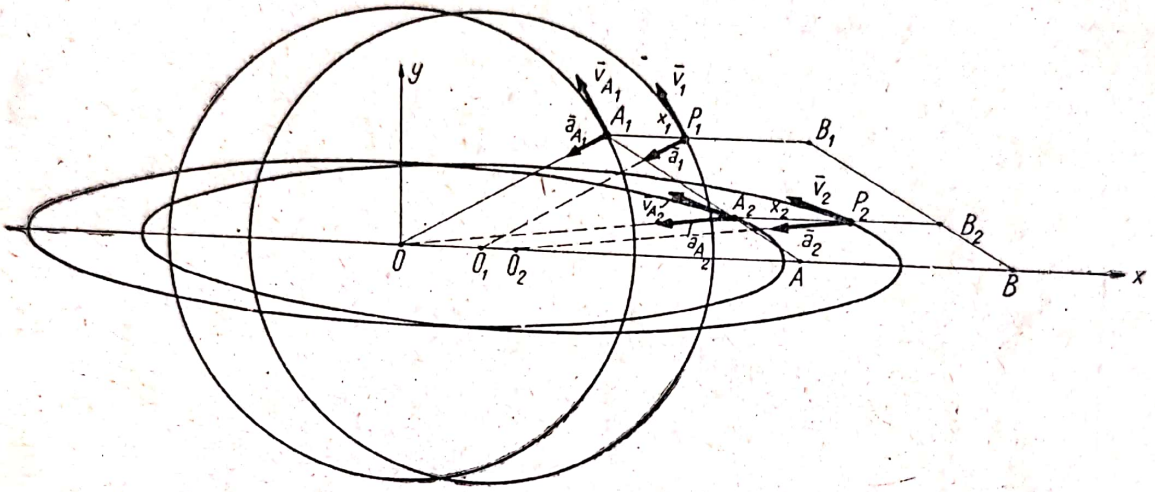


Fig. 14.1 *b*

Componentele vitezei și accelerației $\bar{v}_2$ și $\bar{a}_2$ sînt:

$$\dot{x} = -(2r-a)\,\omega \sin \omega t \qquad \dot{y} = a\omega \cos \omega t$$

$$\ddot{x} = -(2r-a)\,\omega^2 \cos \omega t \qquad \ddot{y} = -a\,\omega^2 \sin \omega t$$

deci:

$$\bar{a}_2 = -\omega^2 \overline{OA}_2 = -\omega^2 \overline{O_2P_2}$$

adică accelerațiile punctelor de pe bara A_2B_2 sînt îndreptate spre centrele elipselor descrise de aceste puncte (fig. 14.1 *b*).

14.2 Un biciclist merge cu viteza constantă u. Să se determine viteza $\bar{v}$ și accelerația $\bar{a}$ a unui punct P a unei pedale, cunoscînd lungimea r și viteza unghiulară constantă ω a manivelei AB a pedalei. Ce valori are viteza cînd $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

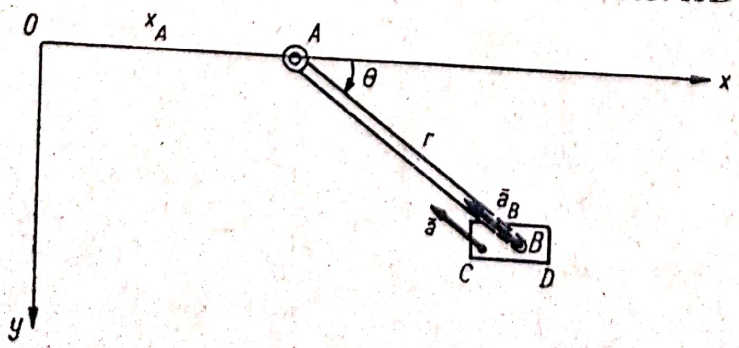


Fig. 14.2 *a*

Rezolvare. Pedala are o mișcare de translație deoarece muchia CD paralelă cu axa fixă Ox rămîne tot timpul mișcării orizontală (fig. 14.2 *a*). Deci conform (14.5):

$$\bar{v} = \bar{v}_B \qquad \bar{a} = \bar{a}_B \qquad (1)$$

unde B este capătul manivelei. Coordonatele punctului B sînt:

$$x = x_A + r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta. \tag{2}$$

Componentele vitezei şi acceleraţiei căutate sînt:

$$\dot{x} = u - r\,\omega\sin\theta \qquad \dot{y} = r\omega\cos\theta \tag{3}$$

$$\ddot{x} = -r\omega^2\cos\theta \qquad \ddot{y} = -r\,\omega^2\sin\theta \tag{4}$$

deoarece $\dot{x}_A = u$ iar $\dot{\theta} = \omega$. Cum $\overline{AB} = r\cos\theta\,\bar{i} + r\sin\theta\,\bar{j}$ acceleraţia

$$\bar{a} = -\omega^2\,\overline{AB} \tag{5}$$

este orientată pe direcţia AB spre A şi are modulul egal cu $\omega^2 r$.

Pentru $\theta = 0$, $\dot{x} = u$, $\dot{y} = r\omega$ deci $v = \sqrt{u^2 + r^2\omega^2}$, pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{x} = u - r\omega$, $\dot{y} = 0$ deci $v = |u - r\omega|$, pentru $\theta = \pi$, $\dot{x} = u$, $\dot{y} = -r\omega$, $v = \sqrt{u^2 + r^2\omega^2}$ iar pentru $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $\dot{x} = u + r\omega$, $\dot{y} = 0$, $v = u + r\omega$ (fig. 14.2 *b*).

Vectorial viteza $\bar{v}$ se poate pune sub forma:

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{\omega}\times\overline{AB} \tag{6}$$

unde $\bar{\omega} = \omega\bar{k}$, componenta $\bar{\omega}\times\overline{AB}$ fiind normală pe manivela AB şi egală ca modul cu ωr. Viteza este maximă pentru $\theta = \frac{3\pi}{2}$ cînd cele două componente au aceeaşi direcţie şi sens.

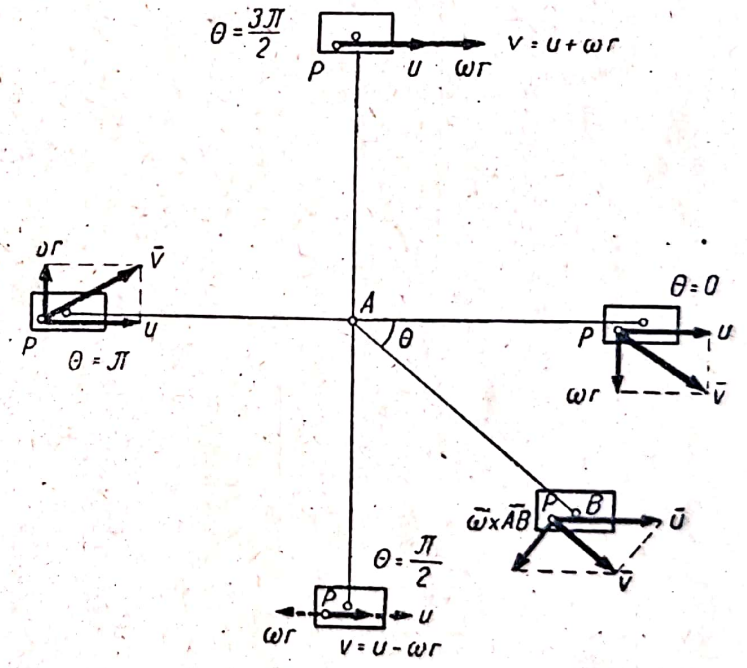


Fig. 14.2 *b*

14.3. Ţinînd seama numai de mişcarea de rotaţie a pămîntului în jurul axei polilor, să se determine viteza şi acceleraţia unui punct de pe suprafaţa pămîntului situat la latitudinea λ. Aplicaţie numerică pentru un punct situat în vecinătatea oraşului Bucureşti ($\lambda = \frac{\pi}{4}$ iar raza pămîntului $R = 6370$ km).

Rezolvare. Cu sistemul de axe din figura 14.3 avem:

$$\bar{\omega} = \omega\bar{k}$$

$$\bar{r} = R\cos\lambda\,\bar{i} + R\sin\lambda\,\bar{k}$$

deci viteza (14.7) este:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ R\cos\lambda & 0 & R\sin\lambda \end{vmatrix} = \omega R \cos\lambda \, \bar{j}$$

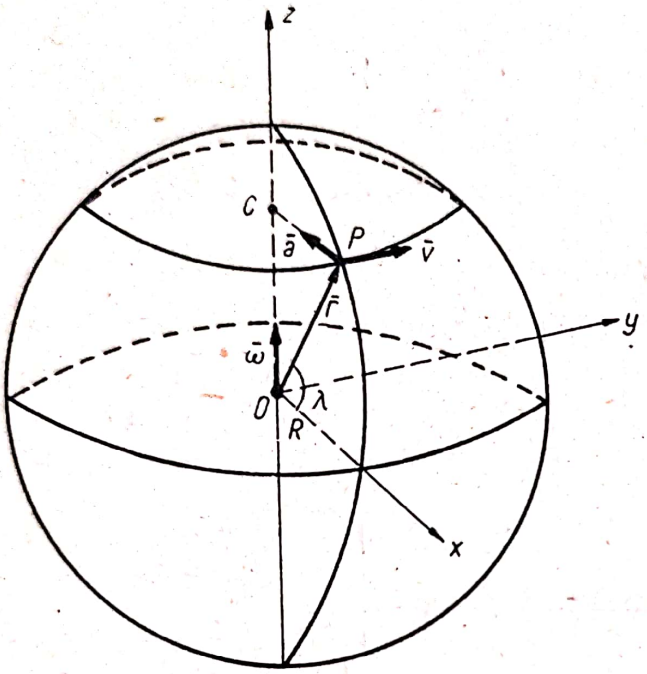


Fig. 14.3

adică viteza este tangentă la cercul paralel trecînd prin P. Viteza este nulă la poli $\left(\lambda = \pm\frac{\pi}{2}\right)$ și maximă la ecuator ($\lambda = 0$):

$$v = \omega R.$$

Cum accelerația unghiulară este neglijabilă $\dot{\bar{\omega}} \approx 0$ accelerația (14.8) este:

$$\bar{a} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega R\cos\lambda & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 R\cos\lambda \, \bar{i}$$

adică accelerația este normala la traiectorie și orientată spre centrul C al cercului paralel pe care se mișcă punctul.

Făcînd calculele numerice viteza unghiulară este:

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60}\ \mathrm{s}^{-1}$$

căci în 1 zi $= 24 \times 60 \times 60$ s pămîntul execută o rotație completă. Obținem:

$$v = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} \times 6\,370 \times 10^3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 328\ \mathrm{m/s} = 1\,180\ \mathrm{km/h}$$

$$a = \left(\frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60}\right)^2 \times 6\,370 \times 10^3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}0238\ \mathrm{m/s^2} = 2{,}38\ \mathrm{cm/s^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

14.4 Să se determine viteza unghiulară ω a unei roți cunoscînd vitezele v_1 și $v_2 > v_1$ a două puncte P_1 și P_2 situate pe aceeași rază, distanța dintre ele fiind l.

Rezolvare. Notînd ρ_1 și ρ_2 distanțele necunoscute de la punctele P_1 și P_2 la axa de rotație, avem conform (14.9):

$$v_1 = \omega\rho_1 \qquad v_2 = \omega\rho_2 \tag{1}$$

iar:

$$\rho_2 - \rho_1 = l. \tag{2}$$

Rezolvînd sistemul de ecuații (1) și (2) rezultă :

$$\omega = \frac{v_2 - v_1}{l}$$

iar distanțele ρ_1 și ρ_2 sînt :

$$\rho_1 = \frac{v_1 l}{v_2 - v_1} \qquad \rho_2 = \frac{v_2 l}{v_2 - v_1}.$$

14.5. Un volant de fontă nu poate depăși viteza periferică $v = 10$ m/s fără să se distrugă. Să se determine diametrul maxim d al său știind că el trebuie să se rotească cu o turație $n = 600$ rot/min. Care este accelerația, $\bar{a}$, a unui punct P situat pe periferia roții și care este spațiul parcurs de punctul P în 5 minute.

Rezolvare. Punctul P fiind la distanța $\rho = \frac{d}{2}$ de axa de rotație conform (14.9) :

$$v = \omega \frac{d}{2} \leqslant 10 \text{ m/s}.$$

Însă din (13.23) :

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \times 600}{30} = 62{,}8 \text{ s}^{-1}$$

deci :

$$d \leqslant \frac{2v}{\omega} = \frac{2 \times 10}{62{,}8} = 0{,}318 \text{ m}.$$

Accelerația (14.10) punctului P va fi normală căci ω fiind constant $a_\tau = 0$

$$a = a_\nu = \omega^2 \frac{d}{2} = 62{,}8^2 \times \frac{0{,}318}{2} = 628 \text{ m/s}^2.$$

Spațiul parcurs de punctul P este $s = \frac{d}{2}\theta$ unde numărul de rotații al volantului este:

$$\theta = 5 \times 600 = 3\,000 \text{ rot} = 2\pi \times 3\,000 \text{ rad}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci:

$$s = \frac{0{,}318}{2} \times 2\pi \times 3\,000 = 3\,000 \text{ m}.$$

14.6 Un disc de rază r se rotește uniform accelerat. În momentul inițial $t = 0$ un punct periferic P al său avea viteza v_0, iar la $t = t_1$ avea viteza v_1. Să se determine legile de mișcare ale discului $\theta = \theta(t)$, $\omega = \omega(t)$, $\dot{\omega} = \dot{\omega}(t)$ precum și viteza $\bar{v}$ și accelerația $\bar{a}$ a punctului P.
Aplicație numerică: $r = 0{,}4$ m, $v_0 = 0{,}8$ m/s, $v_1 = 1{,}2$ m/s, $t_1 = 2$s.

Rezolvare. Într-o mișcare de rotație uniform accelerată, accelerația unghiulară este constantă:

$$\dot{\omega} = c.$$

Prin integrare:

$$\omega = ct + c_1 \qquad \theta = \frac{ct^2}{2} + c_1 t$$

căci fără a particulariza problema putem presupune $\theta = 0$ pentru $t = 0$. Cum pentru $t = 0$, $\omega = c_1$ iar pentru $t = t_1$, $\omega = ct_1 + c_1$ din (14.9) avem:

$$v_0 = c_1 r \qquad v_1 = (ct_1 + c_1)r$$

de unde:

$$c_1 = \frac{v_0}{r} \qquad c = \frac{v_1 - v_0}{rt_1}$$

deci legile de mișcare sînt:

$$\theta = \frac{v_1 - v_0}{2rt_1} t^2 + \frac{v_0 t}{r}; \quad \omega = \frac{v_1 - v_0}{rt_1} t + \frac{v_0}{r}, \quad \dot{\omega} = \frac{v_1 - v_0}{rt_1}. \tag{1}$$

Viteza (14.9) a punctului P este tangentă la circumferința discului:

$$v = \omega r = \frac{v_1 - v_0}{t_1} t + v_0 \tag{2}$$

iar componentele (14.10) ale accelerației sînt:

$$a_\tau = \dot{\omega} r = \frac{v_1 - v_0}{t_1}. \qquad a_v = \omega^2 r = \frac{\left(\frac{v_1 - v_0}{t_1} t + v_0\right)^2}{r}. \tag{3}$$

Făcînd înlocuirile numerice în relațiile (1), (2) și (3) obținem:

$$\theta = 0{,}25t^2 + 2t \qquad \omega = (0{,}5t + 2) \text{ s}^{-1} \qquad \dot{\omega} = 0{,}5 \text{ s}^{-2}$$

$$v = (0{,}2t + 0{,}8) \text{ m/s}, \qquad a_\tau = 0{,}2 \text{ m/s}^2, \qquad a_v = \frac{(0{,}2t + 0{,}8)^2}{0{,}4} \text{ m/s}^2$$

unde timpul t se va înlocui în secunde.

Scanned with OKEN Scanner

14.7. Pe un disc de rază R articulat în centrul său O este înfășurat un fir de care atîrnă un corp A care pornind din repaus are o mișcare uniform accelerată cu accelerația γ (fig. 14.7). Să se exprime în funcție de distanța h cu care a coborît corpul A, viteza și accelerația unghiulară ω și $\dot{\omega}$ a discului precum și viteza $\bar{v}$, accelerația $\bar{a}$ a unui punct P situat la distanța $OP = r$ de axa de rotație a discului.

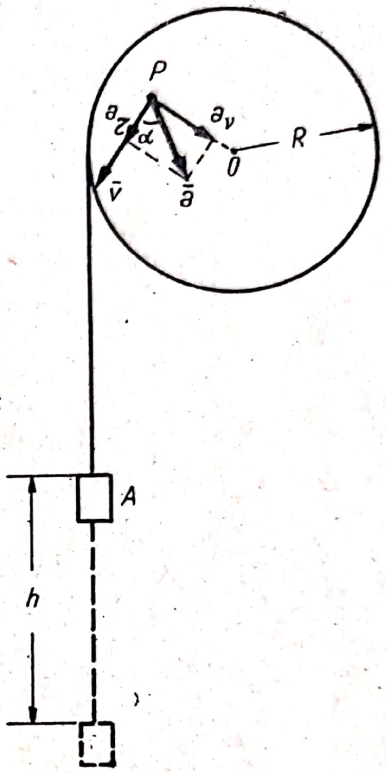


Fig. 14.7

Rezolvare. Cînd discul se rotește cu unghiul $d\theta$ corpul A coboară cu distanța $ds = Rd\theta$ deci viteza corpului A este:

$$v_A = \frac{ds}{dt} = R\omega, \qquad (1)$$

unde $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ este viteza unghiulară a discului. Deci accelerația punctului A este:

$$\gamma = R\dot{\omega}, \qquad (2)$$

discul are o mișcare uniform accelerată cu accelerația:

$$\dot{\omega} = \frac{\gamma}{R} = \text{const} \qquad (3)$$

și prin integrare ținînd seama și de condițiile inițiale $t = 0$, $\omega = 0$, $\theta = 0$ rezultă:

$$\omega = \frac{\gamma t}{R} \qquad \theta = \frac{\gamma t^2}{2R}. \qquad (4)$$

Pe de altă parte integrînd (2) obținem:

$$h = \frac{\gamma t^2}{2},$$

înlocuind $t = \sqrt{\frac{2h}{\gamma}}$ în ecuațiile (3) și (4) rezultă:

$$\theta = \frac{h}{r} \qquad \omega = \frac{\sqrt{2\gamma h}}{R} \qquad \dot{\omega} = \frac{\gamma}{R}. \qquad (5)$$

Viteza (14.9) a punctului P este normală pe OP și egală cu:

$$v = \omega r = \frac{r}{R}\sqrt{2\gamma h} \qquad (6)$$

iar componentele accelerației (14.10) sînt:

$$a_\tau = \dot{\omega} r = \frac{\gamma r}{R} \qquad a_\nu = \omega^2 r = \frac{2\gamma h r}{R^2}. \qquad (7)$$

Scanned with OKEN Scanner

Modulul acceleraţiei este:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_\nu^2} = \frac{\gamma r}{R}\sqrt{1 + \frac{4h^2}{R^2}} \tag{8}$$

iar unghiul α format de $\bar{a}$ cu viteza $\bar{v}$ creşte cu h fiind dat de relaţia:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_\nu}{a_\tau} = \frac{2h}{R}.$$

14.8. Un disc care se poate roti în jurul unei axe fixe, porneşte din stare de repaus, are o mişcare uniform accelerată pînă în momentul $t_1 = 6$ s atingînd viteza de regim $n = 900$ rot/min, merge apoi în regim timpul $t_2 = 10$ s, apoi este frînat avînd o mişcare uniform întîrziată şi se opreşte executînd în timpul frînării $N_3 = 225$ rot. Să se determine legile de mişcare ale discului, timpul t_3 de frînare şi numărul N de rotaţii efectuate în tot timpul mişcării.

Rezolvare. În prima fază cum $\dot{\omega} = C$, iar la $t = 0$, $\omega = 0$, $\theta = 0$ rezultă $\omega = Ct$, $\theta = \frac{Ct^2}{2}$. La sfîrşitul acestei faze pentru $t = t_1$, $\omega = \frac{n\pi}{30}$ deci:

$$C = \frac{n\pi}{30t_1}$$

deci legile de mişcare sînt:

$$\theta = \frac{n\pi}{60t_1}t^2;\quad \omega = \frac{n\pi}{30t_1}t;\quad \dot{\omega} = \frac{n\pi}{30t_1} \qquad \text{pentru } 0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{1}$$

Pentru $t = t_1$, $\theta = \theta_1$ unde:

$$\theta_1 = \frac{n\pi t_1}{60}$$

adică numărul de rotaţii din prima fază este:

$$N_1 = \frac{\theta_1}{2\pi} = \frac{nt_1}{120}. \tag{2}$$

În faza a doua mişcarea este uniformă $\dot{\omega} = 0$, $\omega = \frac{n\pi}{30} = \text{const}$, iar $\theta = \frac{n\pi}{30}t + C_1$. Cum pentru $t = t_1$, $\theta = \theta_1$ obţinem $C_1 = \theta_1 - \frac{n\pi t_1}{30}$ deci legile de mişcare sînt:

$$\theta = \frac{n\pi}{30}(t - t_1) + \frac{n\pi t_1}{60};\quad \omega = \frac{n\pi}{30};\ \dot{\omega} = 0 \qquad \text{pentru } t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + t_2. \tag{3}$$

Pentru $t = t_1 + t_2$, $\theta = \theta_2$ unde:

$$\theta_2 = \frac{n\pi(2t_2 + t_1)}{60}$$

iar numărul de rotaţii din faza a doua este:

$$N_2 = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = \frac{nt_2}{60}. \qquad (4)$$

În ultima mişcare este uniform întîrziată $\dot{\omega} = -C_2$ şi ţinînd seama de condiţiile iniţiale $t = t_1 + t_2$, $\omega = \frac{n\pi}{30}$, $\theta = \theta_2$ rezultă:

$$\theta = -\frac{C_2}{2}[t - (t_1 + t_2)]^2 + \frac{n\pi}{30}[t - (t_1 + t_2)] + \theta_2$$

$$\omega = -C_2[t - (t_1 + t_2)] + \frac{n\pi}{30}.$$

Discul se opreşte pentru $t = t_1 + t_2 + t_3$ cînd $\theta_3 = \theta_2 + 2\pi N_3$ şi $\omega = 0$. Ţinînd seama de (2), (3) şi (5) obţinem:

$$C_2 = \frac{n^2\pi}{3\,600\,N_3} \qquad t_3 = \frac{120\,N_3}{n}. \qquad (5)$$

Legile de mişcare în faza a treia sînt:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= -\frac{n^2\pi}{7\,200\,N_3}[t - (t_1 + t_2)]^2 + \frac{n\pi}{30}[t - (t_1 + t_2)] + \\ &\quad + \frac{n\pi}{60}(t_1 + 2t_2) \\ \omega &= -\frac{n^2\pi}{3\,600\,N_3}[t - (t_1 + t_2)] + \frac{n\pi}{30}; \quad \dot{\omega} = -\frac{n^2\pi}{3\,600\,N_3} \end{aligned}\right\} \text{pentru } t_1 + t_2 \leqslant t \leqslant t_1 + t_2 + t_3 \quad (6)$$

Numărul total de rotaţii este:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = \frac{nt_1}{120} + \frac{nt_2}{60} + N_3. \qquad (7)$$

Făcînd înlocuirile numerice în ecuaţiile (1) ... (7) obţinem legile de mişcare:

$\theta = 2{,}5\,\pi t^2$; $\omega = 5\,\pi t$; $\dot{\omega} = 5\,\pi$ $(0 \leqslant t \leqslant 6)$

$\theta = 30\,\pi\,t - 90\,\pi$; $\omega = 30\pi$; $\dot{\omega} = 0$ $(6 \leqslant t \leqslant 16)$

$\theta = -0{,}5\,\pi\,(t - 16)^2 + 30\,\pi(t - 16) + 390\,\pi$; $\omega = -\pi(t - 16) + 30\,\pi$;

$\dot{\omega} = -\pi$ $(16 \leqslant t \leqslant 46)$

deoarece $t_3 = 30$ s. Numărul de rotaţii este:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 45 + 150 + 225 = 420 \text{ rot.}$$

Scanned with OKEN Scanner

14.9. Un corp se roteşte cu viteza unghiulară constantă $\bar{\omega}$ în jurul dreptei $x = y = z$. Să se scrie expresia vitezei şi acceleraţiei unui punct oarecare al său.

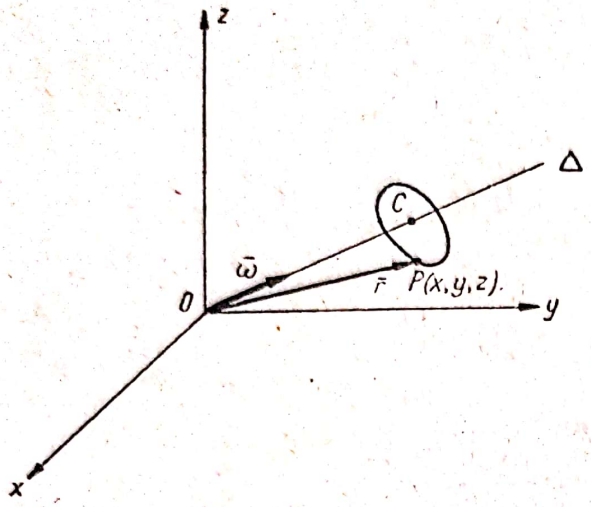


Fig. 14.9

Rezolvare. Cosinuşii directori ai dreptei Δ (fig. 14.9) de ecuaţie $x = y = z$ sînt egali cu $\frac{1}{\sqrt{3}}$ deci expresia analitică a vectorului $\bar{\omega}$ este:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{3}}\bar{i} + \frac{\omega}{\sqrt{3}}\bar{j} + \frac{\omega}{\sqrt{3}}\bar{k}.$$

Viteza (14.7) a punctului P este:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\omega}{\sqrt{3}} & \frac{\omega}{\sqrt{3}} & \frac{\omega}{\sqrt{3}} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{\omega}{\sqrt{3}}[(z-y)\bar{i} + (x-z)\bar{j} + (y-x)\bar{k}].$$

Cum $\bar{\omega}$ este constant $\dot{\bar{\omega}} = 0$ şi deci acceleraţia (14.8) a punctului P este:

$$\bar{a} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\omega}{\sqrt{3}} & \frac{\omega}{\sqrt{3}} & \frac{\omega}{\sqrt{3}} \\ \frac{\omega}{\sqrt{3}}(z-y) & \frac{\omega}{\sqrt{3}}(x-z) & \frac{\omega}{\sqrt{3}}(y-x) \end{vmatrix} = \frac{\omega^2}{3}[(y+z-2x)\bar{i} + (z+x-2y)\bar{j} + (x+y-2z)\bar{k}]$$

acceleraţia fiind normală pe traiectoria punctului P, dirijată spre centrul cercului CP descris de punct.

14.10. Cunoscînd viteza $\bar{v}$ a unui punct P al unui solid avînd o mişcare elicoidală, unghiul φ format de $\bar{v}$ cu axa Δ a mişcării elicoidale şi distanţa r de la punctul P la axa Δ, să se determine viteza $\bar{v}_0$ a punctelor axei Δ (viteza de translaţie) şi viteza unghiulară $\bar{\omega}$ a solidului.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Alegînd axa Δ ca axă Oz și axa Ox astfel ca punctul P să se găsească pe axa Ox (fig. 14.10) din (14.2) și (14.11) avem:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = v_0 \bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega r \bar{j} + v_0 \bar{k}.$$

Deci proiecțiile vitezei $\bar{v}$ sînt:

$$v_x = 0,$$
$$v_y = v \sin \varphi = \omega r$$
$$v_z = v \cos \varphi = v_0$$

de unde:

$$v_0 = v \cos \varphi \qquad \omega = \frac{v \sin \varphi}{r}.$$

Aceleași rezultate se puteau obține cu ajutorul formulei (14.12) în care $\rho = r$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

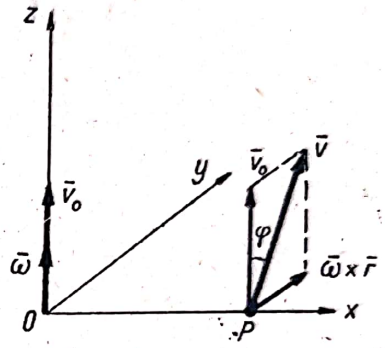


Fig. 14.10

14.11. Un șurub de diametru $d = 2$ cm avînd pasul $p = 4$ mm se învîrtește uniform cu viteza $n = 90$ rot/min. Să se determine viteza de înaintare v_0 a șurubului într-o piuliță fixă și viteza $\bar{v}$ și accelerația $\bar{a}$ a unui punct P situat pe periferia lui.

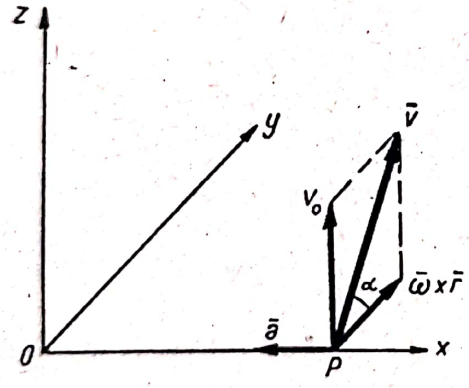


Fig. 14.11

Rezolvare. Din relația (14.13):

$$p = 2\pi \frac{v_0}{\omega}$$

determinăm viteza de înaintare a șurubului

$$v_0 = \frac{\omega p}{2\pi} \qquad (1)$$

unde $\omega = \frac{n\pi}{30}$, deci:

$$v_0 = \frac{np}{60} = \frac{90 \times 0{,}4}{60} = 0{,}6 \text{ cm/s}. \qquad (2)$$

Alegînd axele ca în figura 14.11, axa Oz axa șurubului, iar punctul P situat pe axa Ox din (14.2), (14.3) și (14.11) ținînd seama că $\bar{a}_0 = 0$ și $\dot{\bar{\omega}} = 0$ (deoarece $\bar{v}_0$ și $\bar{\omega}$ sînt vectori constanți) avem:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{v}_0 + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \frac{d}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\omega d}{2} \bar{j} + \frac{\omega p}{2\pi} \bar{k} \qquad (3)$$

$$\bar{a} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \frac{\omega d}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\omega^2 d}{2}\bar{i}. \qquad (4)$$

Deci modulul vitezei este:

$$v = \frac{\omega}{2\pi}\sqrt{(\pi d)^2 + p^2} = \frac{n}{60}\sqrt{(\pi d)^2 + p^2} = 9{,}45 \text{ cm/s}$$

și formează unghiul α cu planul normal pe axa cilindrului unde:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_z}{v_y} = \frac{\frac{\omega p}{2\pi}}{\frac{\omega d}{2}} = \frac{p}{\pi d} = 0{,}0637.$$

Accelerația este normală pe suprafața laterală a șurubului îndreptată spre axa șurubului și avînd modulul:

$$a = \omega^2 \frac{d}{2} = \frac{\pi^2 n^2 d}{1\,800} = 88{,}83 \text{ cm/s}^2.$$

14.12. Două puncte P_1 și P_2 ale unui șurub sînt situate pe același diametru la distanțele ρ_1 și ρ_2 de axa șurubului. Cunoscînd pasul p al șurubului, să se determine relația dintre distanțele ρ_1 și ρ_2 știind că vitezele $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ ale acestor puncte sînt perpendiculare.

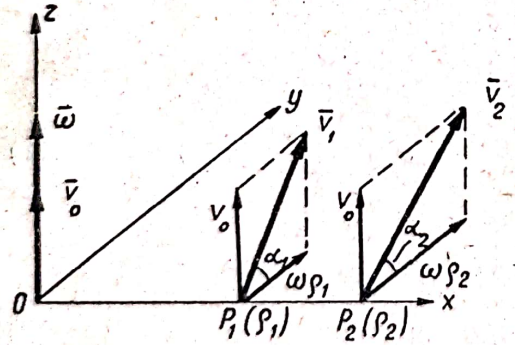


Fig. 14.12

Rezolvare. Alegînd axele ca în fig. 14.12, axa Oz axa șurubului și Ox diametrul pe care se găsesc punctele P_1 și P_2 din (14.2) avem:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OP}_1 = v_0\bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \rho_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

deci:

$$\bar{v}_1 = \omega\rho_1\bar{j} + v_0\bar{k}.$$

Analog:

$$\bar{v}_2 = \omega\rho_2\bar{j} + v_0\bar{k}.$$

Dacă $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ sînt perpendiculari, produsul lor scalar este nul adică:

$$\bar{v}_1\bar{v}_2 = \omega^2\rho_1\rho_2 + v_0^2 = 0$$

de unde:

$$\rho_1 \rho_2 = -\frac{v_0^2}{\omega^2}.$$

Însă conform (14.13) $\frac{v_0}{\omega} = \frac{p}{2\pi}$ deci:

$$\rho_1 \rho_2 = -\frac{p^2}{4\pi^2}.$$

Cum acest produs este negativ înseamnă că punctele P_1 și P_2 nu se găsesc de aceeași parte a axei Ox, vectorii $\overline{OP}_1$ și $\overline{OP}_2$ fiind opuși.

Problema se putea rezolva și cu ajutorul formulei (14.12) în care $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{v_0}{\omega\rho_1}$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{v_0}{\omega\rho_2}$ iar $\operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2 = -1$ căci vectorii sînt perpendiculari.

14.13. Un șurub avînd raza r și panta filetului α se înșurubează într-o piuliță fixă, avînd o mișcare uniform accelerată (cu accelerația a_0 a punctelor de pe axa șurubului constantă). Știind că șurubul pornește din stare de repaus, să se studieze mișcarea șurubului determinîndu-se viteza și accelerația unui punct P situat la distanța ρ de axa șurubului.

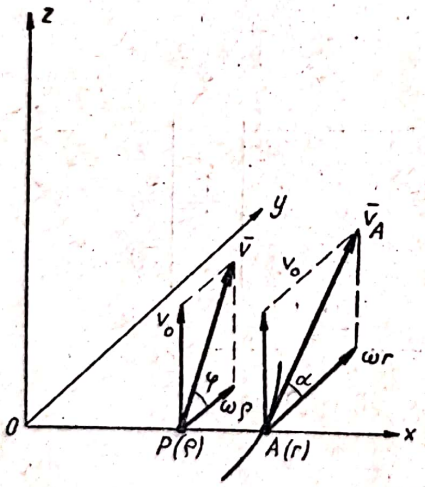


Fig. 14.13 *a*

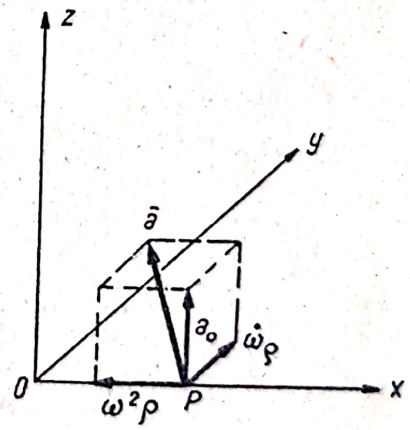


Fig. 14.13 *b*

Rezolvare. Cu sistemul de axe din figura 14.13 *a*, axa Oz axa șurubului, axa Ox trecînd prin punctul P, accelerația și viteza punctului O sînt:

$$\bar{a}_0 = a_0\bar{k} \qquad \bar{v}_0 = v_0\bar{k}. \tag{1}$$

Însă $\dot{v}_0 = a_0$ și integrînd, cum la $t = 0$, $v_0 = 0$ rezultă:

$$v_0 = a_0 t. \tag{2}$$

Viteza punctului A de pe periferia şurubului este conform (14.2):

$$\bar{v}_A = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OA} = a_0 t\bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{v}_A = \omega r\bar{j} + a_0 t\bar{k}.$$

Cum viteza $\bar{v}_A$ este tangentă la filetul şurubului avem:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_{Az}}{v_{Av}} = \frac{a_0 t}{\omega r}$$

de unde:

$$\omega = \frac{a_0 t}{r \operatorname{tg}\alpha} \tag{3}$$

şi deci vectorii viteză şi acceleraţie unghiulară sînt:

$$\bar{\omega} = \frac{a_0 t}{r \operatorname{tg}\alpha}\bar{k} \qquad \dot{\bar{\omega}} = \frac{a_0}{r \operatorname{tg}\alpha}\bar{k}. \tag{4}$$

Mişcarea de rotaţie a şurubului este deci uniform accelerată căci acceleraţia unghiulară este constantă. Viteza (14.2) şi acceleraţia (14.3) punctului P vor fi:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{\rho} = \omega\rho\bar{j} + v_0\bar{k} = \frac{\rho a_0 t}{r \operatorname{tg}\alpha}\bar{j} + a_0 t\bar{k} \tag{5}$$

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) = a_0\bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \dot{\omega} \\ \rho & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega\rho & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\omega^2\rho\bar{i} + \dot{\omega}\rho\bar{j} + a_0\bar{k} = -\frac{\rho a_0^2 t^2}{r^2 \operatorname{tg}^2\alpha}\bar{i} + \frac{\rho a_0}{r \operatorname{tg}\alpha}\bar{j} + a_0\bar{k}. \tag{6}$$

Modulul vitezei punctului P este:

$$v = \sqrt{v_0^2 + \omega^2\rho^2} = a_0 t\sqrt{\frac{\rho^2}{r^2 \operatorname{tg}^2\alpha} + 1} \tag{7}$$

iar unghiul φ (fig. 14.13 *a*) este dat de:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_0}{\omega\rho} = \frac{r}{\rho}\operatorname{tg}\alpha. \tag{8}$$

Modulul acceleraţiei este:

$$a = \sqrt{\omega^4\rho^2 + \dot{\omega}^2\rho^2 + a_0^2} = a_0\sqrt{\frac{\rho^2 a_0^2 t^4}{r^4 \operatorname{tg}^4\alpha} + \frac{\rho^2}{r^2 \operatorname{tg}^2\alpha} + 1}. \tag{9}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă mişcarea ar fi uniformă, componentele acceleraţiei în lungul axei şurubului $a_z = a_0$ şi pe normala la raza OP, $a_\nu = \frac{\rho a_0}{r \operatorname{tg} \alpha}$ ar fi nule şi acceleraţia ar fi radială $\bar{a} = -\omega^2 \rho \bar{i}$.

14.14. Un şurub diferenţial are construcţia din figura 14.14, pasul primului filet fiind p_1 şi pasul filetului al doilea care mişcă culisa fiind p_2. Să se determine viteza v a culisei dacă primul filet este pe dreapta şi al doilea filet pe dreapta sau pe stînga, iar şurubul se învîrteşte astfel încît primul filet se înşurubează făcînd n rotaţii pe minut.

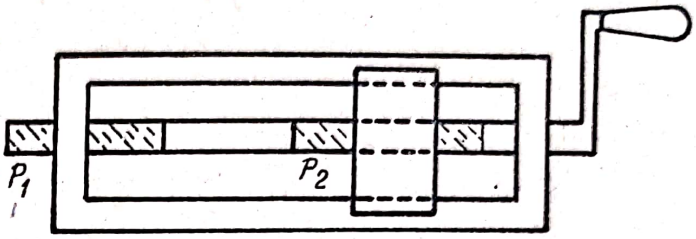


Fig. 14.14

Rezolvare. Rotind mînerul cu un unghi $d\theta$ şurubul înaintează cu distanţa dx_1 iar culisa se deplasează faţă de şurub în sens invers dacă filetul este drept, cu distanţa dx_2 unde:

$$dx_1 = \frac{p_1}{2\pi} d\theta \qquad dx_2 = \frac{p_2}{2\pi} d\theta.$$

Deplasarea absolută a culisei va fi în acest caz:

$$dx = dx_1 - dx_2 = \frac{p_1 - p_2}{2\pi} d\theta. \tag{1}$$

Cum viteza culisei este $v = \frac{dx}{dt}$ şi viteza unghiulară a şurubului $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ din (1) obţinem:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{2\pi} \omega. \tag{2}$$

Însă conform (13.23) $\omega = \frac{n\pi}{30}$ deci:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{60} n. \tag{2'}$$

Cînd filetul al doilea este stîng, culisa se deplasează faţă de şurub în acelaşi sens, deci:

$$dx = dx_1 + dx_2 = \frac{p_1 + p_2}{2\pi} d\theta \tag{3}$$

iar viteza culisei este:

$$v = \frac{p_1 + p_2}{2\pi} \omega = \frac{p_1 + p_2}{60} n. \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

14.15 Să se arate că proiecțiile vitezelor a două puncte ale unui rigid pe dreapta Δ care le unește sînt egale între ele.

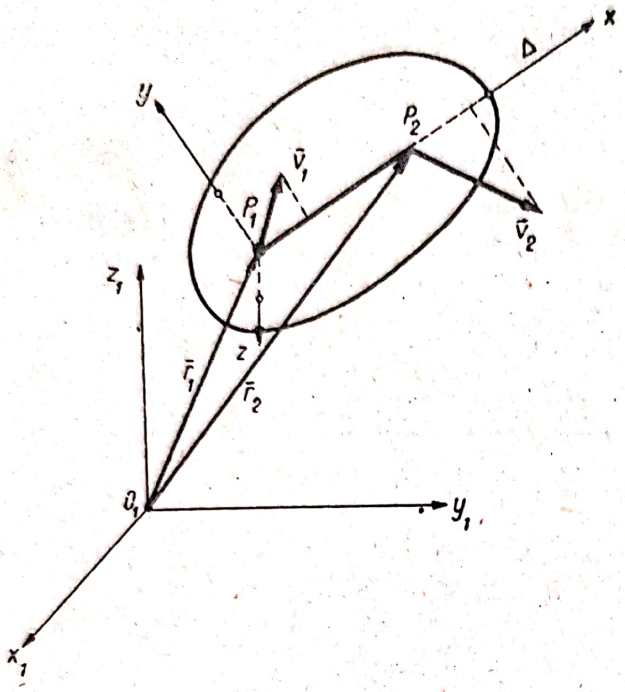


Fig. 14.15

Rezolvare. Considerînd un sistem de referință fix T_1 și un sistem mobil T $(Oxyz)$ cu originea în punctul P_1 și axa P_1x coincizînd cu Δ din (14.2) avem:

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_1 + \bar{\omega} \times \bar{r} \qquad (1)$$

unde $\bar{r} = \overline{P_1P_2}$. Multiplicînd scalar relația (1) cu $\bar{r}$, cum produsul $(\bar{\omega} \times \bar{r})\,\bar{r} = 0$ rezultă:

$$\bar{v}_2\bar{r} = \bar{v}_1 r \qquad (2)$$

și cum $\bar{r} = d\bar{i}$ unde d este distanța dintre punctele P_1 și P_2 din (2) rezultă:

$$\bar{v}_2\,\bar{i} = \bar{v}_1\,\bar{i} \qquad (3)$$

adică proiecțiile vectorilor $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ pe axa Δ (P_1x) sînt egale.

Se poate demonstra acest rezultat pornind direct de la condiția că punctele P_1 și P_2 aparțin unui rigid adică modulul vectorului $\overline{P_1P_2}$ este constant. Însă (fig. 14.15):

$$\overline{P_1P_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \bar{r}$$

deci:

$$(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)^2 = d^2. \qquad (4)$$

Derivînd relația (4) în raport cu timpul, cum $\dot{\bar{r}}_1 = \bar{v}_1$ și $\dot{\bar{r}}_2 = \bar{v}_2$ rezultă:

$$2(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\,(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = 0$$

sau:

$$\bar{v}_2\,\bar{r} = \bar{v}_1\,\bar{r} \qquad (2)$$

de unde obținem condiția (3).

14.16 Să se arate că extremitățile vectorilor viteză $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ și $\bar{v}_3$ a trei puncte coliniare P_1, P_2 și P_3 ale unui rigid sînt coliniare (vectorii viteză fiind reprezentați la aceeași scară).

Rezolvare. Reprezentînd vitezele la aceeași scară vom avea:

$$\overline{P_1A_1} = k\bar{v}_1 \qquad \overline{P_2A_2} = k\bar{v}_2 \qquad \overline{P_3A_3} = k\bar{v}_3. \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Va trebui să demonstrăm că punctele A_1, A_2 și A_3 sînt coliniare adică:

$$\overline{A_1A_2} = \lambda\,\overline{A_1A_3}\,. \qquad (2)$$

Conform enunțului punctele P_1, P_2 și P_3 sînt coliniare adică:

$$\overline{P_1P_2} = \mu\,\overline{P_1P_3} \qquad (3)$$

sau exprimînd vectorii $\overline{P_1P_2}$ și $\overline{P_1P_3}$ în funcție de vectorii de poziție în raport cu triedrul fix T_1 relațiile (2) și (3) se pot scrie:

$$(\bar{r}_2 + \overline{P_2A_2}) - (\bar{r}_1 + \overline{P_1A_1}) = \lambda\,[(\bar{r}_3 + \overline{P_3A_3}) - (\bar{r}_1 + \overline{P_1A_1})] \qquad (2')$$

$$\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \mu\,(\bar{r}_3 - \bar{r}_1)\,. \qquad (3')$$

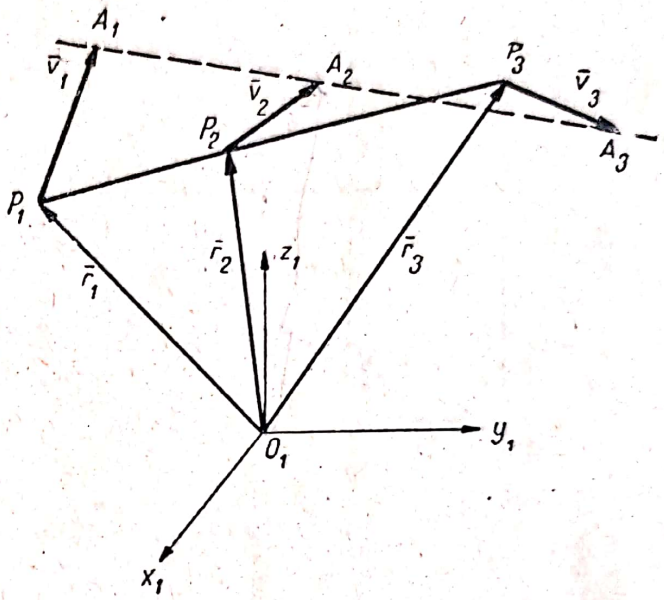


Fig. 14.16

Prin derivarea relației (3′) în raport cu timpul, cum $\dot{\bar{r}}_i = \bar{v}_i$ ($i = 1, 2, 3$) și cum $\mu = \text{const}$ obținem:

$$\bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \mu\,(\bar{v}_3 - \bar{v}_1)$$

și amplificînd cu constanta k conform (1):

$$\overline{P_2A_2} - \overline{P_1A_1} = \mu\,(\overline{P_3A_3} - \overline{P_1A_1}). \qquad (4)$$

Proprietatea căutată rezultă imediat prin însumarea relațiilor (3′) și (4):

$$(\bar{r}_2 + \overline{P_2A_2}) - (\bar{r}_1 + \overline{P_1A_1}) = \mu\,[(\bar{r}_3 + \overline{P_3A_3}) - (\bar{r}_1 + \overline{P_1A_1})]. \qquad (5)$$

Relația (5) este identică cu (2′) și exprimă condiția de coliniaritate căutată. Mai mult decît atît

$$\lambda = \mu$$

deci punctul A_2 împarte segmentul A_1A_3 în același raport ca punctul P_2 segmentul P_1P_3.

Proprietatea demonstrată nu este valabilă numai în cazul rigidului ci în general cînd raportul $\mu = \dfrac{P_1P_2}{P_1P_3} = \text{const}$, adică dacă trei puncte coliniare se mișcă astfel încît raportul distanțelor dintre ele rămîne constant, extremitățile vectorilor viteză (reprezentați la aceeași scară) sînt coliniare.

14.17 Cunoscînd la un moment dat vitezele punctelor O și A:

$$\bar{v}_0 = -u\,\bar{i} + u\,\bar{j} + u\,\bar{k} \qquad \bar{v}_A = -u\,\bar{i} + u\,\bar{j} \qquad (1)$$

și modulul vitezei punctului B:

$$|\bar{v}_B| = u\sqrt{2} \tag{2}$$

ale unui cub de latură l să se determine viteza unghiulară $\bar{\omega}$ și axa instantanee a mișcării elicoidale (fig. 14.17).

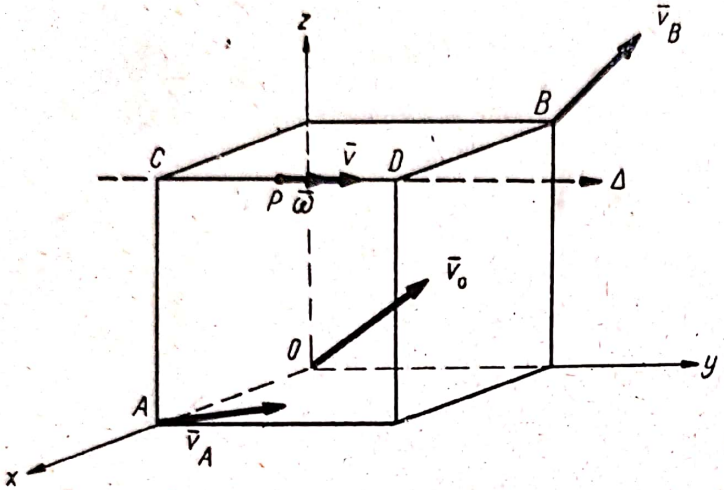


Fig. 14.17

Rezolvare. Notînd ω_x, ω_y, ω_z proiecțiile vectorului din (14.2) avem:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OA} = -u\bar{i} +$$

$$+u\bar{j} + u\bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ l & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -u\bar{i} + (u + l\omega_z)\bar{j} +$$

$$+(u - l\omega_y)\bar{k} \tag{3}$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OB} = -u\bar{i} + u\bar{j} + u\bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & l & l \end{vmatrix} =$$

$$= (-u + l\omega_y - l\omega_z)\bar{i} + (u - l\omega_x)\bar{j} + (u + l\omega_x)\bar{k}. \tag{4}$$

Din (1) și (3) proiectînd pe axa Ox avem $-u = -u$ căci proiecțiile vitezelor $\bar{v}_0$ și $\bar{v}_A$ pe OA sînt egale (v. problema 14.15) iar proiectînd pe Oy și Oz avem:

$$u = u + l\omega_z \qquad 0 = u - l\omega_y$$

de unde:

$$\omega_z = 0 \qquad \omega_y = \frac{u}{l}. \tag{5}$$

Din (2) și (4) ținînd seama de (5) avem:

$$u\sqrt{2} = \sqrt{(u - l\omega_x)^2 + (u + l\omega_x)^2}$$

de unde rezultă:

$$\omega_x = 0$$

deci

$$\bar{\omega} = \frac{u}{l}\bar{j}.$$

Ecuațiile (14.15) ale axei instantanee a mișcării elicoidale Δ sînt:

$$\frac{-u+\frac{u}{l}z}{0}=\frac{u}{\frac{u}{l}}=\frac{u-\frac{u}{l}x}{0}$$

adică:

$$x=l \qquad z=l,$$

axa Δ fiind muchia CD a cubului. Viteza unui punct oarecare P al axei Δ este:

$$\bar{v}=\bar{v}_0+\bar{\omega}\times\overline{OP}=u\bar{j}$$

și este coliniară cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$.

Se poate verifica relația (14.14) că proiecția vitezei pe vectorul $\bar{\omega}$ este constantă:

$$\bar{v}_0\,\bar{\omega}=\bar{v}_A\,\bar{\omega}=\bar{v}_B\,\bar{\omega}=\bar{v}\,\bar{\omega}=\frac{u^2}{l}\cdot$$

14.18. Un solid se mișcă astfel încît un punct O al său se mișcă uniform cu viteza $\bar{v}_0$ pe o elice circulară, raza cilindrului fiind r și panta elicei α iar triedrul $T\,(Oxyz)$ solidar cu solidul are axele Ox, Oy și Oz pe direcția tangentei, normalei principale (normala la cilindru) și binormalei la elice. Să se determine viteza și accelerația unghiulară $\bar{\omega}$ și $\dot{\bar{\omega}}$ a solidului, accelerația $\bar{a}_0$ a originii O și poziția axei instantanee a mișcării elicoidale a solidului.

Rezolvare. Coordonatele (x_0, y_0, z_0) ale punctului O în raport cu triedrul fix $T_1(O_1x_1y_1z_1)$ din figura 14.18 sînt:

$$x_0=r\cos\theta \qquad y_0=r\sin\theta$$

$$z_0=r\theta\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad (1)$$

unde $\theta=\sphericalangle(x_1,\ \overline{O_1P})$, punctul P fiind proiecția punctului O pe planul $x_1O_1y_1$.

Componentele vitezei $\bar{v}_0$ vor fi:

$$\dot{x}_0=-r\sin\theta\cdot\dot{\theta};$$

$$\dot{y}_0=r\cos\theta\cdot\dot{\theta};$$

$$\dot{z}_0=r\dot{\theta}\,\mathrm{tg}\,\alpha, \qquad (2)$$

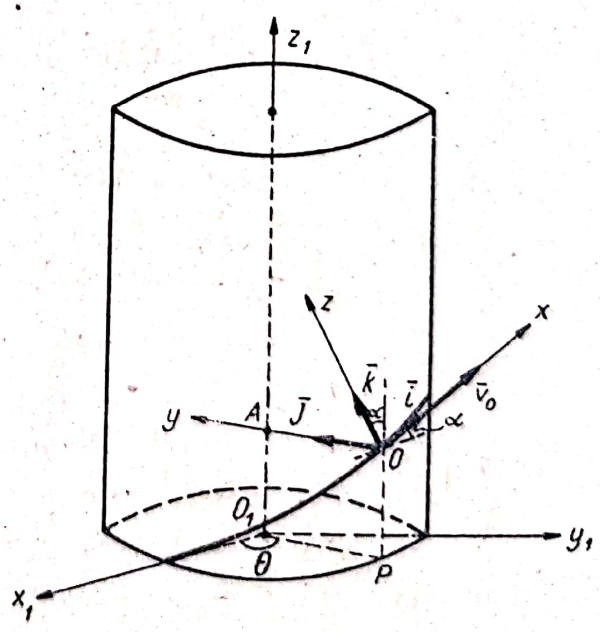


Fig. 14.18

modulul vitezei este:

$$v_0 = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2} = \frac{r\dot{\theta}}{\cos\alpha} \tag{3}$$

și deci versorul $\bar{i}$ al vitezei are proiecțiile $\left(\frac{\dot{x}_0}{v_0}, \frac{\dot{y}_0}{v_0}, \frac{\dot{z}_0}{v_0}\right)$ adică:

$$\bar{i} = -\cos\alpha \sin\theta\, \bar{i}_1 + \cos\alpha \cos\theta\, \bar{j}_1 + \sin\alpha\, \bar{k}_1.$$

Expresiile analitice ale versorilor $\bar{j}$ (coliniar cu $\overline{PO_1}$) și $\bar{k}$ $(= \bar{i} \times \bar{j})$ sînt:

$$\bar{j} = -\cos\theta\, \bar{i}_1 - \sin\theta\, \bar{j}_1$$

$$\bar{k} = \sin\alpha \sin\theta\, \bar{i}_1 - \sin\alpha \cos\theta\, \bar{j}_1 + \cos\alpha\, \bar{k}_1.$$

Pentru a determina proiecțiile (14.4) ale vitezei unghiulare calculăm derivatele:

$$\dot{\bar{i}} = -\cos\alpha \cos\theta \cdot \dot{\theta}\, \bar{i}_1 - \cos\alpha \sin\theta \cdot \dot{\theta}\, \bar{j}_1$$

$$\dot{\bar{j}} = \sin\theta \cdot \dot{\theta}\, \bar{i}_1 - \cos\theta \cdot \dot{\theta}\, \bar{j}_1$$

$$\dot{\bar{k}} = \sin\alpha \cos\theta \cdot \dot{\theta}\, \bar{i}_1 + \sin\alpha \sin\theta \cdot \dot{\theta}\, \bar{j}_1$$

deci proiecțiile (14.4) ale vitezei unghiulare $\bar{\omega}$ sînt:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\bar{j}}\,\bar{k} = -\dot{\bar{k}}\,\bar{j} = \sin\alpha \sin^2\theta \cdot \dot{\theta} + \sin\alpha \cos^2\theta \cdot \dot{\theta} = \sin\alpha \cdot \dot{\theta} \\
\omega_y &= \dot{\bar{k}}\,\bar{i} = -\dot{\bar{i}}\,\bar{k} = -\sin\alpha\cos\alpha \sin\theta \cos\theta \cdot \dot{\theta} + \sin\alpha \cos\alpha \sin\theta \cos\theta \cdot \dot{\theta} = 0 \\
\omega_z &= \dot{\bar{i}}\,\bar{j} = -\dot{\bar{j}}\,\bar{i} = \cos\alpha \cos^2\theta \cdot \dot{\theta} + \cos\alpha \sin^2\theta \cdot \dot{\theta} = \cos\alpha \cdot \dot{\theta}
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

adică:

$$\bar{\omega} = \sin\alpha\, \dot{\theta}\, \bar{i} + \cos\alpha\, \dot{\theta}\, \bar{k} = \dot{\theta}\, \bar{k}_1 \tag{5}$$

deoarece $\bar{i} \sin\alpha + \bar{k} \cos\alpha = \bar{k}_1$. Viteza unghiulară este un vector constant atît ca direcție (paralel cu axa fixă $O_1 z_1$) cît și ca modul:

$$\dot{\theta} = \frac{v_0 \cos\alpha}{r} \tag{6}$$

deci accelerația unghiulară este nulă:

$$\dot{\bar{\omega}} = 0. \tag{7}$$

Derivînd relațiile (2) obținem componentele accelerației $\bar{a}_0$:

$$\ddot{x}_0 = -r \cos\theta\, \dot{\theta}^2 \qquad \ddot{y}_0 = -r \sin\theta\, \dot{\theta}^2 \qquad \ddot{z}_0 = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

deci:

$$\bar{a}_0 = r\dot{\theta}^2\,(-\cos\theta\,\bar{i}_1 - \sin\theta\,\bar{j}_1) = r\dot{\theta}^2\bar{j} = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{r}\,\bar{j} \qquad (8)$$

accelerația $\bar{a}_0$ fiind normală pe cilindru, orientată spre axa cilindrului, modulul accelerației fiind constant.

Mișcarea triedrului mobil este caracterizată de vectorii:

$$\bar{v}_0 = v_0\bar{i}, \quad \bar{a}_0 = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{r}\,\bar{j}, \quad \bar{\omega} = \frac{v_0\cos\alpha\sin\alpha}{r}\,\bar{i} + \frac{v_0\cos^2\alpha}{r}\,\bar{k}, \quad \dot{\bar{\omega}} = 0. \qquad (9)$$

Ecuațiile axei instantanee Δ a mișcării elicoidale (14.15) sînt:

$$\frac{v_0 - \frac{v_0\cos^2\alpha}{r}\,y}{\frac{v_0\cos\alpha\sin\alpha}{r}} = \frac{-\frac{v_0\cos\alpha\sin\alpha}{r}\,z + \frac{v_0\cos^2\alpha}{r}\,x}{0} = \frac{\frac{v_0\cos\alpha\sin\alpha}{r}\,y}{\frac{v_0\cos^2\alpha}{r}}$$

de unde obținem:

$$x = z\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad y = r \qquad (10)$$

adică axa Δ este fixă în raport cu triedrul mobil T fiind axă permanentă a mișcării elicoidale. Fiind coliniară cu $\bar{\omega}$ (cu Oz_1) și trecînd prin punctul A de coordonate $x = 0$, $y = r$, $z = 0$ situat pe axa Oz_1, axa Δ este chiar axa Oz_1, axa cilindrului. Axa Δ fiind fixă atît în raport cu T_1, cît și cu T axoidele mobilă și fixă se reduc la axa Δ, axa cilindrului.

Viteza punctului A situat pe Δ este coliniară cu $\bar{\omega}$ iar din (14.14) $\bar{v}_A \cdot \bar{\omega} = \bar{v}_0 \cdot \bar{\omega}$ avem:

$$v_A\,\frac{v_0\cos\alpha}{r} = v_0^2\,\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{r}$$

deci:

$$\bar{v}_A = v_0\sin\alpha\,\bar{k}_1.$$

Putem raporta mișcarea solidului la un triedru cu originea în A și una dintre axe, axa Δ a cilindrului. În acest caz avem:

$$\bar{v}_A = v_0\sin\alpha\bar{k}_1 \quad \bar{\omega} = \frac{v_0\cos\alpha}{r}\,\bar{k}_1 \quad \bar{a}_A = 0 \quad \dot{\bar{\omega}} = 0$$

deci solidul are o mișcare de șurub uniformă căci $\frac{v_A}{\omega} = r\,\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{const.}$ iar $v_A = \mathrm{const.}$

Scanned with OKEN Scanner

14.19. Să se determine viteza $\bar{v}$ și accelerația $\bar{a}$ a punctului P al scaunului unui scrînciob cunoscînd raza $R = 10$ m, dimensiunile scaunului $2b = 1{,}5$ m, $2h = 1$ m și știind că roata execută 1 rotație pe minut.

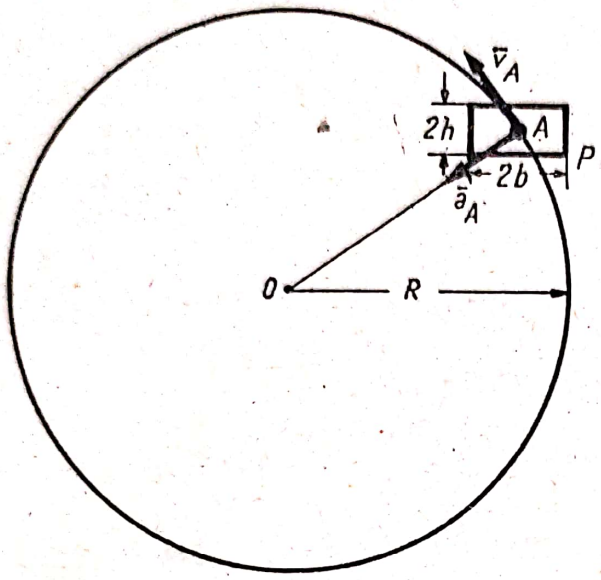


Fig. 14.19

Răspuns: Scaunul are o mișcare de translație, deci $\bar{v} = \bar{v}_A$, $\bar{a} = \bar{a}_A$ unde $v_A = R\omega = 1{,}05$ m/s iar $a_A = R\,\omega^2 = 0{,}11$ m/s^2 și sînt orientate ca în figura 14.19.

14.20. Să se calculeze timpul dintre două suprapuneri succesive ale limbii orare și limbii minutare ale unui ceas.

Răspuns: $t = \dfrac{3\,600 \times 12}{11}$ s $=$

$= 1^h\,5'\,27''\,3/11.$

14.21. Un disc de diametru $D = 0{,}8$ m se rotește uniform întîrziat. La $t = 4$ s, viteza sa periferică este $v = 1{,}6$ m/s și la $t = 24$ s se oprește. Să se determine accelerația unghiulară $\dot{\omega}$, viteza unghiulară inițială ω_0 la $t = 0$, numărul N de rotații executat de la $t = 0$ pînă la oprire.

Răspuns: $\omega = -0{,}2$ s^{-2}, $\omega_0 = 4{,}8$ s^{-1}, $N = \dfrac{57{,}6}{2\pi} = 9{,}17$ rot.

14.22. O colivie de mină se ridică uniform accelerat din starea de repaus, cu accelerația $a_1 = 2$ m/s^2. Să se determine viteza unghiulară ω și accelerația unghiulară $\dot{\omega}$ a tamburului instalației de ridicat și accelerația punctelor situate la periferia tamburului după $t = 4$ s de la începutul mișcării. Diametrul tamburului este $D = 5$ m.

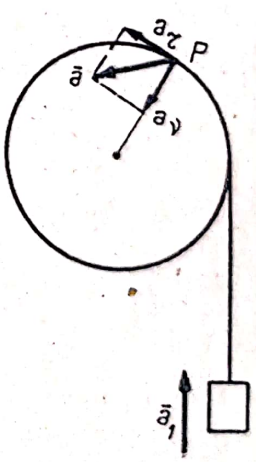


Fig. 14.22

Răspuns: Pentru $t = 4$ s, $\omega = 3{,}2$ s^{-1}, $a_\tau = 2$ m/s^2, $a_\nu = 25{,}6$ m/s^2, $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\nu^2} \approx 25{,}7$ m/s (fig. 14.22); accelerația unghiulară este constantă $\dot{\omega} = 0{,}8$ s^{-2}.

14.23. Un solid are o mișcare elicoidală, viteza de înaintare fiind v_0 și viteza unghiulară fiind ω. Să se determine locul punctelor solidului avînd modulul vitezei $v > v_0$.

Răspuns: Locul căutat este un cilindru avînd ca axă, axa mișcării elicoidale și raza $r = \dfrac{\sqrt{v^2 - v_0^2}}{\omega}$.

Scanned with OKEN Scanner

14.24. Să se demonstreze că extremităţile vectorilor viteză $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ şi v_4 a patru puncte coplanare P_1, P_2, P_3 şi P_4 ale unui rigid sînt coplanare (vectorii viteză fiind reprezentaţi la aceeaşi scară).

Indicaţie. Se poate folosi o metodă asemănătoare cu cea de la problema 14.16.

Capitolul XV

CINEMATICA SOLIDULUI CU UN PUNCT FIX

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

Solidul cu un punct fix O are trei grade de libertate, poziţia lui fiind determinată prin unghiurile lui Euler:

φ — unghiul de rotaţie proprie
ψ — unghiul de precesie
θ — unghiul de nutaţie

determinate de axele triedrului de referinţă fix T_1 $(Ox_1y_1z_1)$ şi triedrului mobil T $(Oxyz)$ legat invariabil de solid; ON linia nodurilor fiind intersecţia planelor x_1Oy_1 şi xOy (fig. 15. *a*). Versorii axelor mobile $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ în funcţie de versorii axelor fixe $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$, $\bar{k}_1$ sînt:

$$\bar{i} = (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta)\,\bar{i}_1 + (\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta)\,\bar{j}_1 + \sin\varphi\sin\theta\,\bar{k}_1$$

$$\bar{j} = (-\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta)\,\bar{i}_1 + (-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta)\,\bar{j}_1 + \cos\varphi\sin\theta\,\bar{k}_1$$

$$\bar{k} = \sin\psi\sin\theta\,\bar{i}_1 - \cos\psi\sin\theta\,\bar{j}_1 + \cos\theta\,\bar{k}_1. \qquad (15.1)$$

Traiectoriile punctelor solidului sînt curbe sferice, curbe situate pe sfere cu centrul în O şi cu raza egală cu distanţa punctului considerat la punctul fix O.

Viteza unui punct P al solidului este:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \qquad (15.2)$$

unde $\bar{r} = \overline{OP}$ este vectorul de poziţie al punctului P:

$$\bar{\omega} = \dot{\varphi} + \dot{\psi} + \dot{\theta} \qquad (15.3)$$

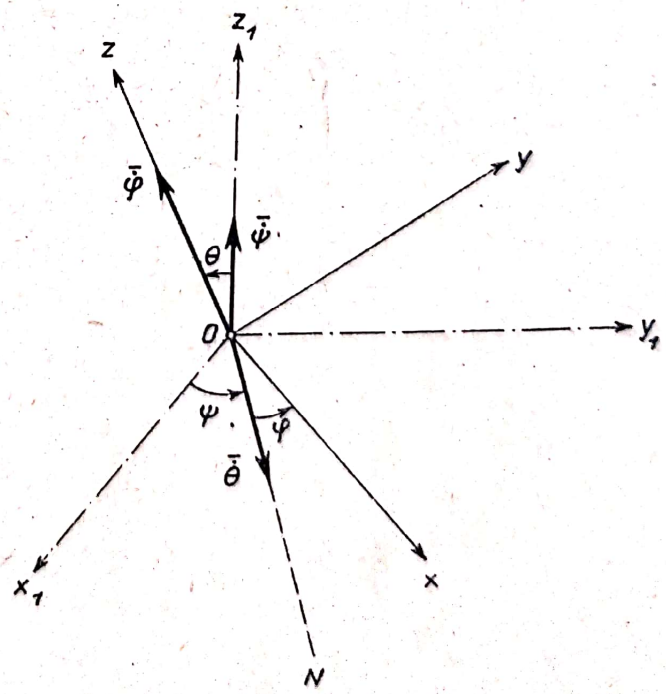


Fig. 15.*a*

este viteza unghiulară a solidului ale cărei componente pe axele triedrelor T_1 și T sînt:

$$\begin{aligned}\omega_{x_1} &= \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi\\ \omega_{y_1} &= -\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta + \dot{\theta}\sin\psi\\ \omega_{z_1} &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\end{aligned} \qquad (15.4)$$

și

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\varphi\\ \omega_y &= \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\varphi\\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta.\end{aligned} \qquad (15.5)$$

Locul geometric al punctelor de viteză nulă la un moment dat este axa instantanee de rotație, o dreaptă trecînd prin punctul fix și coliniară cu $\bar{\omega}$ a cărei ecuație vectorială este:

$$\bar{\omega} \times \bar{r} = 0 \qquad (15.6)$$

ecuațiile ei în sistemul fix T_1 și în cel mobil T fiind:

$$\frac{x_1}{\omega_{x_1}} = \frac{y_1}{\omega_{y_1}} = \frac{z_1}{\omega_{z_1}} \qquad (15.7)$$

respectiv:

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \qquad (15.8)$$

Axa instantanee de rotație Δ descrie în raport cu triedrele T_1 și T două suprafețe: axoida fixă sau conul herpolodic și axoida mobilă sau conul polodic (conurile lui Poinsot). În timpul mișcării axoida mobilă se rostogolește fără alunecare pe cea fixă rămînînd tangente peste generatoarea comună axa Δ (fig. 15. *b*).

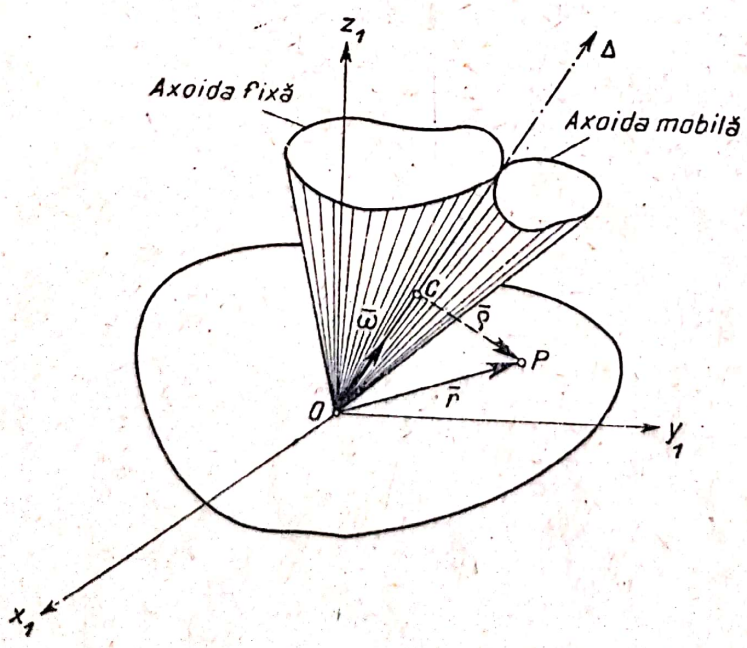


Fig 15. *b*

Distribuția de viteze a solidului la un moment dat este ca și la o rotație în jurul axei instantanee cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$, modulul vitezei fiind:

$$v = \omega\rho \qquad (15.9)$$

unde $\rho = CP$ este distanța de la P la axa Δ, viteza fiind normală pe planul determinat de P și Δ.

Accelerația unui punct P al solidului este:

$$\bar{a} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \tag{15.10}$$

sau:

$$\bar{a} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} - \omega^2 \bar{\rho} \tag{15.11}$$

unde $\bar{\rho} = \overline{CP}$ (fig. 15.*b*). Componentele accelerației unghiulare $\dot{\bar{\omega}}$ pe axele triedrului fix sau mobil se obțin prin derivarea componentelor (15.4) și (15.5) ale vitezei:

$$\dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega}_{x_1} \bar{i}_1 + \dot{\omega}_{y_1} \bar{j}_1 + \dot{\omega}_{z_1} \bar{k}_1 = \dot{\omega}_x \bar{i} + \dot{\omega}_y \bar{j} + \dot{\omega}_z \bar{k}. \tag{15.12}$$

O mișcare particulară a solidului cu un punct fix este mișcarea de precesie regulată în care $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ și θ sînt constante, ecuațiile de mișcare fiind:

$$\varphi = \omega_2 t + \varphi_0; \qquad \psi = \omega_1 t + \psi_0; \qquad \theta = \theta_0. \tag{15.13}$$

B. PROBLEME REZOLVATE

15.1. Un solid cu un punct fix are o mișcare de precesie regulată avînd vitezele unghiulare de rotație proprie $\dot{\varphi} = \omega_2$ și de precesie $\dot{\psi} = \omega_1$ constante, iar unghiul de nutație $\theta = \theta_0$ (fig. 15.1). Să se determine viteza $\bar{\omega}$ și accelerația unghiulară $\dot{\bar{\omega}}$ a solidului, ecuațiile axei instantanee de rotație Δ, axoidele fixă și mobilă, viteza $\bar{v}$ și accelerația $\bar{a}$ a unui punct oarecare P al solidului. Ce mișcare au punctele axei de rotație proprie Oz? Să se găsească în sfîrșit locul punctelor care au la un moment dat accelerația perpendiculară pe axa instantanee de rotație. Cazuri particulare $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$.

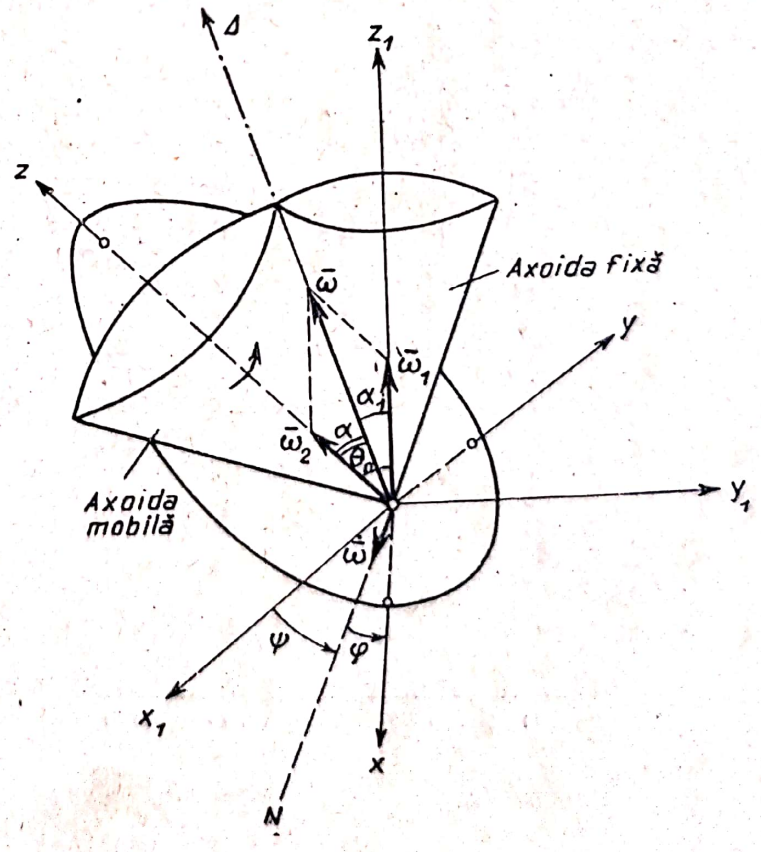


Fig. 15.1

Rezolvare. Viteza unghiulară a solidului (15.3) este:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \tag{1}$$

deoarece din datele problemei $\dot{\varphi} = \omega_2$, $\dot{\psi} = \omega_1$, $\dot{\theta} = 0$.

Cum $\bar{\omega}_1$ și $\bar{\omega}_2$ sînt constanți și unghiul dintre ei este constant θ_0, modulul vitezei unghiulare va fi dat de ecuația:

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\,\omega_1\,\omega_2 \cos\theta_0 \tag{2}$$

iar unghiurile α și α_1 dintre $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}_1$ și $\bar{\omega}_2$ vor fi obținute cu ajutorul teoremei sinusurilor aplicată în triunghiul vectorilor $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}_1$ și $\bar{\omega}_2$

$$\frac{\sin\alpha}{\omega_1} = \frac{\sin\alpha_1}{\omega_2} = \frac{\sin\theta_0}{\omega}\,. \tag{3}$$

Prin calcule elementare din (2) și (3) rezultă:

$$\sin\alpha_1 = \frac{\omega_2 \sin\theta_0}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\,\omega_1\omega_2\cos\theta_0}} \qquad \sin\alpha = \frac{\omega_1 \sin\theta_0}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\,\omega_1\,\omega_2\cos\theta_0}}$$

de unde:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\omega_2 \sin\theta_0}{\omega_1 + \omega_2\cos\theta_0} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega_1 \sin\theta_0}{\omega_1\cos\theta_0 + \omega_2}\,. \tag{4}$$

Axa instantanee Δ este suportul vitezei unghiulare $\bar{\omega}$. Unghiul α_1 format de Δ cu axa fixă Oz_1 fiind constant, față de triedrul fix T_1, axa Δ descrie un con circular drept avînd axa Oz_1 și cu unghiul la vîrf $2\alpha_1$ (axoida fixă). Față de triedrul mobil T invariabil legat de solid, axa Δ descrie un con avînd axa Oz și cu unghiul la vîrf 2α (axoida mobilă) deoarece și unghiul $\alpha = \sphericalangle(\Delta, Oz)$ este constant. Axoida mobilă se rostogolește în timpul mișcării pe axoida fixă.

La aceste rezultate se putea ajunge și analitic. Fără a particulariza problema puteam considera că în momentul inițial linia nodurilor coincide cu axa Ox_1, iar Ox coincide cu linia nodurilor deci la $t = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ de unde:

$$\varphi = \omega_2 t \qquad \psi = \omega_1 t \qquad \theta = \theta_0\,. \tag{5}$$

Proiecțiile (15.4) ale vitezei unghiulare $\bar{\omega}$ pe axele triedrului fix sînt:

$$\omega_{x_1} = \omega_2 \sin\omega_1 t \sin\theta_0 \qquad \omega_{y_1} = -\,\omega_2 \cos\omega_1 t \sin\theta_0$$
$$\omega_{z_1} = \omega_1 + \omega_2\cos\theta_0 \tag{6}$$

iar proiecțiile (15.5) ale lui $\bar{\omega}$ pe axele triedrului mobil sînt:

$$\omega_x = \omega_1 \sin\omega_2 t \sin\theta_0 \qquad \omega_y = \omega_1 \cos\omega_2 t \sin\theta_0$$
$$\omega_z = \omega_1\cos\theta_0 + \omega_2\,. \tag{7}$$

Ecuațiile axei instantanee Δ față de triedrul fix (15.7) sînt:

$$\frac{x_1}{\omega_2 \sin\omega_1 t \sin\theta_0} = \frac{y_1}{-\,\omega_2\cos\omega_1 t\sin\theta_0} = \frac{z_1}{\omega_1 + \omega_2\cos\theta_0} \tag{8}$$

și față de cel mobil (15.8) sînt:

$$\frac{x}{\omega_1 \sin\omega_2 t \sin\theta_0} = \frac{y}{\omega_1\cos\omega_2 t \sin\theta_0} = \frac{z}{\omega_1\cos\theta_0 + \omega_2}\,. \tag{9}$$

Scanned with OKEN Scanner

Eliminînd timpul t din ecuațiile (8) obținem ecuația axoidei fixe:

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{\omega_2^2 \sin^2 \theta_0} = \frac{z_1^2}{(\omega_1 + \omega_2 \cos \theta_0)^2} \tag{10}$$

un con circular drept avînd ca axă de revoluție axa Oz_1, iar unghiul la vîrf $2\alpha_1$ unde $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{z_1} = \frac{\omega_2 \sin \theta_0}{\omega_1 + \omega_2 \cos \theta_0}$.

Analog din ecuațiile (9) obținem ecuația axoidei mobile:

$$\frac{x^2 + y^2}{\omega_1^2 \sin^2 \theta_0} = \frac{z^2}{(\omega_1 \cos \theta_0 + \omega_2)^2} \tag{11}$$

un con circular drept cu axa Oz și unghiul la vîrf 2α unde $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \frac{\omega_1 \sin \theta_0}{\omega_1 \cos \theta_0 + \omega_2}$. Am obținut aceleași rezultate ca prin prima metodă.

Viteza (15.2) a unui punct P al solidului este:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \tag{12}$$

unde $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} \times z\bar{k}$, coordonatele punctului P, x, y, z fiind invariabile în raport cu triedrul mobil. Ținînd seama de (7):

$$\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_1 \sin \omega_2 t \sin \theta_0 & \omega_1 \cos \omega_2 t \sin \theta_0 & \omega_1 \cos \theta_0 + \omega_2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

deci proiecțiile vitezei pe axele triedrului mobil sînt:

$$\begin{aligned} v_x &= z\omega_1 \cos \omega_2 t \sin \theta_0 - y(\omega_1 \cos \theta_0 + \omega_2) \\ v_y &= x(\omega_1 \cos \theta_0 + \omega_2) - z\omega_1 \sin \omega_2 t \sin \theta_0 \\ v_z &= \omega_1 \sin \theta_0 (y \sin \omega_2 t - x \cos \omega_2 t) \end{aligned} \tag{13}$$

viteza fiind normală pe planul determinat de $\bar{\omega}$ și $\bar{r}$, deci pe planul determinat de P și Δ. Derivînd relațiile (6) și (7) obținem proiecțiile accelerației unghiulare $\dot{\bar{\omega}}$ pe axele triedrelor T_1 și T:

$$\dot{\omega}_{x_1} = \omega_1 \omega_2 \cos \omega_1 t \sin \theta_0; \quad \dot{\omega}_{y_1} = \omega_1 \omega_2 \sin \omega_1 t \sin \theta_0; \quad \dot{\omega}_{z_1} = 0 \tag{14}$$

$$\dot{\omega}_x = \omega_1 \omega_2 \cos \omega_2 t \sin \theta_0; \quad \dot{\omega}_y = -\omega_1 \omega_2 \sin \omega_2 t \sin \theta_0; \quad \dot{\omega}_z = 0. \tag{15}$$

Modulul accelerației unghiulare este:

$$|\dot{\omega}| = \omega_1 \omega_2 \sin \theta_0$$

accelerația unghiulară fiind normală pe planul zOz_1 deci paralelă cu linia nodurilor, și notînd cu $\bar{\nu}$ versorul liniei nodurilor:

$$\dot{\bar{\omega}} = \omega_1 \omega_2 \sin \theta_0 \bar{\nu}. \tag{16}$$

Accelerația (15.10) a unui punct al solidului va fi:

$$\bar{a} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} \tag{17}$$

unde:

$$\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_1 \omega_2 \cos \omega_2 t \sin \theta_0 & -\omega_1 \omega_2 \sin \omega_2 t \sin \theta_0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\bar{\omega} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_1 \sin \omega_2 t \sin \theta_0 & \omega_1 \cos \omega_2 t \sin \theta_0 & \omega_1 \cos \theta_0 + \omega_2 \\ z\omega_1 \cos \omega_2 t \sin \theta_0 - & x(\omega_1 \cos \theta_0 + \omega_2) - & \omega_1 \sin \theta_0 (y \sin \omega_2 t - \\ -y(\omega_1 \cos \theta_0 + \omega_2) & - z\omega_1 \sin \omega_2 t \sin \theta_0 & - x \cos \omega_2 t) \end{vmatrix}$$

Efectuînd calculele, proiecțiile accelerației pe axele mobile vor fi:

$$\begin{aligned} a_x &= -x\,[(\omega_1 \cos \theta_0 + \omega_2)^2 + \omega_1^2 \sin^2 \theta_0 \cos^2 \omega_2 t] + \\ &\quad + y\omega_1^2 \sin^2 \theta_0 \sin \omega_2 t \cos \omega_2 t + z\omega_1^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sin \omega_2 t \\ a_y &= x\omega_1^2 \sin^2 \theta_0 \sin \omega_2 t \cos \omega_2 t - y\,[(\omega_1 \cos \theta_0 + \omega_2)^2 + \\ &\quad + \omega_1^2 \sin^2 \theta_0 \sin^2 \omega_2 t] + z\omega_1^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \cos \omega_2 t \\ a_z &= (x \sin \omega_2 t + y \cos \omega_2 t)\,\omega_1\,(\omega_1 \cos \theta_0 + 2\,\omega_2) \sin \theta_0 - z\omega_1^2 \sin^2 \theta_0. \end{aligned} \tag{18}$$

Din (13) și (18) se pot obține proiecțiile vitezei și accelerației pe axele fixe ținînd seama că: $\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}$, $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$ și folosind expresiile (15.1) ale versorilor $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Locul punctelor în care accelerația $\bar{a}$ va fi normală pe axa Δ (pe $\bar{\omega}$) va fi dat de condiția:

$$\bar{\omega} \cdot \bar{a} = \omega_x a_x + \omega_y a_y + \omega_z a_z = 0. \tag{19}$$

Ținînd seama de proiecțiile (7) și (18) ale vectorilor $\bar{\omega}$ și $\bar{a}$ ecuația (19) devine:

$$x \sin \omega_2 t + y \cos \omega_2 t = \frac{\omega_1 \sin \theta_0}{\omega_1 \cos \theta_0 + \omega_2} z. \tag{20}$$

Ecuația (20) reprezintă un plan care trece prin axa instantanee Δ și taie planul $z = 0$ după dreapta $\frac{y}{x} = -\operatorname{tg} \omega_2 t = -\operatorname{tg} \varphi$, adică după linia nodurilor ON perpendiculară pe planul zOz_1. Deci acest plan este planul tangent comun în lungul axei instantanee la cele două axoide.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația axei Oz fiind $x = y = 0$ componentele vitezei și accelerației unui punct al axei Oz sînt:

$$v_x = z\omega_1 \cos \omega_2 t \sin \theta_0 \qquad v_y = -z\omega_1 \sin \omega_2 t \sin \theta_0 \qquad v_z = 0 \tag{21}$$

$$a_x = z\omega_1^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sin \omega_2 t \qquad a_y = z\omega_1^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \cos \omega_2 t$$
$$a_z = -z\omega_1^2 \sin^2 \theta_0 \tag{22}$$

modulele vitezei și accelerației fiind:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \omega_1 |z| \sin \theta_0 \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \omega_1^2 |z| \sin \theta_0$$

Se poate verifica că proiecțiile (21) și (22) ale vitezei și accelerației se pot pune sub forma:

$$\bar{v} = \bar{\omega}_1 \times \bar{r} \qquad \bar{a} = \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \bar{r})$$

unde $\bar{r} = z\bar{k}$ iar $\bar{\omega}_1 = \omega_1 \bar{k}_1$ adică axa Oz are o mișcare de rotație uniformă în jurul axei Oz_1.

Dacă $\bar{\omega}_1 = 0$ atunci $\bar{\omega} = \bar{\omega}_2$ ecuațiile (9) devin $x = y = 0$ deci axa instantanee Δ este axa Oz invariabil legată de solid, adică Δ este axă permanentă de rotație a solidului. Solidul are o mișcare de rotație uniformă în jurul axei Oz.

Mișcarea solidului în cazul general se poate considera ca provenind dintr-o mișcare de rotație a axei Oz cu viteza $\bar{\omega}_1$ în jurul axei Oz_1 și dintr-o mișcare de rotație a solidului în jurul axei Oz cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_2$ (v. cap. XVIII, cazul rotațiilor cu axe concurente). În sfîrșit, dacă $\bar{\omega}_2 = 0$ atunci $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1$ ecuațiile (8) devin $x_1 = y_1 = 0$, adică axa Δ este fixă, solidul avînd o mișcare de rotație uniformă în jurul axei Oz_1.

15.2. Un con circular drept cu înălțimea h și unghiul la vîrf 2α se rostogolește fără alunecare pe un plan fix π, centrul C al bazei conului avînd o mișcare circulară cu viteza unghiulară constantă ω_1 în jurul axei Oz_1 (normală la plan). Să se determine axa instantanee de rotație Δ, axoidele fixă și mobilă și viteza unghiulară instantanee $\bar{\omega}$. Să se determine apoi vitezele și accelerațiile punctelor A și B de pe baza conului (fig. 15.2 *a*).

Rezolvare. Dacă o suprafață mobilă se rostogolește fără alunecare peste una fixă, vitezele punctelor de pe curba de contact sînt nule. Deci generatoarea OA de contact dintre con și plan reprezintă axa instantanee Δ a mișcării (locul punctelor de viteză nulă). Față de sistemul fix $Ox_1y_1z_1$, Δ descrie planul fix π (x_1Oy_1) care este axoida fixă. În raport cu solidul cu conul Δ descrie suprafața laterală a conului care este axoida mobilă. Axoida mobilă (conul) se rostogolește fără să lunece pe axoida fixă (planul π).

Punctul C descrie cu viteza unghiulară ω_1 un cerc de rază $DC = h \cos \alpha$ situat într-un plan paralel cu π. Considerînd sistemul de axe

mobil $Op\,nz_1$, axa Op având direcția generatoarei Δ, On normala pe OA din planul π viteza punctului C este:

$$\bar{v}_C = \bar{\omega}_1 \times \overline{DC} = \begin{vmatrix} \bar{\rho} & \bar{n} & \bar{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ h\cos\alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_1 h \cos\alpha\, \bar{n} \qquad (1)$$

deoarece $\bar{\omega}_1 = \omega_1 \bar{k}_1$ și $\overline{DC} = h \cos\alpha\, \bar{\rho}$.

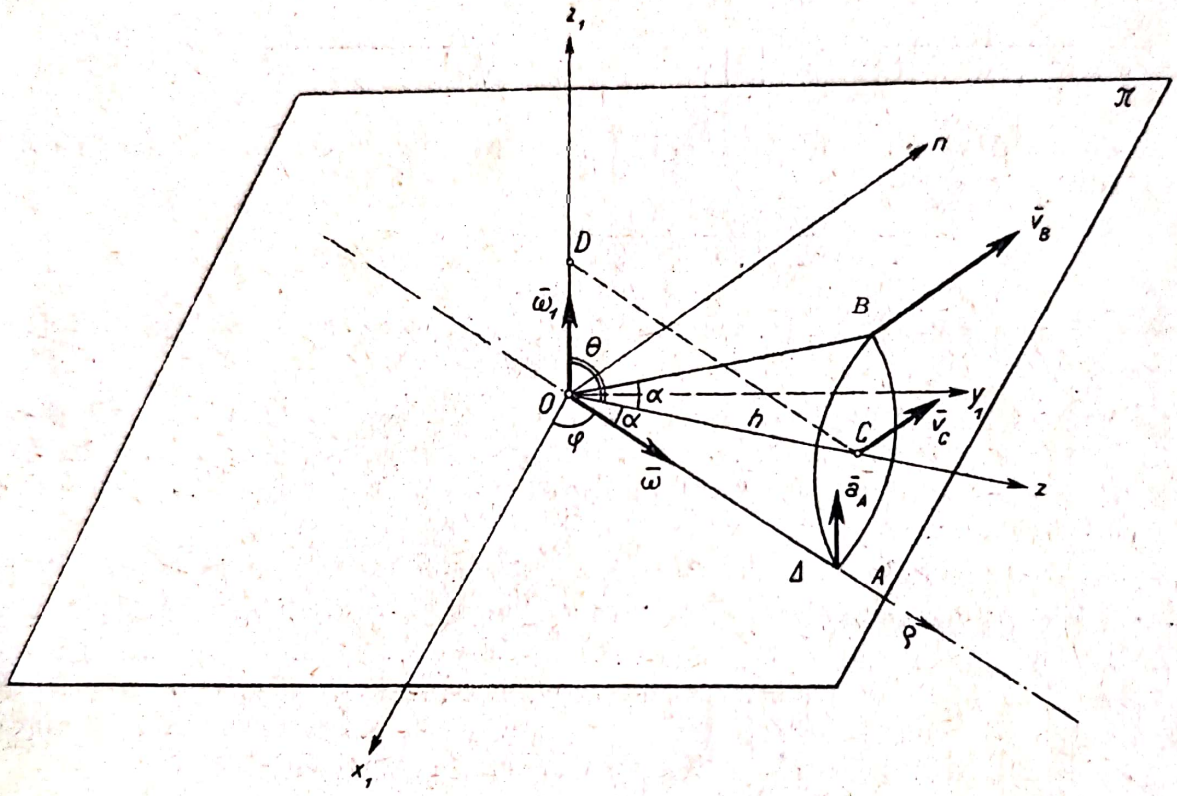


Fig. 15.2 *a*

Punctul C aparținînd conului conform (15.2), viteza lui este:

$$\bar{v}_C = \bar{\omega} \times \overline{OC} = \begin{vmatrix} \bar{\rho} & \bar{n} & \bar{k}_1 \\ \omega & 0 & 0 \\ h\cos\alpha & 0 & h\sin\alpha \end{vmatrix} = -\,\omega h \sin\alpha\, \bar{n} \qquad (2)$$

deoarece viteza unghiulară $\bar{\omega}$ are direcția axei instantanee de rotație $\bar{\omega} = \omega\bar{\rho}$ iar $\overline{OC} = h\cos\alpha\,\bar{\rho} + h\sin\alpha\,\bar{k}_1$.

Comparînd ecuațiile (1) și (2) rezultă:

$$\omega = -\,\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha$$

adică:

$$\bar{\omega} = -\,\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha\,\bar{\rho} \qquad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

sensul vitezei unghiulare $\bar{\omega}$ fiind opus vectorului $\overline{OA}$ adică contrar sensului din figura 15.2 *a*. Accelerația unghiulară este:

$$\dot{\bar{\omega}} = -\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha \, \dot{\bar{\rho}}. \tag{4}$$

Însă:

$$\bar{\rho} = \cos\varphi \, \bar{i}_1 + \sin\varphi \, \bar{j}_1 \qquad \bar{n} = -\sin\varphi \, \bar{i}_1 + \cos\varphi \, \bar{j}_1$$

deci:

$$\dot{\bar{\rho}} = -\sin\varphi \, \dot{\varphi} \, \bar{i}_1 + \cos\varphi \, \dot{\varphi} \, \bar{j}_1 =$$

$$= \dot{\varphi} \, \bar{n} = \omega_1 \, \bar{n}$$

căci viteza unghiulară a axei $O\rho$ este aceeași cu cea a dreptei DC, $\dot{\varphi} = \omega_1$. Înlocuind în (4) rezultă:

$$\dot{\bar{\omega}} = -\omega_1^2 \operatorname{ctg} \alpha \, \bar{n}. \tag{5}$$

Punctul A găsindu-se pe axa instantanee de rotație are viteza nulă:

$$\bar{v}_A = 0.$$

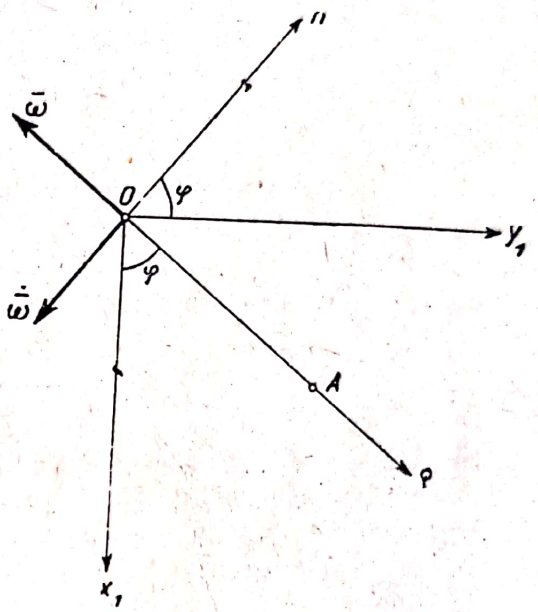


Fig. 15.2 *b*

Accelerația (15.10) a lui este:

$$\bar{a}_A = \dot{\bar{\omega}} \times \overline{OA} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{OA}) = \dot{\bar{\omega}} \times \overline{OA}$$

căci $\bar{\omega}$ este coliniar cu $\overline{OA} = \dfrac{h}{\cos\alpha} \bar{\rho}$,

$$\bar{a}_A = \dot{\bar{\omega}} \times \overline{OA} = \begin{vmatrix} \bar{\rho} & \bar{n} & \bar{k}_1 \\ 0 & -\omega_1^2 \operatorname{ctg}\alpha & 0 \\ \dfrac{h}{\cos\alpha} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\omega_1^2 h}{\sin\alpha} \bar{k}_1. \tag{6}$$

Accelerația punctului A este deci coliniară cu normala la plan.
Viteza (15.2) a punctului B este:

$$\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \overline{OB} = \begin{vmatrix} \bar{\rho} & \bar{n} & \bar{k}_1 \\ -\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha & 0 & 0 \\ \dfrac{h \cos 2\alpha}{\cos\alpha} & 0 & 2h \sin\alpha \end{vmatrix} = 2\omega_1 h \cos\alpha \, \bar{n} = 2\bar{v}_C \tag{7}$$

deoarece $\overline{OB} = \frac{h\cos 2\alpha}{\cos\alpha}\,\bar{\rho} + \frac{h\sin 2\alpha}{\cos\alpha}\,\bar{k}_1$. Accelerația (15.10) a punctului B este:

$$\bar{a}_B = \dot{\bar{\omega}} \times \overline{OB} + \bar{\omega} \times \bar{v}_B =$$

$$\begin{vmatrix} \bar{\rho} & \bar{n} & \bar{k}_1 \\ 0 & -\omega_1^2 \operatorname{ctg}\alpha & 0 \\ \frac{h\cos 2\alpha}{\cos\alpha} & 0 & 2h\sin\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{\rho} & \bar{n} & \bar{k}_1 \\ -\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2\omega_1 h\cos\alpha & 0 \end{vmatrix} \qquad (8)$$

$$\bar{a}_B = -2\omega_1^2 h\cos\alpha\,\bar{\rho} - \frac{\omega_1^2 h}{\sin\alpha}\,\bar{k}_1. \qquad (9)$$

Viteza punctului B este normală pe planul OAB (planul normal pe π ce trece prin axa instantanee Δ) iar accelerația punctului este conținută în planul OAB și are modulul:

$$a_B = \frac{\omega_1^2 h}{\sin\alpha}\sqrt{1 + \sin^2 2\alpha}.$$

Se poate arăta că mișcarea conului este o precesie regulată. Considerînd și un triedru de referință mobil solidarizat de con $Oxyz$ (în fig. 15.2 *a* s-a reprezentat numai axa Oz, axa conului) unghiul de nutație dintre axele Oz_1 și Oz este:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \text{const} \qquad (10)$$

deci $\dot{\theta} = 0$ și conform (15.3):

$$\bar{\omega} = \dot{\bar{\varphi}} + \dot{\bar{\psi}}. \qquad (11)$$

În figura 15.2 *c* s-au reprezentat vectorii $\bar{\omega}$, $\dot{\bar{\varphi}}$, $\dot{\bar{\psi}}$ unde $\dot{\bar{\varphi}}$ viteza unghiulară de rotație proprie are direcția axei Oz, iar $\dot{\bar{\psi}}$ viteza unghiulară de precesie are direcția axei Oz_1 (v. fig. 15. *a* de la Definiții și formule). Proiectînd ecuația (11) pe axele $O\rho$ și Oz_1 obținem:

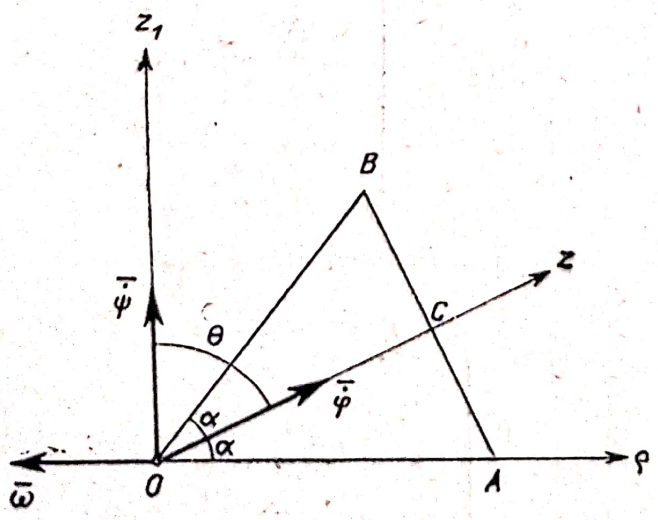


Fig. 15.2 *c*

$$-\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha = \dot{\varphi}\cos\alpha$$

$$0 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\sin\alpha$$

de unde:

$$\dot{\varphi} = -\frac{\omega_1}{\sin\alpha} \qquad \dot{\psi} = \omega_1 \qquad (12)$$

Cum $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ și θ sînt constante, mișcarea este o precesie regu-

lată. Putem deci folosi pentru rezolvarea problemei rezultatele de la problema 15.1 în care înlocuim pe θ_0 prin $\frac{\pi}{2} - \alpha$ şi pe ω_2 prin $-\frac{\omega_1}{\sin\alpha}$. Astfel de exemplu axoidele fixe şi mobile sînt:

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{\frac{\omega_1^2}{\sin^2\alpha}\cos^2\alpha} = \frac{z_1^2}{(-\omega_1 + \omega_1)^2} \quad \text{adică} \quad z_1 = 0 \quad \text{(planul } \pi\text{)}$$

respectiv:

$$\frac{x^2 + y^2}{\omega_1^2\cos^2\alpha} = \frac{z^2}{\left(\omega_1\sin\alpha - \frac{\omega_1}{\sin\alpha}\right)^2} \quad \text{adică} \quad \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \operatorname{tg}\alpha \quad \text{(conul).}$$

15.3. Pentru amestecarea minereului se întrebuinţează un alergător avînd forma din figura 15.3 *a* fiind compus din două roţi care rulează într-o cupă conică. Alergătorul se roteşte în jurul axei orizontale *AOB* care la

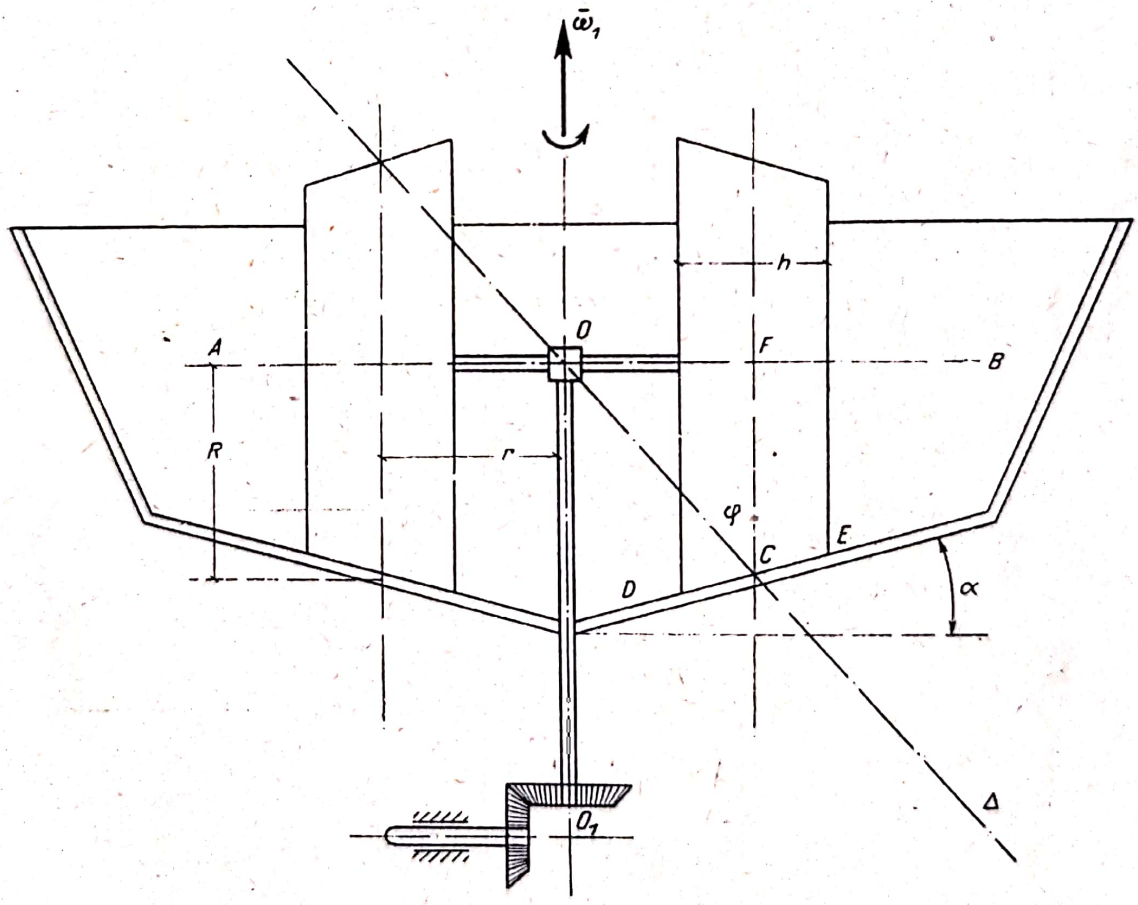


Fig. 15.3 *a*

rîndul ei se roteşte solidar cu axa verticală OO_1 cu viteza unghiulară ω_1. Să se determine vitezele absolute ale punctelor *D* şi *E* ale bandajului alergătorului ţinînd seama că axa instantanee de rotaţie Δ a roţii alergătorului trece prin mijlocul *C* al generatoarei de contact a bandajului

cu cupa. Aplicație numerică: $\omega_1 = 1\ s^{-1}$, lățimea alergătorului $h = 50$ cm, raza medie a alergătorului $R = 1$ m, raza medie a axei alergătorului $r = 60$ cm, tg $\alpha = 0{,}2$.

Rezolvare. Pentru a afla viteza unghiulară instantanee $\bar{\omega}$ a alergătorului vom exprima viteza punctului F în funcție $\bar{\omega}$ și de viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ cu care punctul F descrie un cerc de rază r situat într-un plan orizontal. Conform (13.22):

$$v_F = \omega_1 r \quad . \tag{1}$$

și cum F este și punct al alergătorului (solid cu punct fix) conform (15.9):

$$v_F = \omega \rho$$

unde $\rho = FF' = R \sin \varphi$. Dar $\sin \varphi = \dfrac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}}$ deci:

$$v_F = \frac{\omega Rr}{\sqrt{R^2 + r^2}} . \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă:

$$\omega = \omega_1 \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{R} \tag{3}$$

vectorul $\bar{\omega}$ având sensul din figura 15.3 *b*.

Conform (15.9) vitezele punctelor D și E sînt:

$$v_D = \omega DD' \qquad v_E = \omega EE' \tag{4}$$

și cum:

$$DD' = EE' = CE \cos(\varphi - \alpha) = \frac{h \cos(\varphi - \alpha)}{2 \cos \alpha} \tag{5}$$

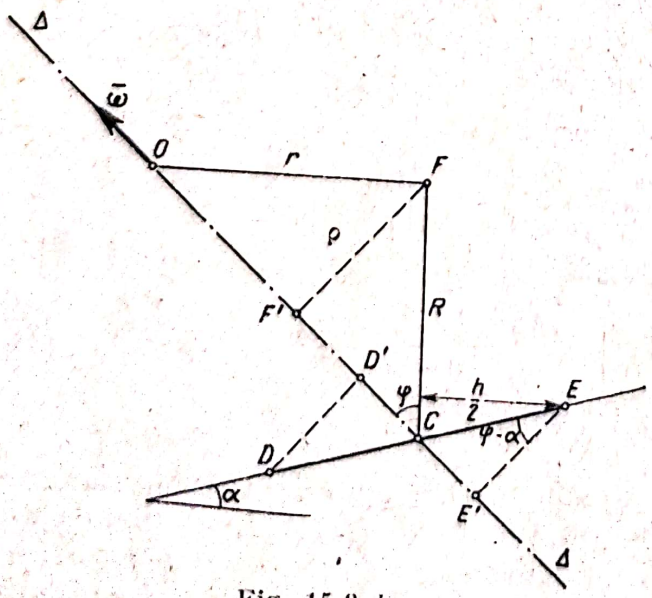


Fig. 15.3 *b*

din (3), (4) și (5) rezultă:

$$v_D = v_E = \omega_1 \frac{h\sqrt{R^2 + r^2} \cos(\varphi - \alpha)}{2R \cos \alpha} . \tag{6}$$

Cum $\cos(\varphi - \alpha) = \cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha = \dfrac{R \cos \alpha + r \sin \alpha}{\sqrt{R^2 + r^2}}$

obținem:

$$v_D = v_E = \frac{\omega_1 h \left(1 + \dfrac{r}{R} \operatorname{tg} \alpha\right)}{2} . \tag{7}$$

Scanned with OKEN Scanner

Făcînd înlocuirile numerice în sistemul CGS:

$$v_D = v_E = \frac{1 \times 50\left(1 + \frac{60}{100} \times 0{,}2\right)}{2} = 28 \text{ cm/s}.$$

Singurul punct de viteză nulă de pe bandajul alergătorului este punctul C, restul punctelor avînd viteza diferită de zero, deci mișcarea se face cu alunecare între alergător și cupă. Condiția ca să nu apară alunecare este ca DE să fie axă instantanee de rotație, adică generatoarea trunchiului de con a alergătorului să treacă prin O.

15.4. Un disc vertical de rază r se rostogolește fără alunecare pe un plan orizontal π. Axul $OA = R$ se rotește în jurul unei axe verticale Oz_1 cu viteza unghiulară constantă ω_1. Să se determine viteza $\bar{v}$ și accelerația

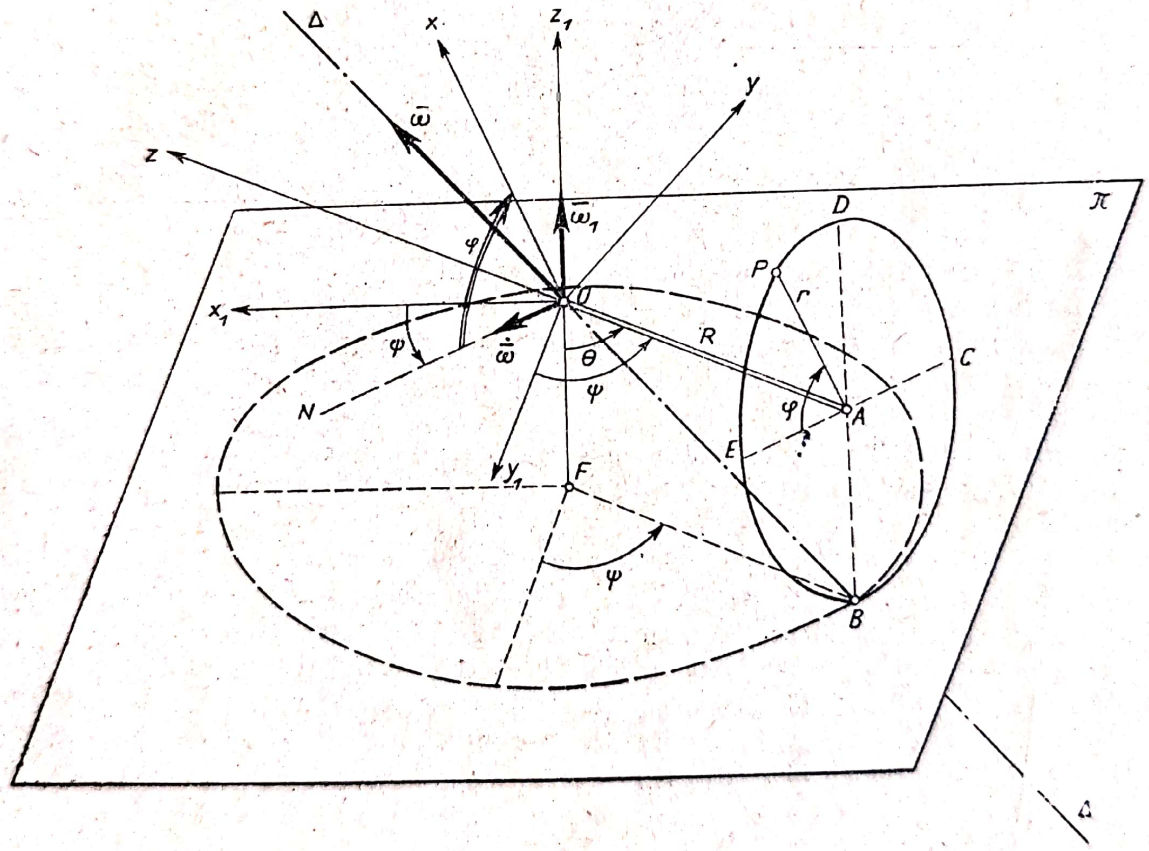


Fig. 15.4 *a*

unui punct oarecare P de pe marginea discului a cărui poziție este determinată de unghiul φ format de raza AP cu orizontala (fig. 15.4 *a*). Cazuri particulare $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Rezolvare. Punctul fix al discului este punctul O întrucît solidarizînd axul OA cu discul, O poate fi considerat ca punct al solidului (discului). Punctul B de contact dintre disc și planul π are viteză nulă din cauza că între disc și plan nu apare alunecarea. Avînd două puncte de viteză

nulă ele sînt situate pe axa instantanee de rotaţie Δ deci dreapta OB este axa instantanee. Pentru a determina viteza şi acceleraţia unui punct trebuie să determinăm vectorii viteză şi acceleraţie unghiulară $\bar{\omega}$ şi $\dot{\bar{\omega}}$.

Mişcarea punctului A este cunoscută, el descrie un cerc de rază R cu viteza unghiulară ω_1:

$$v_A = R\,\omega_1 . \tag{1}$$

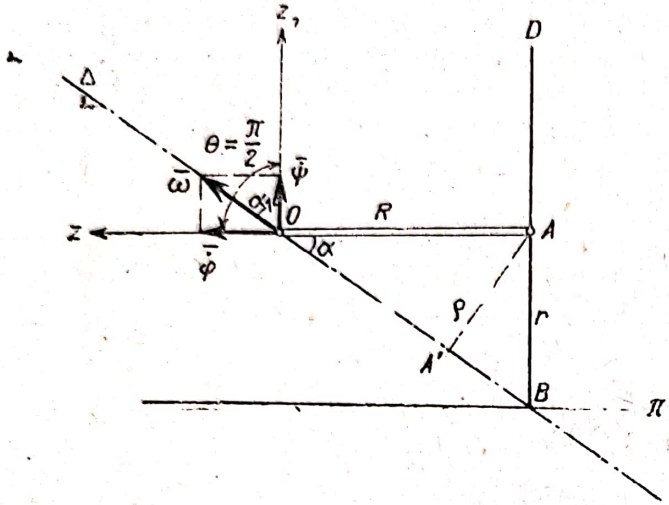


Fig. 15.4 *b*

Cum A aparţine şi discului din (15.9):

$$v_A = \rho\,\omega \tag{2}$$

unde $\rho = AA' = R \sin\alpha = \dfrac{Rr}{\sqrt{R^2 + r^2}}$ (vezi fig. 15.4 *b*) adică:

$$v_A = \omega R \sin\alpha = \omega \frac{Rr}{\sqrt{R^2 + r^2}} \tag{3}$$

Din (1) şi (3) rezultă :

$$\omega = \frac{\omega_1}{\sin\alpha} = \frac{\omega_1 \sqrt{R^2 + r^2}}{r} . \tag{4}$$

Considerăm următoarele sisteme de referinţă.

Sistemul fix $Ox_1y_1z_1$ cu axa Oz_1, normală la planul π, şi cu planul x_1Oy_1 paralel cu planul π, axa Ox_1 fiind spre exemplu paralelă cu planul discului în momentul iniţial, iar Oy_1 avînd direcţia lui OA în momentul iniţial.

Sistemul mobil $Oxyz$ solidar cu discul, cu axa Oz pe direcţia AO, planul xOy paralel cu planul discului, axa Ox fiind paralelă cu raza AP a discului.

Linia nodurilor ON intersecţia planelor x_1Oy_1 şi xOy va fi deci paralelă cu planul discului şi cu planul π, deci paralelă cu diametrul orizontal EC din planul discului şi normală pe axa AO (fig. 15.4 *c*).

Unghiul de rotaţie proprie φ va fi tocmai unghiul dintre EC şi AP (fig. 15.4 *d*). Unghiul de precesie ψ va fi unghiul dintre Ox_1 şi ON sau dintre Oy_1 şi OA (unghiuri cu laturi perpendiculare). Unghiul de nutaţie dintre Oz_1 şi Oz (OA) este drept:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

deci:

$$\dot{\theta} = 0. \tag{6}$$

Conform (15.3):

$$\bar{\omega} = \dot{\bar{\varphi}} + \dot{\bar{\psi}} \tag{7}$$

unde $\dot{\bar{\varphi}}$ are direcţia axei Oz, $\dot{\bar{\psi}}$ a axei Oz_1 (ca în fig. 15. *a*. Definiţii şi formule) şi proiectînd această ecuaţie pe axele Oz şi Oz_1 obţinem:

$$\omega \cos\alpha = \dot{\varphi} \qquad \omega \sin\alpha = \dot{\psi} \tag{8}$$

deci:

$$\dot{\varphi} = \omega_1 \operatorname{ctg}\alpha = \frac{R}{r}\omega_1 \qquad \dot{\psi} = \omega_1 \qquad \dot{\theta} = 0 \tag{9}$$

mișcarea solidului fiind o mișcare de precesie regulată.

Era de așteptat ca $\dot{\psi} = \omega_1$ căci $\dot{\psi}$ este viteza unghiulară a axei OA care s-a dat prin enunțul problemei. Știind că $\dot{\psi} = \omega_1$ cu relația (7) se

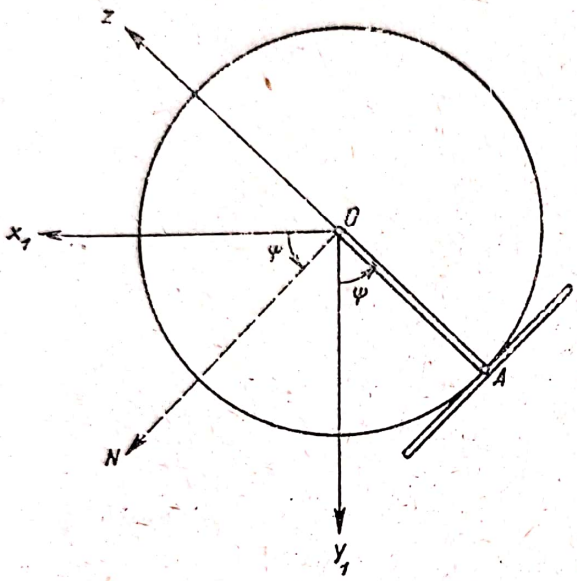


Fig. 15.4 *c*

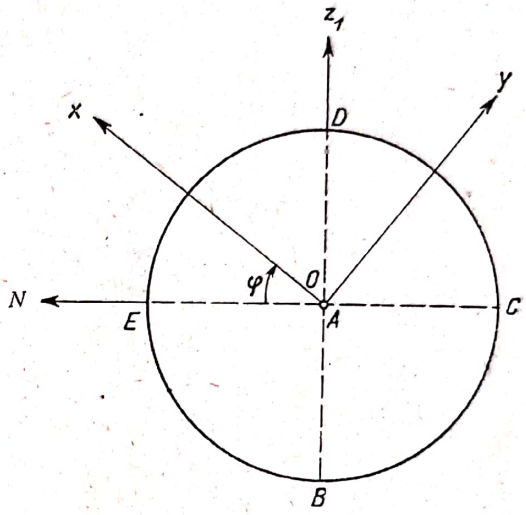


Fig. 15.4 *d*

putea găsi viteza unghiulară $\overline{\omega}$ fără să mai determinăm viteza punctului A.

Cum la $t = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ integrînd ecuațiile (9) obținem:

$$\varphi = \frac{R}{r}\omega_1 t \qquad \psi = \omega_1 t \qquad \theta = \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Proiecțiile vitezei unghiulare pe axele fixe și mobile sînt conform (15.4) și (15.5):

$$\omega_{x_1} = \frac{R\omega_1}{r}\sin\psi; \quad \omega_{y_1} = -\frac{R\omega_1}{r}\cos\psi \quad \omega_{z_1} = \omega_1 \tag{11}$$

$$\omega_x = \omega_1 \sin\varphi \qquad \omega_y = \omega_1 \cos\varphi \qquad \omega_z = \frac{R\omega_1}{r}. \tag{12}$$

Ecuațiile (15.7) și (15.8) ale axei instantanee Δ față de triedrul fix și cel mobil sînt:

$$\frac{x_1}{\frac{R}{r}\sin\psi} = \frac{y_1}{-\frac{R}{r}\cos\psi} = \frac{z_1}{1} \qquad \frac{x}{\sin\varphi} = \frac{y}{\cos\varphi} = \frac{z}{\frac{R}{r}}$$

deci axoidele fixă și mobilă sînt conurile:

$$\frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{z_1} = \frac{R}{r} \qquad \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \frac{r}{R} \tag{13}$$

Scanned with OKEN Scanner

din figura 15.4 *e* cu vîrful O și avînd drept cercuri directoare cercul descris de punctul B de planul orizontal și circumferința discului.

Se putea ajunge la acest rezultat și geometric observînd că axa instantanee Δ formează unghiuri constante α_1 și α cu axele Oz_1 și Oz (fig. 15.4 *b*) unde:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{R}{r} \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{R}.$$

Componentele (15.12) ale vectorului accelerație unghiulară $\dot{\bar{\omega}}$ pe axele sistemului fix și a celui mobil sînt:

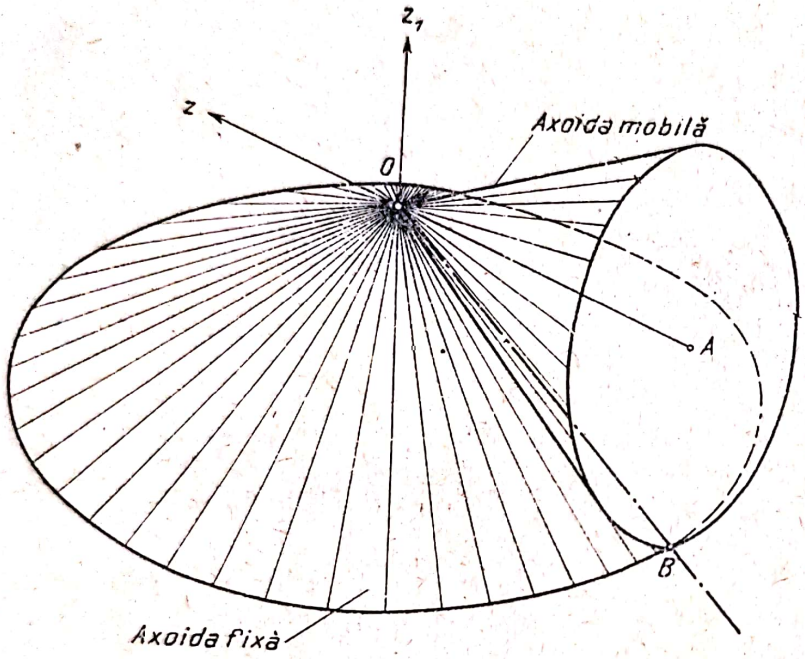


Fig. 15.4 *e*

$$\dot{\omega}_{x_1} = \frac{R}{r}\,\omega_1^2 \cos \psi$$

$$\dot{\omega}_{y_1} = \frac{R}{r}\,\omega_1^2 \sin \psi$$

$$\dot{\omega}_{z_1} = 0 \qquad (14)$$

$$\dot{\omega}_x = \frac{R}{r}\,\omega_1^2 \cos \varphi$$

$$\dot{\omega}_y = -\frac{R}{r}\,\omega_1^2 \sin \varphi$$

$$\dot{\omega}_z = 0. \qquad (15)$$

Modulul accelerației unghiulare este:

$$\dot{\omega} = \frac{R}{r}\,\omega_1^2 \qquad (16)$$

și $\dot{\bar{\omega}}$ fiind normală pe planul zOz_1 este paralelă cu linia nodurilor:

$$\dot{\bar{\omega}} = \frac{R}{r}\,\omega_1^2\,\bar{\nu} \qquad (17)$$

unde $\bar{\nu}$ = vers $\overline{ON}$.

Față de sistemul mobil coordonatele punctului P sînt:

$$x = r \qquad y = 0 \qquad z = -R$$

deci viteza (15.2) a punctului este:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_1 \sin \varphi & \omega_1 \cos \varphi & \dfrac{R\,\omega_1}{r} \\ r & 0 & -R \end{vmatrix} =$$

$$= -\omega_1 R \cos \varphi\,\bar{i} + \omega_1 R\,(1 + \sin \varphi)\,\bar{j} - r\,\omega_1 \cos \varphi\,\bar{k}. \qquad (18)$$

Scanned with OKEN Scanner

În punctul D, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ deci $\bar{v}_D = 2\ \omega_1\ R\ \bar{j}$ iar pentru $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\bar{j} = -\bar{\nu}$ axa Oy este opusă lui ON deci viteza $\bar{v}_D$ este orizontală:

$$\bar{v}_D = -\ 2\ \omega_1\ R\ \bar{\nu}. \tag{19}$$

În punctul B, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ deci $\bar{v}_B = 0$, rezultat ce era de așteptat deoarece B se găsește pe Δ.

Accelerația (15.10) a punctului P este:

$$\bar{a} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{R}{r}\ \omega_1^2 \cos\varphi & -\frac{R}{r}\ \omega_1^2 \sin\varphi & 0 \\ r & 0 & -R \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_1 \sin\varphi & \omega_1 \cos\varphi & \frac{R\,\omega_1}{r} \\ -\ \omega_1 R \cos\varphi & \omega_1 R\,(1 + \sin\varphi) & -\ r\ \omega_1 \cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$\bar{a} = -\ \frac{R^2\,\omega_1^2}{r}\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\cos^2\varphi\right)\bar{i} + r\ \omega_1^2 \sin\varphi\cos\varphi\,\bar{j} + R\ \omega_1^2\,(1 + 2\sin\varphi)\,\bar{k}. \tag{20}$$

În punctul D, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ deci $\bar{a}_D = -\frac{R^2\,\omega_1^2}{r}\bar{i} + 3\,R\ \omega_1^2\,\bar{k}$ iar pentru $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\bar{i} = \bar{k}_1$, axa Ox coincizînd cu Oz_1 deci:

$$\bar{a}_D = -\ \frac{R^2\,\omega_1^2}{r}\,\bar{k}_1 + 3\ R\ \omega_1^2\,\bar{k}. \tag{21}$$

În punctul B, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ deci $\bar{a}_B = -\frac{R^2\,\omega_1^2}{r}\bar{i} - R\ \omega_1^2\,\bar{k}$ și cum pentru $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, $\bar{i} = -\bar{k}_1$:

$$\bar{a}_B = \frac{R^2\,\omega_1^2}{r}\,\bar{k}_1 - R\ \omega_1^2\,\bar{k}. \tag{22}$$

Determinarea vitezei și accelerației punctului P se poate face și fără a recurge la cunoștințele din capitolul „Cinematica solidului cu un punct fix", în modul următor: Aflăm coordonatele punctului P în raport cu un sistem fix de coordonate $Ox_1y_1z_1$ (v. fig. 15.4 *a*):

$$x_1 = -\ R\sin\psi + r\cos\varphi\cos\psi;\ y_1 = R\cos\psi + r\cos\varphi\sin\psi;\ z_1 = r\sin\varphi. \tag{23}$$

Bara OA rotindu-se uniform cu viteza unghiulară ω_1, $\psi = \omega_1 t$. Discul rostogolindu-se fără alunecare pe plan în timp ce discul se rotește cu un

Scanned with OKEN Scanner

unghi φ, punctul de contact B descrie pe disc arcul $r\varphi$ și pe cercul din planul orizontal arcul $R\psi$, arcele fiind egale:

$$r\varphi = R\psi$$

deci:

$$\varphi = \frac{R}{r}\psi = \frac{R}{r}\omega_1 t \qquad \psi = \omega_1 t. \tag{24}$$

Componentele vitezei și accelerației punctului pe axele triedrului fix vor fi conform (13.5) și (13.6) derivatele de ordinul I și II în raport cu timpul t ale coordonatelor x_1, y_1, z_1. Lăsăm pe seama cititorului să efectueze aceste calcule. Evident se va ține seama de valorile (24) ale unghiurilor φ și ψ.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

15.5. Un disc de rază $\frac{R}{\sqrt{3}}$ înclinat sub unghiul $\theta = \frac{\pi}{3}$ față de orizontală se rostogolește fără alunecare pe un plan orizontal (fig. 15.5 *a*). Axa OA a discului (normală pe disc) se rotește în jurul axei verticale OD cu viteza unghiulară constantă ω_1. Să se determine viteza unghiulară instantanee $\bar{\omega}$, axa instantanee de rotație Δ, axoidele fixă și mobilă și vitezele și accelerațiile punctelor B și C (cel mai de jos și de sus al discului).

Răspuns. Axa instantanee Δ este dreapta OB, $\omega = \omega_1\sqrt{3}$ este coliniar cu Δ și este orientat de la B spre O, axoida fixă este un con avînd axa OD și unghiul la vîrf $\frac{\pi}{3}$ și cea mobilă un con avînd axa OA și unghiul la vîrf $\frac{\pi}{3}$, $v_B = 0$, $v_C = \sqrt{3}\,R\,\omega_1$ este normală pe planul OBC, accelerațiile sînt reprezentate în figura 15.5 *b*, $a_B = \omega_1^2 R$, $a_C = \sqrt{7}\,\omega_1^2 R$ iar $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

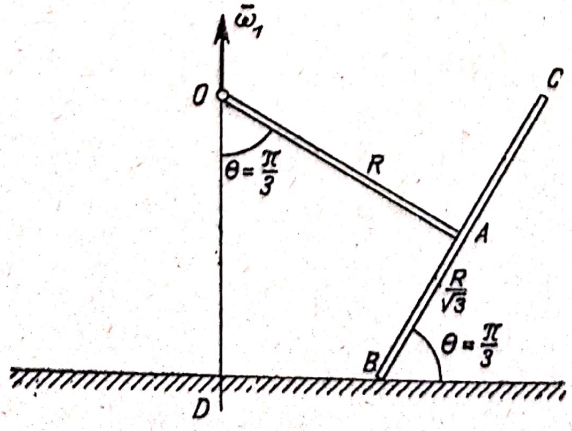


Fig. 15.5 *a*

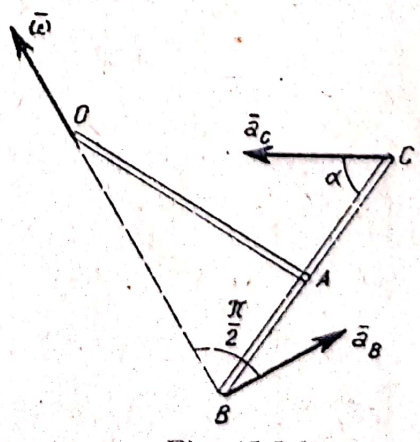


Fig. 15.5 *b*

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XVI

MIȘCAREA PLAN PARALELĂ

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Un solid rigid are o mișcare plan paralelă cînd un plan al său este silit să rămînă necontenit într-un plan π fix din spațiu.

Considerînd două sisteme de referință (fig. 16. *a*), unul fix $T_1\,(O_1x_1y_1z_1)$ planul $x_1O_1y_1$ fiind planul π și unul mobil $T\,(Oxyz)$ invariabil legat de solid, planul xOy fiind silit să rămînă necontenit în planul π, expresiile vitezei $\bar{v}$ și accelerației $\bar{a}$ a unui punct P avînd vectorul de poziție $\bar{r}$ în raport cu T sînt:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} \tag{16.1}$$

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \tag{16.2}$$

unde:

$$\begin{aligned} \bar{v}_0 &= v_{0x}\,\bar{i} + v_{0y}\,\bar{j} \\ \bar{a}_0 &= a_{0x}\,\bar{i} + a_{0y}\,\bar{j} \\ \bar{\omega} &= \omega\,\bar{k} = \dot{\theta}\,\bar{k} \\ \dot{\bar{\omega}} &= \dot{\omega}\,\bar{k} = \ddot{\theta}\,\bar{k} \end{aligned} \tag{16.3}$$

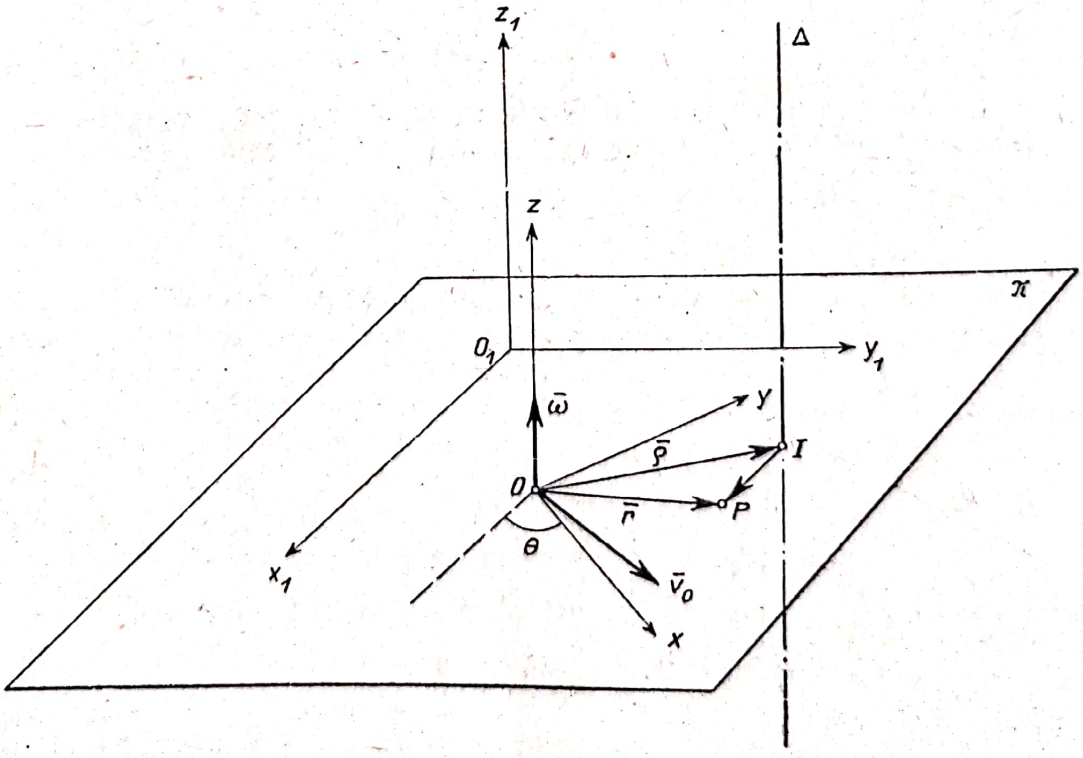


Fig. 16. *a*

sînt viteza și accelerația punctului O (situate în planul π) și viteza și accelerația unghiulară a solidului (s-a notat cu θ unghiul dintre axele O_1x_1 și Ox). Deci în mișcarea plană vectorii $\bar{v}_0$ și $\bar{\omega}$ sînt perpendiculari. Proiecțiile vitezei și accelerației pe axele mobile sînt:

$$v_x = v_{0x} - \omega y \qquad v_y = v_{0y} + \omega x \qquad v_z = 0 \tag{16.4}$$

$$a_x = a_{0x} - \dot{\omega} y - \omega^2 x \qquad a_y = a_{0y} + \dot{\omega} x - \omega^2 y \qquad a_z = 0 \tag{16.5}$$

prin urmare putem studia numai mișcarea punctelor din planul $z = 0$ căci toate punctele situate pe o paralelă la axa Oz au aceeași viteză și accelerație paralele cu planul π.

Locul punctelor de viteză nulă la un moment dat este axa instantanee de rotație Δ paralelă cu Oz. Punctul în care axa instantanee de rotație intersectează planul fix este centrul instantaneu de rotație I a cărui poziție poate fi determinată cu ajutorul ecuației vectoriale:

$$\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{\rho} = 0 \tag{16.6}$$

($\bar{\rho} = \overline{OI}$) și ale cărui coordonate în raport cu sistemul mobil ξ, η și în raport cu cel fix ξ_1, η_1 sînt:

$$\xi = -\frac{v_{0y}}{\omega} \qquad \eta = \frac{v_{0x}}{\omega} \tag{16.7}$$

$$\xi_1 = x_0 + \xi \cos\theta - \eta \sin\theta \qquad \eta_1 = y_0 + \xi \sin\theta + \eta \cos\theta \tag{16.8}$$

(x_0, y_0 sînt coordonatele punctului O față de sistemul fix).

Din (16.1) și (16.6) rezultă:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \overline{IP} \tag{16.9}$$

deci distribuția de viteze a solidului la un moment dat este aceeași ca și cînd solidul s-ar roti în jurul axei instantanee de rotație. Modulul vitezei este:

$$v = \omega d \tag{16.10}$$

unde d este distanța de la punct la axa instantanee, viteza fiind normală pe vectorul IP. Putem determina poziția centrului instantaneu de rotație I cunoscînd direcțiile vitezelor a două puncte P_1 și P_2 din planul π, centrul I găsindu-se la intersecția normalelor pe direcția vitezelor (fig. 16. *b*). Dacă cunoaștem viteza unui punct $\bar{v}_1$ și viteza unghiulară ω, I se găsește pe normala IP_1 la distanța $d_1 = \frac{v_1}{\omega}$ de punctul P_1.

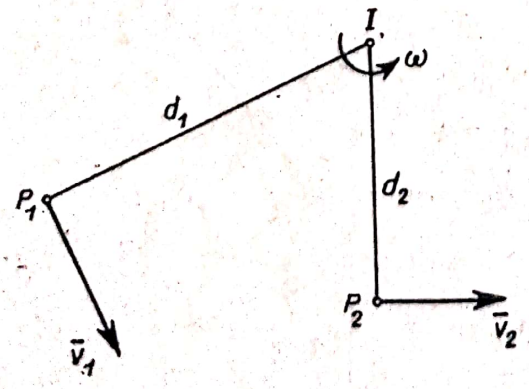


Fig. 16. *b*

Locul geometric al centrelor instantanee de rotație față de planul mobil xOy este o curbă ce se numește rostogoli-

toare (intersecția axoidei mobile cu planul π), ecuațiile ei parametrice fiind ecuațiile (16.7).

Locul geometric al centrelor instantanee de rotație față de planul fix $x_1O_1y_1$ este o curbă denumită bază (intersecția axoidei fixe cu planul π), ecuațiile parametrice ale bazei fiind ecuațiile (16.8).

Baza și rostogolitoarea sînt tangente în I iar în timpul mișcării rostogolitoarea se rostogolește fără să alunece peste bază.

Locul punctelor de accelerație nulă este o dreaptă paralelă cu Oz a cărei ecuație vectorială este:

$$\bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}') = 0. \qquad (16.11)$$

Această dreaptă intersectează planul π în centrul acceleraţiilor J ale cărei coordonate față de sistemul mobil sînt:

$$\xi' = \frac{\omega^2 a_{0x} - \dot{\omega} a_{0y}}{\omega^4 + \dot{\omega}^2} \qquad \eta' = \frac{\dot{\omega} a_{0x} + \omega^2 a_{0y}}{\omega^4 + \dot{\omega}^2}. \qquad (16.12)$$

Acceleraţia unui punct oarecare P din planul π este:

$$\bar{a} = \dot{\bar{\omega}} \times \overline{JP} - \omega^2 \overline{JP} \qquad (16.13)$$

aceeași ca și cum solidul s-ar roti în jurul punctului J. Dacă d' este distanța de la punctul P la centrul acceleraţiilor, acceleraţia are două componente, una a_τ normală pe $\overline{JP}$ și una a_ν pe direcția $\overline{JP}$ dirijată spre J (fig. 16.*c*) unde:

$$a_\tau = \dot{\omega}\, d' \qquad a_\nu = \omega^2 d'. \qquad (16.14)$$

Unghiul φ dintre acceleraţia $\bar{a}$ și direcția JP este dat de:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_\tau}{a_\nu} = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \qquad (16.15)$$

el fiind același la un moment dat pentru toate punctele solidului. Cunoscînd direcţiile acceleraţiilor a două puncte P_1 și P_2 și raportul $\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}$ putem determina direcţiile JP_1 și JP_2 care se intersectează în centrul acceleraţiilor J. În particular dacă $\dot{\omega} = 0$, $\varphi = 0$ deci J se găsește la intersecția suporturilor acceleraţiilor.

În general acceleraţia centrului instantaneu de rotație

$$\bar{a}_I = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho})$$

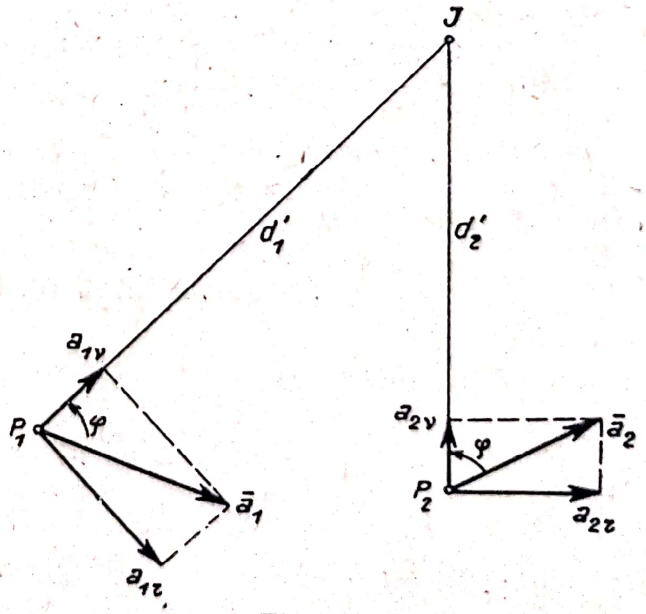


Fig. 16.c

nu este nulă. După cum vom arăta în problema (16.23) ea se poate pune sub forma:

$$\bar{a}_l = \bar{V} \times \bar{\omega} \tag{16.16}$$

unde:

$$\bar{V} = \dot{\xi}_1 \bar{i}_1 + \dot{\eta}_1 \bar{j}_1 = \dot{\xi}\,\bar{i} + \dot{\eta}\,\bar{j} \tag{16.17}$$

este viteza de mișcare a centrului instantaneu pe bază sau pe rostogolitoare. Din (16.16) rezultă că accelerația centrului instantaneu este nulă cînd $\bar{V} = 0$, adică centrul instantaneu este fix, mișcarea fiind o rotație în jurul axei fixe Δ. (Dacă $\bar{\omega} = 0$ mișcarea este de translație, centrul instantaneu fiind punctul de la infinit situat pe direcția normală pe $\bar{v}_0$.)

Pentru determinarea distribuției de viteze într-o mișcare plană putem folosi și următoarele două proprietăți demonstrate în problemele (14.15) și (14.16).

Proiecțiile vitezelor $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ a două puncte P_1 și P_2 pe direcția P_1P_2 (de versor $\bar{u}$) sînt egale:

$$\bar{v}_1 \bar{u} = \bar{v}_2 \bar{u}. \tag{16.18}$$

Extremitățile vectorilor viteză a trei puncte coliniare sînt coliniare (vectorii viteză fiind reprezentați la aceeași scară).

B. PROBLEME REZOLVATE

16.1. O bară OA de lungime l se mișcă astfel încît cele două capete ale sale se deplasează pe două axe ortogonale O_1x_1 și O_1y_1. Să se determine: poziția centrului instantaneu de rotație, baza și rostogolitoarea și poziția punctului D de pe bară a cărui viteză are direcția barei. Presupunînd că legea de mișcare a capătului O este $x_0 = l \sin \omega t$ se cere poziția centrului accelerațiilor J și accelerațiile punctelor O, A, C (mijlocul barei) și I (centrul instantaneu de rotație).

Rezolvare. Alegînd sistemele de axe din figura 16.1 *a* sistemul Oxy fiind solidar cu bara conform (16.7) coordonatele centrului instantaneu față de sistemul mobil sînt:

$$\xi = -\frac{-v_0 \sin\theta}{\dot{\theta}} \qquad \eta = \frac{v_0 \cos\theta}{\dot{\theta}}. \tag{1}$$

Coordonatele punctului O față de sistemul fix sînt:

$$x_0 = l \sin\theta \qquad y_0 = 0 \tag{2}$$

deci:

$$v_0 = \dot{x}_0 = l \cos\theta \cdot \dot{\theta}. \tag{3}$$

Înlocuind în (1) obținem ecuațiile parametrice ale rostogolitoarei:

$$\xi = l \sin\theta \cos\theta \qquad \eta = l \cos^2\theta \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

și eliminînd parametrul θ din aceste ecuații obținem:

$$\xi^2 + \left(\eta - \frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 \tag{5}$$

rostogolitoarea fiind un cerc cu centrul în mijlocul $C\left(0, \frac{l}{2}\right)$ al barei avînd raza $\frac{l}{2}$.

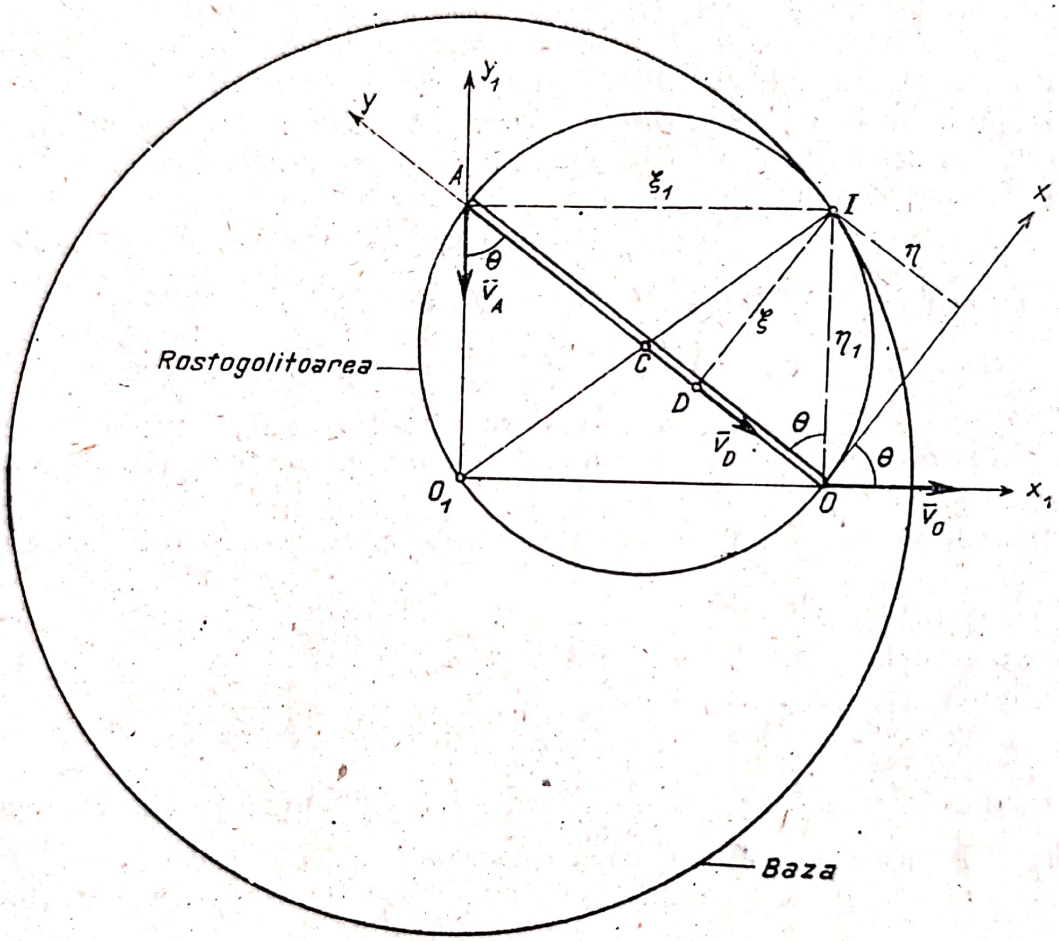


Fig. 16.1 *a*

Coordonatele (16.8) ale centrului instantaneu față de sistemul fix sînt:

$$\xi_1 = x_0 + \xi\cos\theta - \eta\sin\theta = l\sin\theta;\quad \eta_1 = y_0 + \xi\sin\theta + \eta\cos\theta = l\cos\theta \tag{6}$$

deci baza este cercul:

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = l^2 \tag{7}$$

avînd centrul în O_1 și raza l.

Puteam găsi aceste rezultate observînd că cunoaștem direcțiile vitezelor a două puncte O și A ale barei. Normalele pe direcțiile acestor viteze

Scanned with OKEN Scanner

OI și AI se intersectează în centrul instantaneu I (fig. 16.1 *a*). Din figură avem:

$$\xi_1 = O_1O = l \sin\theta;\quad \eta_1 = OI = l\cos\theta;\quad \xi = OI\sin\theta = l\cos\theta\sin\theta$$

$$\eta = OI\cos\theta = l\cos^2\theta$$

adică aceleași valori cu (4) și (6).

În sfîrșit problema admite și o soluție geometrică. Unghiul AOI este drept, deci punctul I față de punctele A și B (față de bară) descrie un cerc avînd diametrul AB, cerc care este rostogolitoarea. Figura O_1OIA este un dreptunghi, deci $O_1I = OA = l$ adică punctul I se găsește la distanța constantă l de O_1, adică descrie față de O_1 (față de sistemul fix) un cerc de rază l cu centrul în O_1, cerc care este baza.

În punctul D, $\bar{v}_D$ are direcția barei. Însă ID este normal pe $\bar{v}_D$, deci pe bară, punctul D este prin urmare piciorul perpendicularei coborîte din I pe bară, iar:

$$OD = \eta = l\cos^2\theta.$$

Conform (16.10) viteza punctului D este:

$$v_D = \dot{\theta}\cdot ID = \dot{\theta}\xi = l\cos\theta\sin\theta\,\dot{\theta}.$$

Ținînd seama de (3) ea se poate pune sub forma $v_D = v_0\sin\theta$ rezultat ce se putea obține și direct cu ajutorul teoremei proiecțiilor (16.18) aplicată vitezelor $\bar{v}_D$ și $\bar{v}_0$.

Dacă legea de mișcare a punctului O este $x_0 = l\sin\omega t$ din (2) rezultă:

$$\theta = \omega t \qquad \dot{\theta} = \omega \qquad \ddot{\theta} = \dot{\omega} = 0 \tag{8}$$

Putem determina și accelerația punctului O:

$$\bar{a}_0 = \ddot{x}_0\,\bar{i}_1 = -\omega^2 l\sin\omega t\,\bar{i}_1 = -\omega^2 x_0\,\bar{i}_1. \tag{9}$$

Conform (16.15) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\dot{\omega}}{\omega^2} = 0$ deci toate punctele barei au numai accelerații normale, polul J găsindu-se pe suportul accelerației. Pentru punctul O vom avea (16.13):

$$\bar{a}_0 = \bar{a}_{0v} = -\omega^2\,\overline{JO} \tag{10}$$

deci din (9) și (10):

$$\overline{JO} = x_0\,\bar{i}_1$$

adică punctul J se găsește în O_1, polul accelerațiilor fiind fix. Accelerațiile (16.13) ale punctelor A, C și I vor fi:

$$\bar{a}_A = -\omega^2\,\overline{JA} = -\omega^2 l\cos\omega t\,\bar{j}_1$$

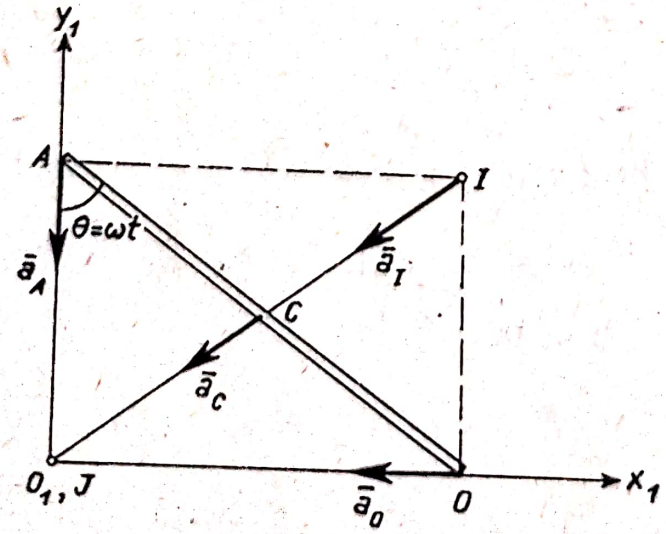


Fig. 16.1*b*

$$\bar{a}_C = -\omega^2 \overline{JC} = -\omega^2 \left(\frac{l}{2} \sin \omega t \, \bar{i}_1 + \frac{l}{2} \cos \omega t \, \bar{j}_1 \right) \qquad |\bar{a}_C| = \frac{l}{2} \omega^2$$

$$\bar{a}_I = -\omega^2 \overline{JI} = -\omega^2 (l \sin \omega t \, \bar{i}_1 + l \cos \omega t \, \bar{j}_1) \qquad |\bar{a}_I| = l\omega^2$$

ele fiind reprezentate în figura 16.1*b*.

Acceleraţia centrului instantaneu se poate determina şi cu ajutorul formulei (16.16). Viteza de deplasare (16.17) a centrului instantaneu pe bază este:

$$\bar{V} = \dot{\xi}_i \bar{i}_1 + \dot{\eta}_1 \bar{j}_1 = l \cos \theta \cdot \dot{\theta} \, \bar{i}_1 - l \sin \theta \cdot \dot{\theta} \, \bar{j}_1 = l \omega \cos \omega t \, \bar{i}_1 - l\omega \sin \omega t \bar{j}_1$$

deci:

$$\bar{a}_I = \bar{V} \times \bar{\omega} = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ l\omega \cos \omega t & -l\omega \sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{vmatrix} = -l\omega^2 \sin \omega t \, \bar{i}_1 - l\omega^2 \cos \omega t \bar{j}_1$$

identic cu rezultatul stabilit anterior.

16.2. O bară OB se mişcă astfel încît capătul ei, O descrie cu viteza constantă v_0 un semicerc de rază r, bara trecînd necontenit prin punctul A

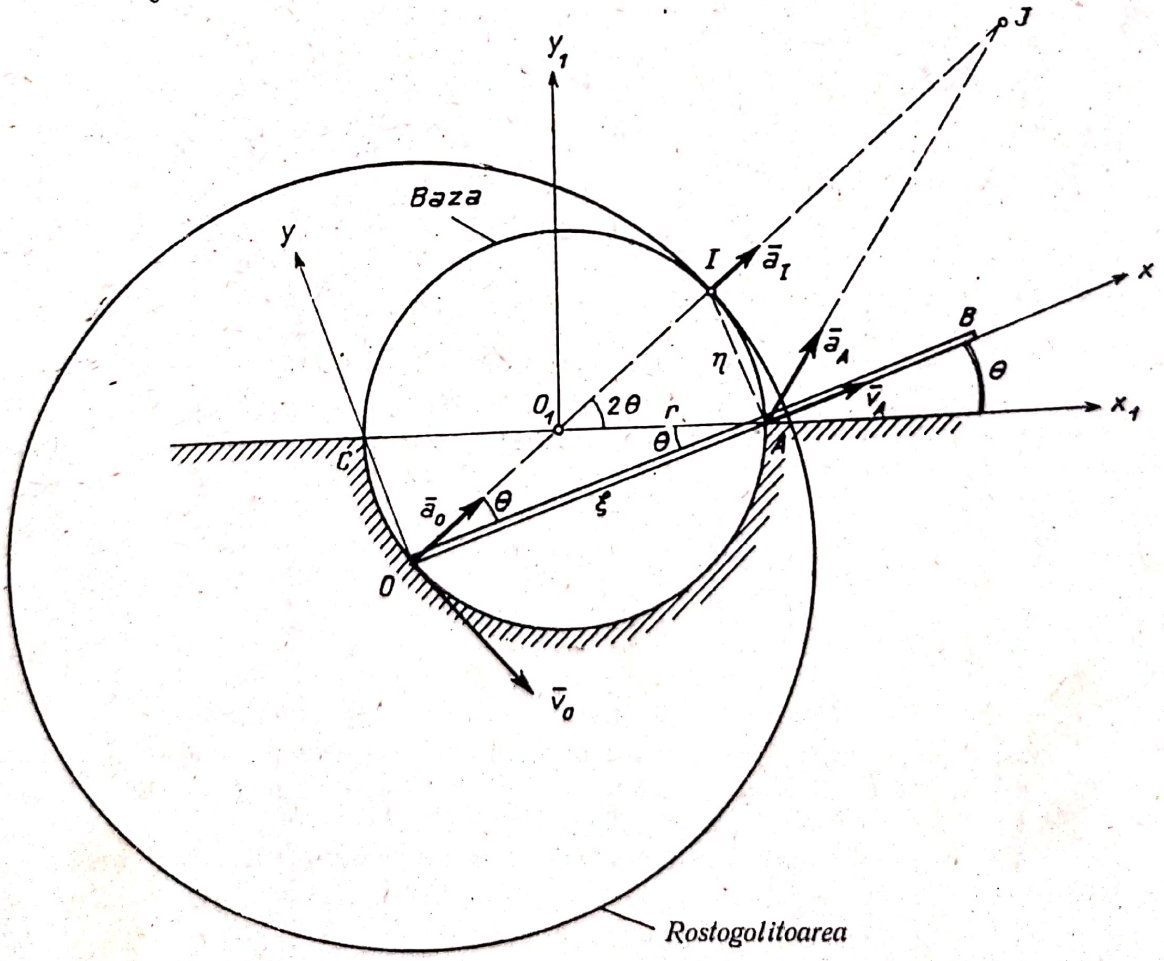


Fig. 16.2

al cercului. Să se determine poziția centrului instantaneu de rotație, baza, rostogolitoarea, poziția centrului accelerațiilor precum și accelerațiile punctelor O, A și I.

Rezolvare. Alegînd sistemele de axe din figura 16.2, coordonatele (16.7) ale centrului instantaneu față de sistemul mobil sînt:

$$\xi = -\frac{-v_0 \cos\theta}{\dot\theta} \qquad \eta = \frac{v_0 \sin\theta}{\dot\theta}.$$

Însă arcul $CO = s = 2r\theta$ deci:

$$v_0 = 2r\dot\theta \tag{1}$$

și:

$$\xi = 2r\cos\theta \qquad \eta = 2r\sin\theta \tag{2}$$

deci rostogolitoarea este cercul:

$$\xi^2 + \eta^2 = 4r^2 \tag{3}$$

cu centrul în O și raza $2r$. Coordonatele (16.8) ale centrului instantaneu față de sistemul fix sînt:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -r\cos 2\theta + 2r\cos^2\theta - 2r\sin^2\theta = r\cos 2\theta \\ \eta_1 &= -r\sin 2\theta + 2r\sin\theta\cos\theta + 2r\sin\theta\cos\theta = r\sin 2\theta \end{aligned} \tag{4}$$

deci baza este cercul:

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = r^2 \tag{5}$$

cu centrul în O_1 și de rază r.

Puteam găsi aceste rezultate observînd că direcțiile vitezelor punctelor O și A sînt cunoscute, $\bar v_0$ tangentă la cerc iar $\bar v_A$ în lungul barei. Normalele pe direcțiile acestor viteze se intersectează în centrul instantaneu de rotație I. Cum $AI \perp OA$:

$$\sphericalangle OIA = \sphericalangle O_1AI = \frac{\pi}{2} - \theta$$

deci:

$$O_1I = O_1A = O_1O = r.$$

Punctul I se găsește la distanța $OI = 2r$ de O (rostogolitoarea este un cerc cu centrul în O și de rază $2r$) și la distanța $O_1I = r$ de O_1 (baza este un cerc cu centrul în O_1 și de rază r).

Pentru a găsi centrul accelerațiilor determinăm viteza și accelerația unghiulară. Din (1):

$$\omega = \dot\theta = \frac{v_0}{2r} \qquad \dot\omega = 0 \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

deci:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = 0 \tag{7}$$

punctele barei avînd numai accelerații dirijate spre centrul accelerațiilor J.

Accelerația punctului O este normală pe cerc și egală în modul [conform (13.18)]:

$$a_0 = a_v = \frac{v_0^2}{r}. \tag{8}$$

Pe de altă parte conform (16.14):

$$a_0 = \omega^2 JO = \frac{v_0^2}{4r^2} JO. \tag{9}$$

Din (8) și (9) rezultă:

$$JO = 4r \tag{10}$$

deci polul accelerațiilor se găsește pe dreapta OO_1 (suportul lui $\bar{a}_0$) la distanța $4r$ de O.

Accelerația (16.13) a centrului instantaneu I este:

$$\bar{a}_I = -\omega^2 \overline{JI} \tag{11}$$

și cum $JI = JO - OI = 2r$:

$$a_I = \frac{v_0^2}{2r} \qquad \bar{a}_I = \frac{\bar{a}_0}{2}. \tag{12}$$

În sfîrșit accelerația punctului A este:

$$\bar{a}_A = -\omega^2 \overline{JA} = \frac{v_0^2}{2r} \cos\theta \bar{i} + \frac{v_0^2}{r} \sin\theta \bar{j} \tag{13}$$

deoarece $\overline{JA} = -2r \cos\theta \bar{i} - 4r \sin\theta \bar{j}$.

16.3. Se dau două bare O_1O și OA de lungimi egale l, articulate în O_1 (punct fix) și în O. Bara O_1O se rotește uniform cu viteza unghiulară ω în jurul punctului O_1, iar capătul A al barei OA alunecă pe dreapta fixă O_1A. Să se determine centrul instantaneu I, centrul accelerațiilor J, baza și rostogolitoarea barei OA precum și vitezele și accelerațiile punctelor O, A, I și P (punct oarecare al barei OA).

Rezolvare. Punctul O descrie un cerc cu centrul în O_1, iar punctul A dreapta Ox_1, normalele OI și AI pe vitezele $\bar{v}_0$ și $\bar{v}_A$ intersectîndu-se în centrul instantaneu de rotație I (fig. 16.3). Coordonatele centrului instantaneu față de sistemul fix $O_1x_1y_1$ sînt:

$$\xi_1 = O_1A = 2l \cos\alpha \qquad \eta_1 = AI = 2l \sin\alpha \tag{1}$$

deci baza este cercul:

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = 4\,l^2 \tag{2}$$

avînd centrul în O_1 și raza $O_1I = 2\,l$. Față de sistemul mobil Oxy coordonatele centrului instantaneu sînt:

$$\xi = l\cos 2\alpha \qquad \eta = l\sin 2\alpha \tag{3}$$

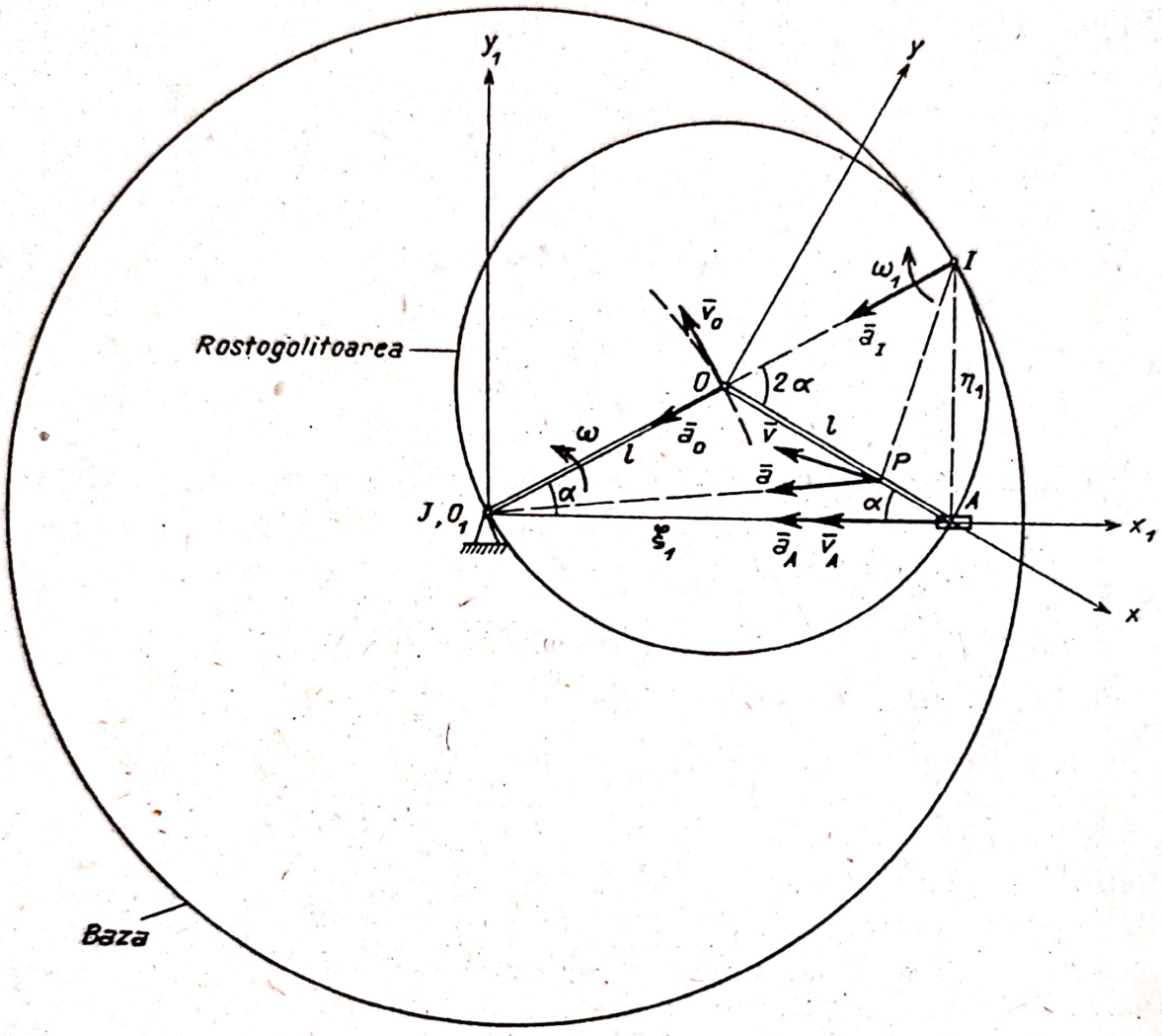


Fig. 16.3

rostogolitoarea fiind cercul:

$$\xi^2 + \eta^2 = l^2 \tag{4}$$

cu centrul în O și raza $OI = l$.

Viteza punctului O considerat ca punct al barelor O_1O și OA este:

$$v_0 = |\,\omega\,|\,O_1O \qquad v_0 = |\,\omega_1\,|\,IO \tag{5}$$

deci viteza unghiulară instantanee a barei OA și accelerația ei unghiulară sînt:

$$\omega_1 = -\,\omega \qquad \dot{\omega}_1 = 0 \tag{6}$$

(sensul lui $\bar{\omega}_1$ fiind invers lui $\bar{\omega}$). Accelerațiile tangențiale (16.14) fiind nule, centrul accelerațiilor se va găsi la intersecția suporturilor accelerațiilor punctelor barei. Accelerația punctului O este normală pe viteza $\bar{v}_0$

(pe direcția OO_1) căci v_0 este constant; accelerația punctului A care are o mișcare rectilinie are direcția axei O_1x_1. Suporturile lui $\bar{a}_0$ și $\bar{a}_A$ se intersectează în O_1 care este centrul J al accelerațiilor.

Vitezele (16.9) ale punctelor O, A, I și P sînt:

$$\bar{v}_0 = \bar{\omega}_1 \times \overline{IO} \quad \bar{v}_A = \bar{\omega}_1 \times \overline{IA} \quad \bar{v}_I = 0 \quad \bar{v} = \bar{\omega}_1 \times \overline{IP} \tag{7}$$

și notînd $OP = x$, avem $\overline{IP} = (x - l)\cos\alpha\,\bar{i}_1 - (x + l)\sin\alpha\,\bar{j}_1$, $\bar{\omega}_1 = -\omega\bar{k}_1$ deci:

$$\begin{aligned} \bar{v}_0 &= -\omega l \sin\alpha\,\bar{i}_1 + \omega l\cos\alpha\,\bar{j}_1; \qquad \bar{v}_A = -2\omega l\sin\alpha\,\bar{i}_1 \\ \bar{v} &= -\omega(l + x)\sin\alpha\,\bar{i}_1 + \omega(l - x)\cos\alpha\,\bar{j}_1. \end{aligned} \tag{8}$$

Accelerațiile (16.13) ale acestor puncte sînt:

$$\begin{aligned} \bar{a}_0 &= -\omega_1^2\,\overline{JO} = -\omega^2 l\cos\alpha\,\bar{i}_1 - \omega^2 l\sin\alpha\,\bar{j}_1 \\ \bar{a}_A &= -\omega_1^2\,\overline{JA} = -2\omega^2 l\cos\alpha\,\bar{i}_1 \\ \bar{a}_I &= -\omega_1^2\,\overline{JI} = -2\omega^2 l\cos\alpha\,\bar{i}_1 - 2\omega^2 l\sin\alpha\,\bar{j}_1 \\ \bar{a} &= -\omega_1^2\,\overline{JP} = -\omega^2(l + x)\cos\alpha\,\bar{i}_1 - \omega^2(l - x)\sin\alpha\,\bar{j}_1. \end{aligned} \tag{9}$$

16.4. O bară OB se mișcă astfel încît rămîne tangentă la un cerc de rază r, capătul ei O alunecînd pe dreapta O_1x_1. Cunoscînd viteza $\bar{v}_0$ constantă a capătului barei se cere poziția centrului instantaneu de rotație, baza, rostogolitoarea, viteza și accelerația unghiulară, poziția centrului accelerațiilor al barei precum și vitezele și accelerațiile punctelor A și I.

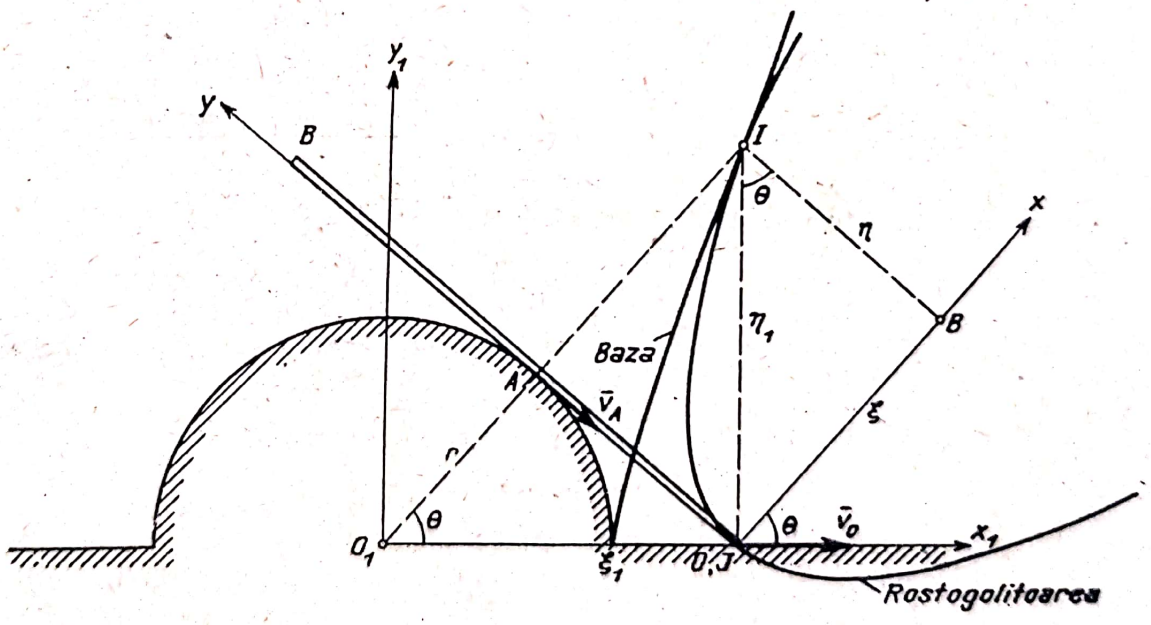


Fig. 16.4 *a*

Rezolvare. Centrul instantaneu I (fig. 16.4 *a*) se găsește la intersecția normalelor OI și AI duse în O și A pe direcțiile cunoscute ale vite-

zelor $\bar{v}_0$ și $\bar{v}_A$ (tangentă la cerc). Coordonatele centrului instantaneu în raport cu sistemele de coordonate fix $O_1x_1y_1$ și mobil (solidar legat de bară) Oxy sînt:

$$\xi_1 = O_1O = \frac{r}{\cos\theta} \qquad \eta_1 = OI = \xi_1 \operatorname{tg}\theta = \frac{r\sin\theta}{\cos^2\theta} \tag{1}$$

$$\xi = OB = \eta_1 \sin\theta = r\operatorname{tg}^2\theta \qquad \eta = IB = \eta_1\cos\theta = r\operatorname{tg}\theta \tag{2}$$

și eliminînd parametrul θ, ecuația bazei este:

$$\eta_1 = \frac{\xi_1\sqrt{\xi_1^2 - r^2}}{r} \quad \text{sau} \quad \xi_1^4 - r^2\xi_1^2 - r^2\eta_1^2 = 0 \tag{3}$$

iar rostogolitoarea este parabola

$$\eta^2 = r\xi \tag{4}$$

avînd drept axă axa Ox și vîrful în O.

Conform (16.10):

$$v_0 = \omega IO = \omega\eta_1 \tag{5}$$

deci viteza unghiulară este:

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{v_0\cos^2\theta}{r\sin\theta} \tag{6}$$

iar accelerația unghiulară:

$$\dot{\omega} = \frac{v_0(-2\cos\theta\sin^2\theta - \cos^3\theta)}{r\sin^2\theta}\dot{\theta} = -\frac{v_0^2\cos^3\theta(1+\sin^2\theta)}{r^2\sin^3\theta}. \tag{7}$$

Accelerația punctului O fiind nulă:

$$\bar{a}_0 = 0 \tag{8}$$

punctul O avînd o mișcare rectilinie și uniformă, centrul J al accelerațiilor se găsește în O.

Vitezele (16.10) ale punctelor A și I sînt:

$$v_I = 0 \qquad v_A = \omega\, IA = \frac{v_0^2\cos^2\theta}{r\sin\theta} r\operatorname{tg}^2\theta = v_0\sin\theta \tag{9}$$

rezultat ce se putea obține și cu relația (16.18) aplicată punctelor O și A.

Cum:

$$\dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega}\bar{k} = \dot{\omega}\,\bar{k}_1 \qquad \overline{JA} = r\operatorname{tg}\theta\,\bar{j} \qquad \overline{JI} = r\operatorname{tg}^2\theta\,\bar{i} + r\operatorname{tg}\theta\,\bar{j} = \frac{r\sin\theta}{\cos^2\theta}\bar{j}_1$$

accelerațiile (16.13) ale punctelor A și I sînt:

$$\bar{a}_A = \dot{\bar{\omega}} \times \overline{JA} - \omega^2\,\overline{JA} = \frac{v_0^2\cos^2\theta}{r\sin^2\theta}(1+\sin^2\theta)\,\bar{i} - \frac{v_0^2\cos^3\theta}{r\sin\theta}\bar{j} \tag{10}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\bar{a}_I = \dot{\bar{\omega}} \times \overline{JI} - \omega^2 \overline{JI} = \frac{v_0^2}{r} \operatorname{ctg}^2 \theta \bar{i} - 2 \frac{v_0^2}{r} \operatorname{ctg} \theta \bar{j} =$$

$$= \frac{v_0^2}{r} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} (1 + \sin^2 \theta) \bar{i}_1 - \frac{v_0^2}{r} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \bar{j}_1. \qquad (11)$$

Componentele (16.14) ale acceleraţiilor pe direcţiile JA, JI şi pe normalele pe aceste direcţii sînt:

$$a_{Av} = \frac{v_0^2 \cos^3 \theta}{r \sin \theta} \qquad a_{A\tau} = -\frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{r \sin^2 \theta} (1 + \sin^2 \theta)$$

$$a_{Iv} = \frac{v_0^2}{r} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \qquad a_{I\tau} = -\frac{v_0^2}{r} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} (1 + \sin^2 \theta) \qquad (12)$$

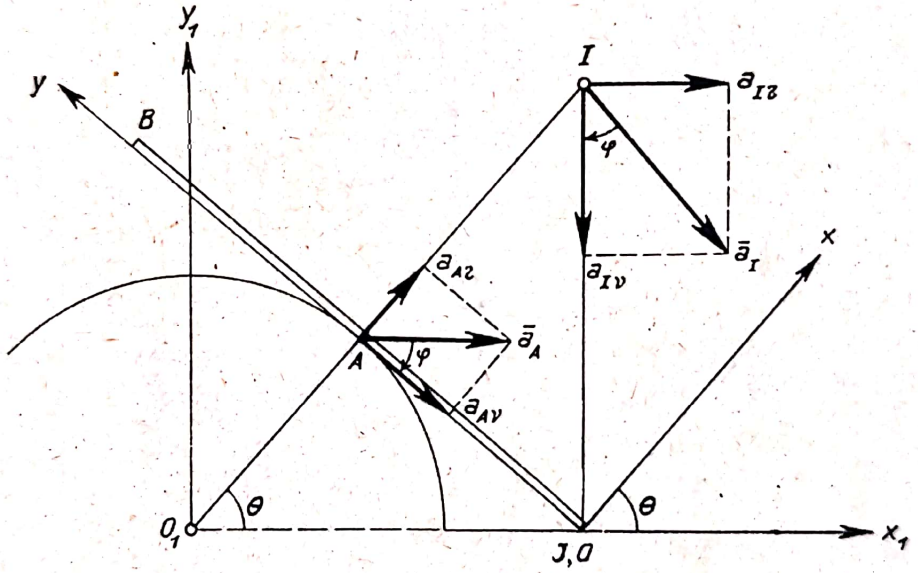


Fig. 16.4 *b*

unghiul φ (16.15) dintre acceleraţie şi componenta normală fiind dat de:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = -\frac{1 + \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}. \qquad (13)$$

Unghiul φ fiind negativ, vectorul acceleraţie normală se găseşte la dreapta vectorului acceleraţie (fig. 16.4 *b*).

Acceleraţia punctul I poate fi determinată şi cu ajutorul relaţiei (16.16):

$$\bar{a}_I = \bar{V} \times \bar{\omega} \qquad (14)$$

unde viteza de mişcare (16.17) a centrului instantaneu pe bază sau pe rostogolitoare este:

$$\bar{V} = \dot{\xi} \bar{i} + \dot{\eta} \bar{j} = \frac{2r \operatorname{tg} \theta}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} \bar{i} + \frac{r}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} \bar{j} = \frac{2 v_0}{\cos \theta} \bar{i} + \frac{v_0}{\sin \theta} \bar{j} \qquad (15)$$

Scanned with OKEN Scanner

sau:

$$\overline{V} = \dot{\xi}_1 \overline{i}_1 + \dot{\eta}_1 \overline{j}_1 = \frac{r \sin\theta}{\cos^2\theta}\dot{\theta}\overline{i}_1 + \frac{r(1+\sin^2\theta)}{\cos^3\theta}\dot{\theta}\overline{j}_1 = v_0\overline{i}_1 + \frac{v_0(1+\sin^2\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\overline{j}_1 \tag{16}$$

iar:

$$\overline{\omega} = \frac{v_0\cos^2\theta}{r\sin\theta}\overline{k} = \frac{v_0\cos^2\theta}{r\sin\theta}\overline{k}_1 . \tag{17}$$

Înlocuind în (14) se obțin expresiile (11) ale accelerației $\overline{a}_I$.

16.5. O bară în formă de echer se mișcă în același plan astfel încît se reazemă tot timpul pe pragul B, iar punctul A este mereu în contact cu un perete vertical situat la distanța $a = OA = O_1B$ de B. Să se determine baza și rostogolitoarea mișcării.

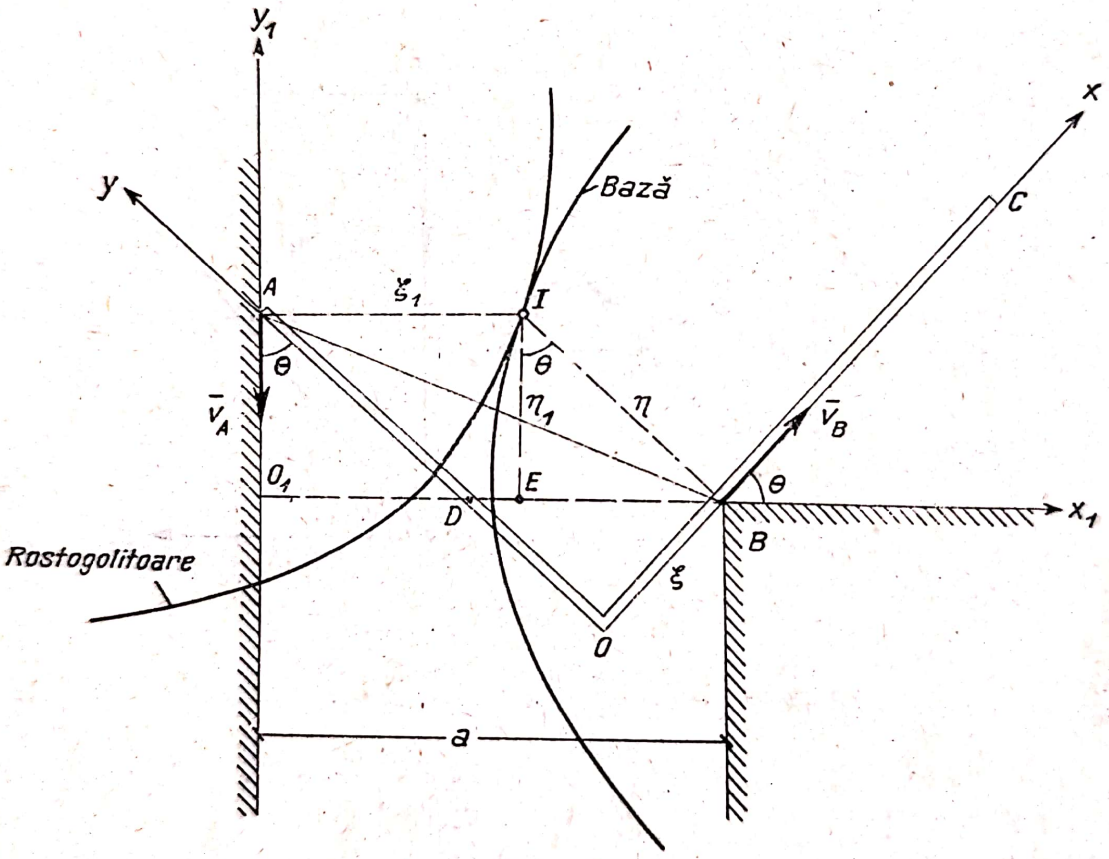


Fig. 16.5

Rezolvare. Cum $\overline{v}_B$ are direcția barei OC rezultă că centrul instantaneu I se va găsi la intersecția normalelor pe OC în B și pe perete în A.

$$\sphericalangle OAB = \sphericalangle O_1BA$$

căci triunghiurile dreptunghice OAB și O_1BA având ipotenuza și o catetă egale ($AB = AB$, $OA = O_1B$) sînt egale. Rezultă de aici că în triunghiul isoscel ADB:

$$AD = DB$$

și cum patrulaterul $ADBI$ este un romb:

$$IA = IB. \tag{1}$$

Deci punctul I este egal depărtat de dreapta O_1y_1 și punctul B, adică descrie față de sistemul fix o parabolă cu directoarea O_1y_1 și focarul în B (baza).

Punctul I este egal îndepărtat de punctul A și de dreapta Ox adică în raport cu bara descrie o parabolă cu directoarea Ox și focarul în A (rostogolitoarea).

Se poate da și o soluție analitică. Din figura 16.5 avem:

$$AI + IB \sin\theta = a \tag{2}$$

și ținînd seama de (1):

$$\xi_1 = AI = \frac{a}{1+\sin\theta} \qquad \eta = IB = \frac{a}{1+\sin\theta} \tag{3}$$

$$\eta_1 = \eta\cos\theta = \frac{a\cos\theta}{1+\sin\theta} \qquad \xi = \xi_1\cos\theta = \frac{a\cos\theta}{1+\sin\theta}.$$

Eliminînd parametrul θ obținem ecuațiile bazei:

$$\eta_1^2 = 2a\xi_1 - a^2 \tag{4}$$

și rostogolitoarei:

$$\xi^2 = 2a\eta - a^2. \tag{5}$$

16.6. Se consideră patrulaterul articulat $ABCD$ unde $AB = CD = 2a$ și $BC = AD = 2b > 2a$ (antiparalelogram). Presupunînd bara AB fixă, să se determine baza și rostogolitoarea barei CD (fig. 16.6 *a*). Presupunînd apoi bara BC fixă, să se determine baza și rostogolitoarea barei AD (fig. 16.6 *b*).

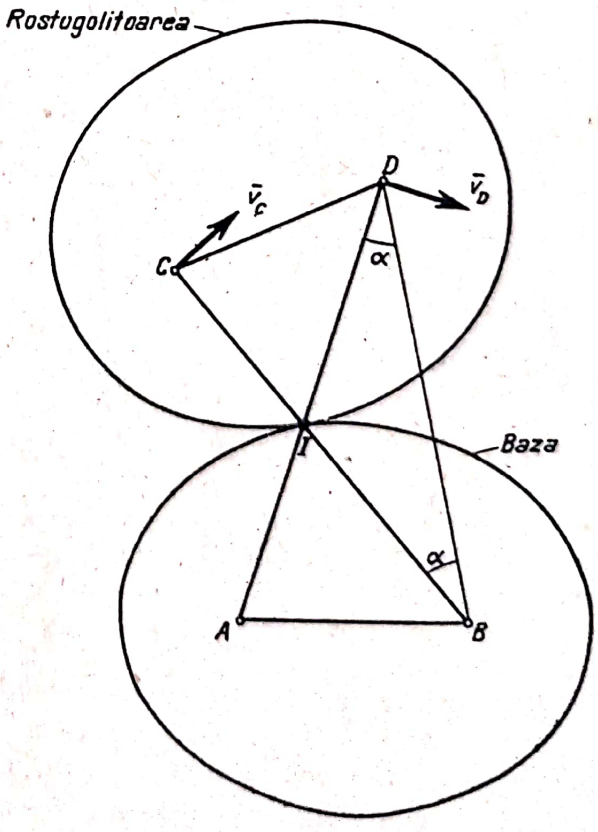


Fig. 16.6 *a*

Rezolvare. În primul caz punctele C și D ale barei CD descriu cercuri cu centrele în A și B, normalele la vitezele $\bar{v}_C$ și $\bar{v}_D$, barele BC și AD intersectîndu-se în centrul instantaneu de rotație I (fig. 16.6 *a*).

Triunghiurile BAD și BCD sînt egale deoarece $AB = CD$, $AD = BC$ și $BD = BD$ prin urmare:

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD = \alpha \tag{1}$$

Triunghiul BID este deci isoscel și:

$$IB = ID. \tag{2}$$

Pentru a găsi baza raportăm poziția centrului instantaneu la un sistem fix (legat de punctele fixe A și B). Observînd că:

$$AI + IB = AI + ID = AB = 2b \tag{3}$$

adică suma distanțelor de la punctul I la punctele fixe A și B este constantă, rezultă că I descrie față de sistemul fix o elipsă cu focarele în A și B

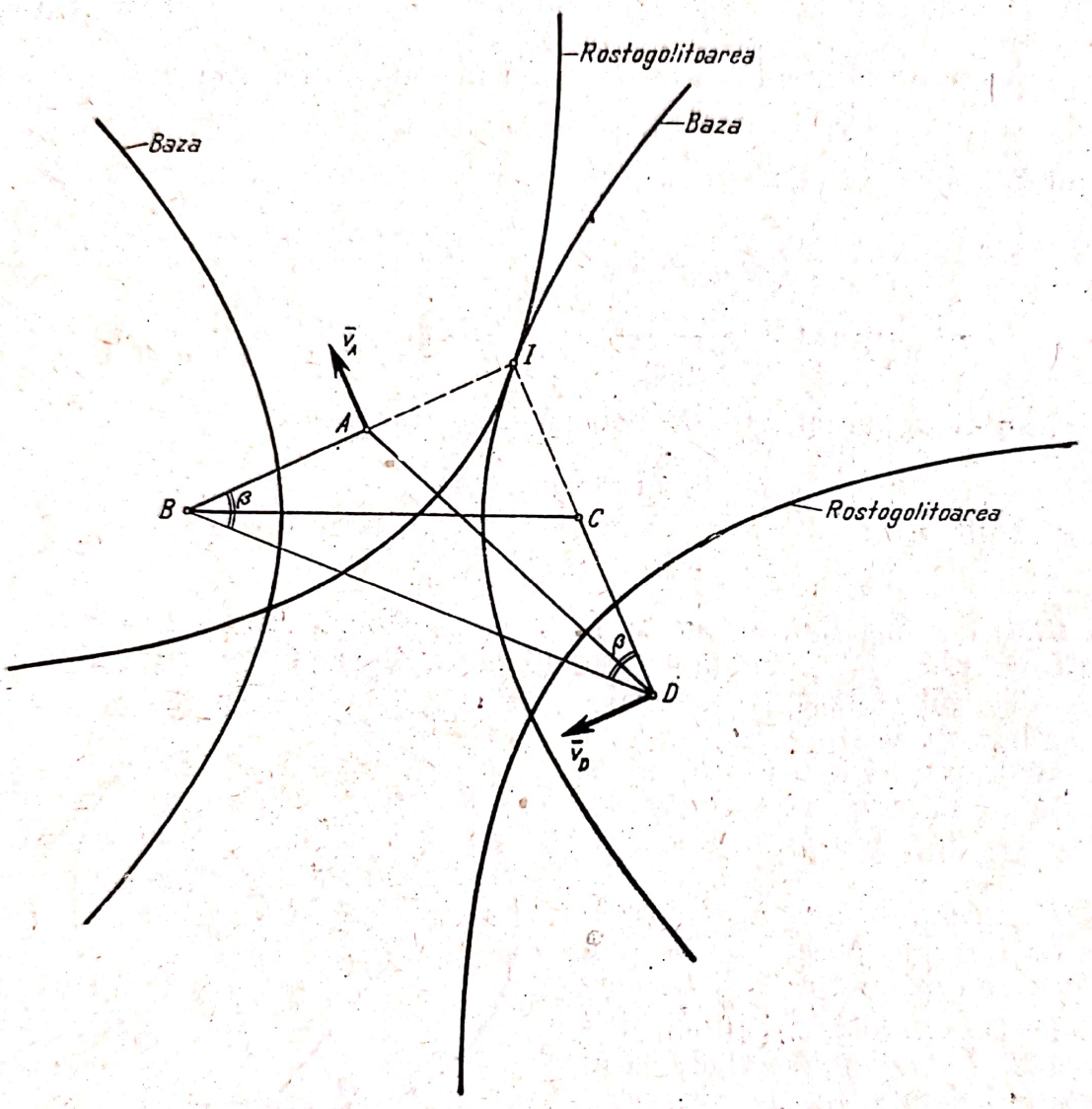


Fig. 16.6 *b*

(baza), avînd axa mare egală cu $2b$, axa mică egală cu $2\sqrt{b^2 - a^2}$ și distanța între focare $2a$. Analog raportînd poziția punctului I la un sistem mobil (legat de punctele C și D ale barei) avem:

$$CI + ID = CI + IB = CB = 2b \tag{4}$$

deci rostogolitoarea este o elipsă cu focarele în C și D, avînd axa mare $2b$, axa mică $2\sqrt{b^2 - a^2}$ și distanța între focare $2a$.

În cazul al doilea punctele A și D ale barei AD descriu cercuri cu centrul în B și C. Normalele la vitezele $\bar{v}_A$ și $\bar{v}_D$, avînd direcția barelor BA și CD se intersectează în centrul instantaneu de rotație I (fig. 16.16 *b*).

Din egalitatea triunghiurilor BAD și BCD (la fel ca în primul caz) rezultă:

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC = \beta \tag{5}$$

deci triunghiul BID este isoscel și

$$IB = ID. \tag{6}$$

Cum diferența distanțelor de la I la punctele fixe B și C și la punctele A și D solidare cu bara AD este constantă :

$$IB - IC = ID - IC = CD = 2a \tag{7}$$

$$ID - IA = IB - IA = AB = 2a \tag{8}$$

baza este o hiperbolă cu focarele în B și C iar rostogolitoarea o hiperbolă cu focarele în A și D.

16.7. În paralelogramul articulat $OACB$ punctul O este fix, iar barele OA și OB se rotesc uniform în sensul acelor de ceasornic cu vitezele unghiulare ω_1 și ω_2. Să se determine baza și rostogolitoarea barelor AC și BC știind că $OA = BC = a$ și $OB = AC = b$ (fig. 16.7).

Rezolvare. Centrul instantaneu de rotație I_1 al barei BC se găsește la intersecția barei OB (normală pe viteza $\bar{v}_B$), cu normala pe viteza $\bar{v}_C$. Centrul instantaneu de rotație I_2 al barei AC se găsește la intersecția barei OA (normală pe viteza $\bar{v}_A$), cu normala pe viteza $\bar{v}_C$, punctele I_1 I_2 și C fiind coliniare.

Unghiurile barelor BC și AC cu o direcție fixă fiind egale cu unghiurile θ_1 și θ_2 ale barelor OA și OB cu aceeași direcție, vitezele unghiulare instantanee ale barelor BC și AC sînt :

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 \qquad \dot{\theta}_2 = \omega_2 . \tag{1}$$

Punctul A aparține barelor OA și AC, punctul B barelor OB și BC deci conform (16.10) vitezele punctelor A și B sînt:

$$v_A = \omega_1 OA = \omega_2 I_2 A$$

$$v_B = \omega_2 OB = \omega_1 I_1 B$$

de unde:

$$I_1 B = \frac{\omega_2}{\omega_1} b \qquad I_2 A = \frac{\omega_1}{\omega_2} a. \tag{2}$$

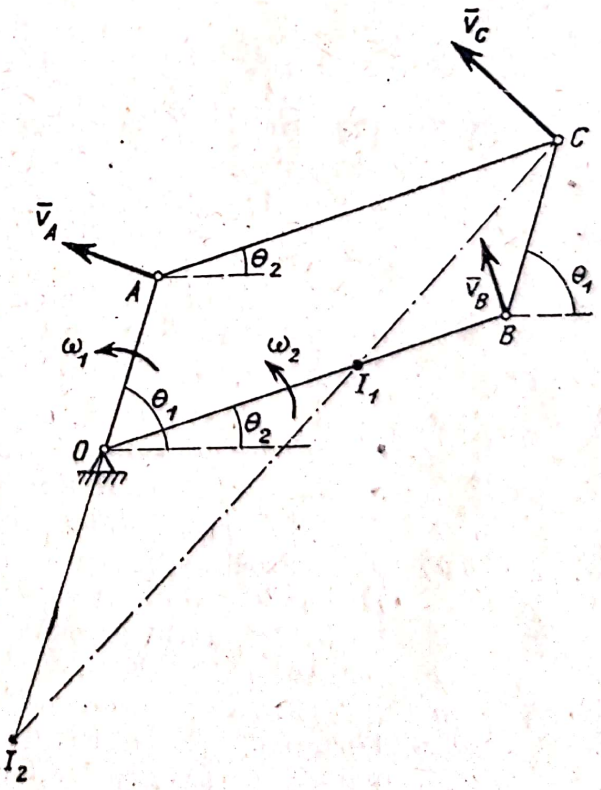


Fig. 16.7

Rostogolitoarea barei BC este deci un cerc cu centrul în B și raza $\frac{\omega_2}{\omega_1} b$, iar rostogolitoarea barei AC un cerc cu centrul în A și raza $\frac{\omega_1}{\omega_2} a$. Cum:

$$OI_1 = |OB - I_1B| = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{\omega_1} b \qquad OI_2 = |I_2A - OA| = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{\omega_2} a \qquad (3)$$

baza barei BC este un cerc cu centrul în O și raza $\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{\omega_1} b$ iar baza barei AC un cerc cu centrul în O și raza $\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{\omega_2} a$.

16.8. Un disc circular de rază R tangent cu o dreaptă fixă Δ are viteza $\bar{v}_0$ (a centrului) și viteza unghiulară ω constante. Să se determine poziția centrului instantaneu de rotație, baza și rostogolitoarea (discuție).
Care este distribuția de accelerații a discului?

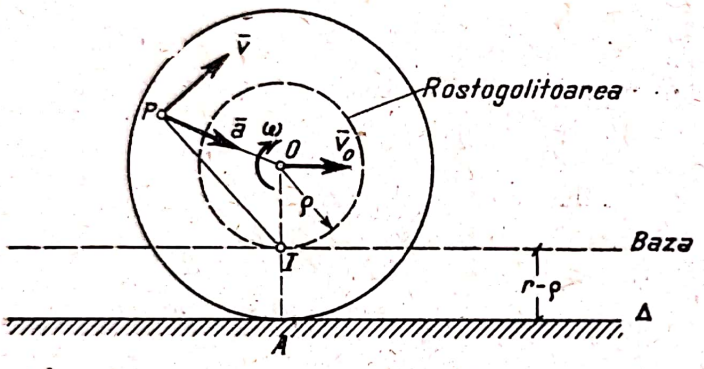


Fig. 16.8 *a*

Rezolvare. Centrul instantaneu de rotație I se găsește pe normala la viteza $\bar{v}_0$ la distanța:

$$OI = \rho = \frac{v_0}{\omega} = \text{const} \qquad (1)$$

căci conform (16.10) $v_0 = \omega\rho$.

Cum distanța de la I la dreapta Δ este:

$$AI = OA - OI. = r - \frac{v_0}{\omega} = \text{const} \qquad (2)$$

baza este o dreaptă paralelă cu Δ la distanța $(r - \rho)$ de Δ. Rostogolitoarea este un cerc cu centrul în O și raza ρ.

Se pot ivi următoarele cazuri:

1° $v_0 = \omega r$ $\rho = r$, baza este dreapta Δ deoarece $AI = 0$, iar rostogolitoarea circumferința discului. Centrul instantaneu de rotație se găsește în punctul A de contact dintre disc și dreaptă. *Discul se rostogolește fără alunecare.*

2° $v_0 < \omega r$ $\rho < r$, rostogolitoarea este un cerc interior discului (fig. 16.8 *a*). Discul are tendința de a patina. Dacă $v_0 = 0$, $I \equiv 0$ discul patinează pe loc executînd o mișcare de rotație în jurul punctului O.

3° $v_0 > \omega r$ $\rho > r$, rostogolitoarea este un cerc exterior discului (fig. 16.8 *b*). Discul se rostogolește și lunecă. Acesta este cazul unei roți frînate care lunecă. Cazul limită $\omega = 0$. $\rho \to \infty$, roata lunecă avînd o mișcare de translație.

Scanned with OKEN Scanner

4° $\omega < 0$ $\rho < 0$, centrul instantaneu se găsește deasupra punctului O, rostogolitoarea fiind un cerc de rază $|\rho| = \frac{v_0}{|\omega|}$ iar baza o dreaptă la distanța $r + |\rho|$ de Δ (fig. 16.8 *c*).

Centrul acceleraţiilor J (punctul de acceleraţie nulă) este O centrul discului deoarece mişcarea punctului O fiind rectilinie şi uniformă:

$$\bar{a}_0 = 0 . \tag{3}$$

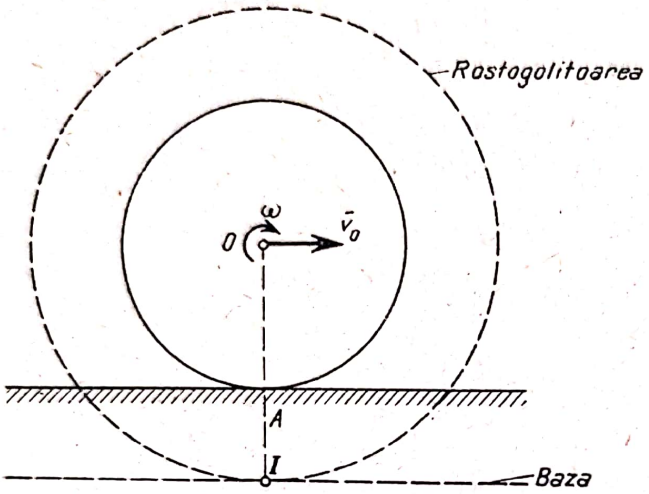


Fig. 16.8 *b*

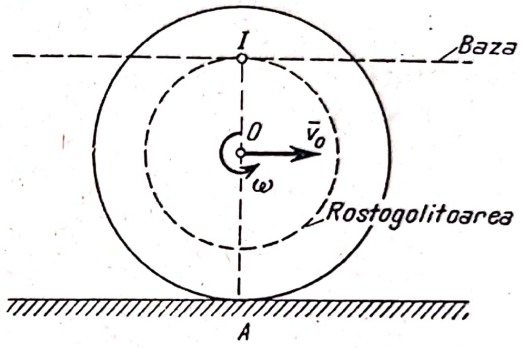


Fig. 16.8 *c*

Conform (16.13) acceleraţia unui punct P al discului este:

$$\bar{a} = -\omega^2 \overline{OP} \tag{4}$$

căci $\dot{\omega} = 0$, distribuţia de acceleraţii fiind aceeaşi ca într-o mişcare de rotaţie uniformă în jurul punctului O. În figura 16.8 *a* s-a reprezentat viteza $\bar{v} = \bar{\omega} \times \overline{IP}$ şi acceleraţia $\bar{a}$ a unui punct oarecare al discului.

16.9. Pe un disc fix O_1 de rază R se mişcă un disc O de rază r, rămînînd tangent la discul fix. Cunoscînd viteza $\bar{v}_0$ a centrului discului mobil (constantă în modul) şi viteza unghiulară constantă ω a discului, să se determine poziţiile centrului instantaneu de rotaţie I, centrului acceleraţiilor J, baza şi rostogolitoarea. Discuţie.

Rezolvare. Punctul O descrie cercul de rază $R + r$ cu centrul în O_1, centrul instantaneu de rotaţie găsindu-se pe normala OO_1 la viteza $\bar{v}_0$. Conform (16.10):

$$\rho = OI = \frac{v_0}{\omega} = \text{const} \tag{1}$$

deci rostogolitoarea este un cerc cu centrul în O şi rază ρ.

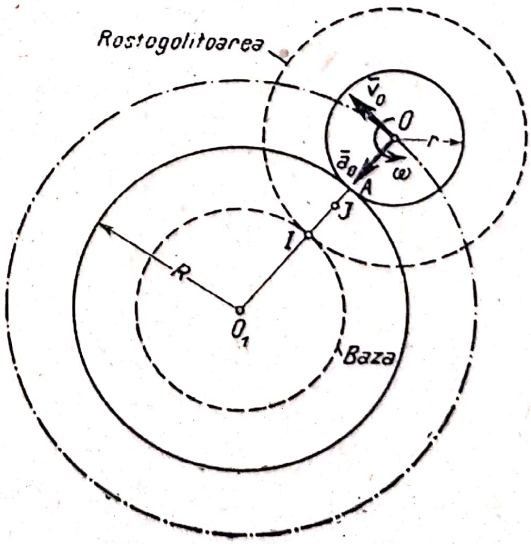


Fig. 16.9 *a*

Cum:

$$O_1I = R + r - \rho = \text{const} \tag{2}$$

baza este un cerc cu centrul în O_1 și de rază $R + r - \rho$.

Accelerația unghiulară a discului este nulă:

$$\dot{\omega} = 0 \tag{3}$$

deci centrul acceleraţiilor se găsește pe suportul accelerației unui punct al discului. Punctul O avînd o mișcare circulară uniformă conform (13.18) accelerația lui:

$$a_0 = \frac{v_0^2}{(R + r)} \tag{4}$$

este orientată spre centrul O_1 al cercului descris de O. Centrul acceleraţiilor se găsește pe dreapta OO_1 la distanța:

$$\rho' = OJ = \frac{a_0}{\omega^2} = \frac{v_0^2}{\omega^2 (R + r)} \tag{5}$$

de punctul O, căci conform (16.13) $\overline{a_0} = -\omega^2 \overline{JO}$.

Se pot ivi următoarele cazuri:

1^0 $v_0 < r\omega$ — $\rho < r$ rostogolitoarea este interioară discului mobil iar baza exterioară discului fix. În acest caz discul mobil patinează pe cel fix. Cazul limită ar fi $v_0 = 0$ cînd mișcarea discului mobil devine o rotație în jurul punctului O.

2^0 $v_0 = r\omega$ — $\rho = r$ rostogolitoarea este circumferința discului mobil, baza circumferința discului fix.

3^0 $r\omega < v_0 < (R + r)\omega$ — $r < \rho < R + r$ rostogolitoarea și baza sînt reprezentate în figura 16.9 *a* fiind cercuri tangente exterioare. Discul mobil se rostogolește și lunecă peste cel fix.

4^0 $v_0 = (R + r)\omega$ — $\rho = R + r$ centrul instantaneu I se găsește în O_1 deci este fix. Mișcarea discului este rotație în jurul punctului O_1.

5^0 $v_0 > (R + r)\omega$ — $\rho > R + r$ centrul instantaneu se găsește dincolo de O_1, baza are raza $\rho - (R + r)$ fiind un cerc tangent interior rostogolitoarei (fig. 16.9 *b*). Ca un caz limită avem cazul $\omega = 0$, $\rho \to \infty$ cînd discul mobil are o mișcare de translație.

6^0 $\omega < 0$ — $\rho < 0$ centrul instantaneu se găsește dincolo de O rostogolitoarea fiind un cerc de rază $|\rho|$ tangent interior bazei, cerc de rază $R + r + |\rho|$ (fig. 16.9 *c*).

În general centrul acceleraţiilor J este diferit de centrul instantaneu de rotație. Ele coincid cînd:

$$\rho = \rho' \qquad \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0^2}{\omega^2 (R + r)}$$

adică pentru $v_0 = 0$, $v_0 = \omega(R + r)$ mișcări de rotație în jurul punctelor O și O_1 și pentru $\omega = 0$ mișcare de translație (I și J se găsesc pe dreapta de la infinit).

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $v_0 < (R + r)\omega$ cazurile 1°, 2° și 3° $\rho' < \rho$ centrul accelerațiilor găsindu-se între O și centrul instantaneu de rotație I. Pentru $v_0 > (R + r)\omega$, $\rho' > \rho$.

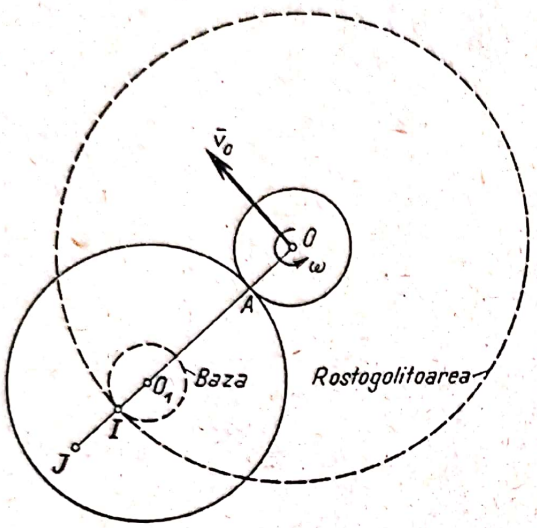


Fig. 16.9 *b*

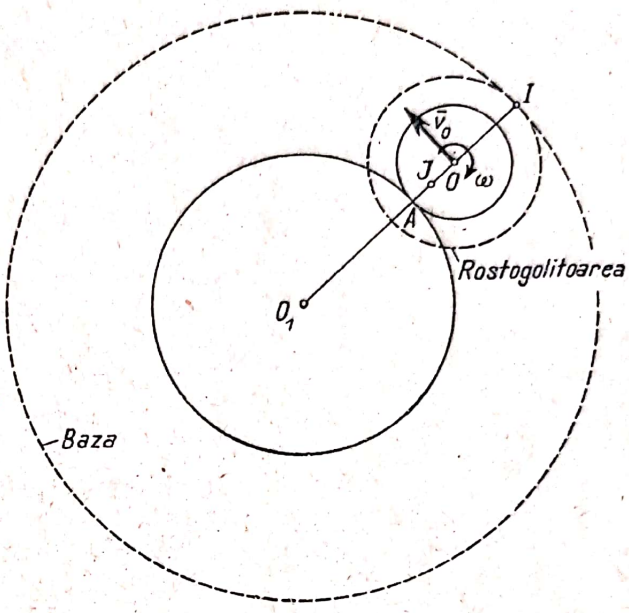


Fig. 16.9 *c*

16.10. Un mecanism se compune din manivela ED, biela BD și un disc circular de rază r cu centrul C, articulat în B de biela BD. În A este prins un cablu care susține greutatea F. Discul se rostogolește fără alunecare pe un disc fix de rază r cu centrul în E. Știind că $ED = r$, $BD = 2r$ și cunoscînd viteza unghiulară ω a manivelei ED să se determine viteza $\bar{v}_F$ a greutății F, baza și rostogolitoarea pentru biela BC. Presupunînd ω constant, să se determine accelerațiile punctelor B și F. În momentul inițial barele ED și BD sînt perpendiculare.

Rezolvare. Centrul instantaneu al discului mobil este punctul I_1 de contact dintre discul mobil și cel fix, baza fiind circumferința discului fix iar rostogolitoarea, circumferința discului mobil.

Centrul instantaneu I_2 al bielei BD se găsește la intersecția direcțiilor I_1B și ED normale pe vitezele $\bar{v}_B$ și $\bar{v}_D$. Cum $ED = CB = r$, $CE = BD = 2r$, avem $CB \parallel ED$

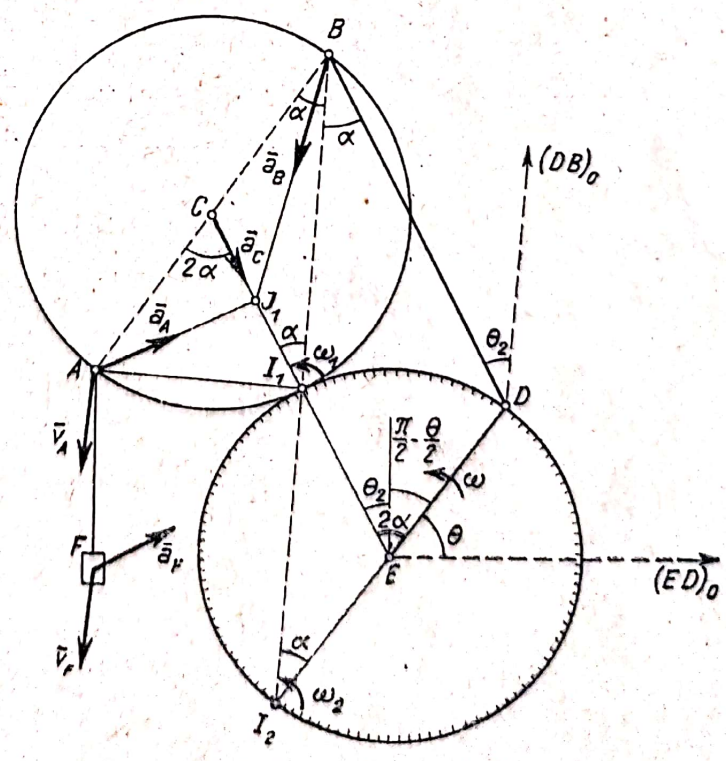


Fig. 16.10

și $BD \| CE$, iar $\sphericalangle BI_2D = \sphericalangle CBI_1 = \sphericalangle CI_1B = \sphericalangle I_2BD = \alpha$ deci triunghiul I_2DB este isoscel. Rezultă:

$$I_2D = BD = 2r \qquad EI_2 = r \tag{1}$$

deci pentru bielă, baza este cercul cu centrul în E și raza r (circumferința discului fix) iar rostogolitoarea cercul cu centrul în D și rază $2r$. Conform (16.10) viteza punctului D este:

$$v_D = \omega \cdot ED = \omega_2 \cdot I_2D \tag{2}$$

deci viteza unghiulară instantanee a bielei este:

$$\omega_2 = \omega \frac{ED}{I_2D} = \omega \frac{r}{2r} = \frac{\omega}{2}. \tag{3}$$

Analog:

$$v_B = \omega_2 \cdot I_2B = \omega_1 \cdot I_1B \tag{4}$$

deci viteza unghiulară instantanee a discului mobil este:

$$\omega_1 = \omega_2 \frac{I_2B}{I_1B} = 2\omega_2 = \omega. \tag{5}$$

Firul AF rămînînd vertical corpul F are o mișcare de translație și:

$$\bar{v}_F = \bar{v}_A \qquad \bar{a}_F = \bar{a}_A. \tag{6}$$

Viteza punctului A este:

$$v_A = \omega_1 I_1A = \omega 2r \sin \alpha \tag{7}$$

normală pe direcția I_1A.

Însă

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4} \tag{8}$$

deoarece $\omega_2 = \frac{\omega}{2}$ unghiul format de bara DB cu direcția sa inițială $(DB)_0$ este $\theta_2 = \frac{\theta}{2}$ iar $\sphericalangle CED = 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta + \theta_2$ (fig. 16.10). Rezultă:

$$v_F = v_A = 2r\omega \sin\left(\frac{\pi - \theta}{4}\right). \tag{9}$$

Pentru a găsi accelerațiile $\bar{a}_B$ și $\bar{a}_F$ căutăm poziția centrului accelerațiilor al discului mobil. Centrul C al discului descrie uniform un cerc cu centrul în E de rază $2r$ cu viteza:

$$v_C = \omega_1 I_1C = \omega r \tag{10}$$

deci accelerația (13.18) a punctului C:

$$a_C = \frac{v_C^2}{2r} = \frac{\omega^2 r}{2} \tag{11}$$

Scanned with OKEN Scanner

este orientată spre centrul E al cercului descris de C. Cum $\dot{\omega}_1 = 0$ centrul J_1 al acceleraţiilor se găseşte pe dreapta CE la distanţa:

$$\rho_1' = CJ_1 = \frac{a_C}{\omega_1^2} = \frac{r}{2} \tag{12}$$

de punctul C, căci conform (16.13) $\bar{a}_C = -\omega_1^2 \overline{J_1C}$. Acceleraţiile punctelor B şi F sînt:

$$\bar{a}_B = -\omega_1^2 \overline{J_1B} \qquad \bar{a}_F = \bar{a}_A = -\omega_1^2 \overline{J_1A} \tag{13}$$

unde:

$$J_1B = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 - 2r\frac{r}{2}\cos(\pi - 2\alpha)} = \frac{r}{2}\sqrt{5 + 4\sin\frac{\theta}{2}} \tag{14}$$

$$J_1A = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 - 2r\frac{r}{2}\cos 2\alpha} = \frac{r}{2}\sqrt{5 - 4\sin\frac{\theta}{2}}$$

şi cum $\theta = \omega t$:

$$a_B = \frac{\omega^2 r}{2}\sqrt{5 + 4\sin\frac{\omega t}{2}} \qquad a_F = \frac{\omega^2 r}{2}\sqrt{5 - 4\sin\frac{\omega t}{2}}. \tag{15}$$

16.11. Un disc cade, centrul discului O avînd o mişcare uniform accelerată pe verticală, după legea $O_1O = \frac{1}{2}gt^2$. Discul se roteşte uniform cu viteza unghiulară ω în jurul centrului său. Să se determine poziţiile centrului instantaneu de rotaţie I şi centrului acceleraţiilor J precum şi baza şi rostogolitoarea (fig. 16.11).

Rezolvare. Viteza şi acceleraţia centrului discului sînt:

$$v_0 = gt$$
$$a_0 = g.$$

Centrul instantaneu se va găsi pe normala la $\bar{v}_0$ la distanţa:

$$\rho = \frac{v_0}{\omega} = \frac{gt}{\omega}. \tag{1}$$

Cum $\dot{\omega} = 0$ centrul acceleraţiilor se găseşte pe suportul acceleraţiei $\bar{a}_0$ deci pe verticala O_1x_1 la distanţa:

$$OJ = \frac{a_0}{\omega^2} = \frac{g}{\omega^2} \tag{2}$$

sub punctul O.

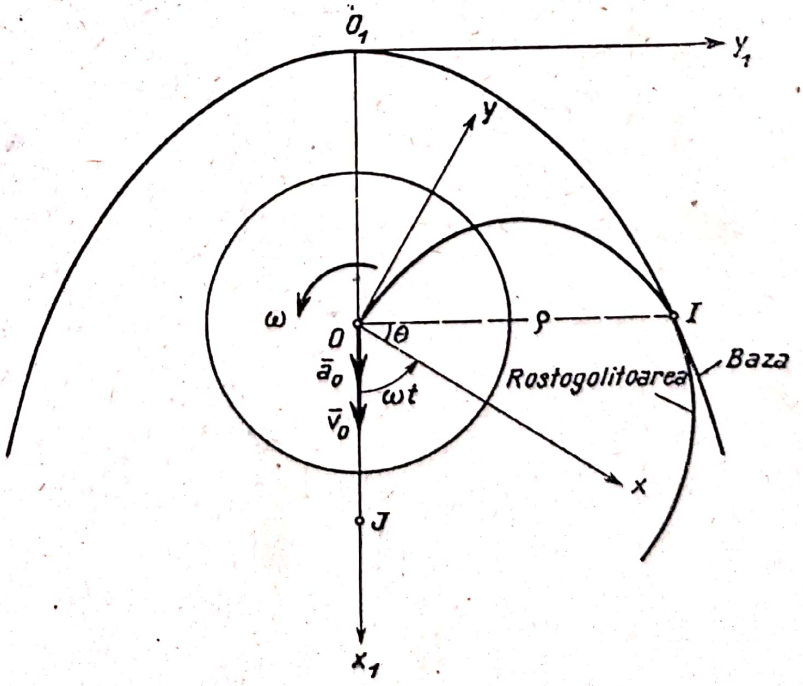


Fig. 16.11

Coordonatele centrului instantaneu față de sistemul fix $x_1O_1y_1$ sînt:

$$\xi_1 = O_1O = \frac{1}{2} gt^2 \qquad \eta_1 = OI = \frac{gt}{\omega} \tag{3}$$

deci baza este parabola :

$$\xi_1 = \frac{\omega^2 \eta_1^2}{2g}. \tag{4}$$

Față de sistemul mobil coordonatele polare ale centrului instantaneu sînt:

$$\rho = \frac{gt}{\omega} \qquad \theta = \frac{\pi}{2} - \omega t \tag{5}$$

deci rostogolitoarea este spirala:

$$\rho = \frac{g}{\omega^2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right). \tag{6}$$

16.12. Se consideră mecanismul din figura 16.12 alcătuit din barele $O_1A_1 = A_1B = BA_2 = A_2O_2 = l$ distanța dintre articulațiile fixe O_1 și O_2 fiind $O_1O_2 = l$. Să se determine vitezele unghiulare instantanee ale barelor, în funcție de unghiul α și de viteza $\bar{v}_B = \bar{v}$ a punctului B normală pe direcția O_1O_2 (fig. 16.12).

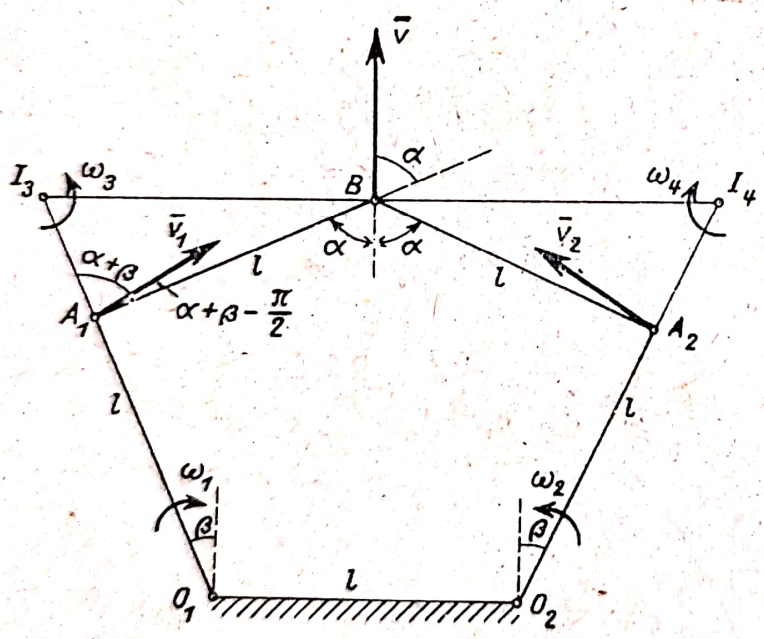


Fig. 16.12

Rezolvare. Centrele instantanee de rotație ale barelor O_1A_1 și O_2A_2 sînt centrele permanente de rotație O_1 și O_2 :

$$I_1 \equiv O_1 \quad I_2 \equiv O_2. \tag{1}$$

Centrele instantanee de rotație I_3 și I_4 ale barelor A_1B și A_2B se găsesc la intersecția normalelor O_1A_1 și BI_3 respectiv O_2A_2 și BI_4 pe vitezele $\bar{v}_{A_1} = \bar{v}_1$ și $\bar{v}$ respectiv $\bar{v}_{A_2} = \bar{v}_2$ și $\bar{v}$. Conform (16.10) :

$$v_1 = |\omega_1| O_1A_1 = |\omega_3| I_3A_1 \qquad v_2 = |\omega_2| O_2A_2 = |\omega_4| I_4A_2 \tag{2}$$
$$v = |\omega_3| I_3B = |\omega_4| I_4B.$$

Însă aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul I_3A_1B, cum $\sphericalangle I_3A_1B = \alpha+\beta$, avem:

$$\frac{I_3A_1}{\cos\alpha} = \frac{l}{\cos\beta} = \frac{I_3B}{\sin(\alpha+\beta)} \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde:

$$\sin\beta = \sin\alpha - \frac{1}{2} \qquad \cos\beta = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin\alpha - \frac{1}{4}}. \tag{4}$$

Din (3) și (4) obținem:

$$I_3A_1 = I_4A_2 = \frac{l\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{l\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin\alpha - \frac{1}{4}}}$$

$$I_3B = I_4B = \frac{l\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta} = l\left[\sin\alpha + \frac{\cos\alpha\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin\alpha - \frac{1}{4}}}\right] \tag{5}$$

și înlocuind în (2) rezultă:

$$\omega_2 = -\omega_1 = \frac{v\cos\alpha}{l\sin(\alpha+\beta)} = \frac{v\cos\alpha}{l\left[\sin\alpha\sqrt{\cos^2\alpha + \sin\alpha - \frac{1}{4}} + \cos\alpha\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\right)\right]} \tag{6}$$

$$\omega_3 = -\omega_4 = \frac{v\cos\beta}{l\sin(\alpha+\beta)} = \frac{v\sqrt{\cos^2\alpha + \sin\alpha - \frac{1}{4}}}{l\left[\sin\alpha\sqrt{\cos^2\alpha + \sin\alpha - \frac{1}{4}} + \cos\alpha\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\right)\right]}$$

vitezele unghiulare $\bar{\omega}_1$ și $\bar{\omega}_4$ fiind orientate în sens contrar vectorilor $\bar{\omega}_2$ și $\bar{\omega}_3$.

Vitezele unghiulare căutate se puteau determina și cu ajutorul teoremei proiecțiilor (16.18). Astfel spre exemplu proiectînd vitezele $v_1 = |\omega_1| l$ și v pe direcția AB avem:

$$|\omega_1| l\cos\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}\right) = v\cos\alpha$$

de unde:

$$|\omega_1| = \frac{v\cos\alpha}{l\sin(\alpha+\beta)}$$

același cu rezultatul obținut în relația (6).

16.13. În figura 16.13 este reprezentată schema mecanismului unei pompe Holst. Tija pistonului FG este acționată de manivela AB prin intermediul bielei DF și a triunghiului rigid BCD care este fixat și de manivela EC. Să se determine pozițiile centrelor instantanee ale triunghiului și bielei DF. Ce relație există între viteza pistonului v și viteza unghiulară ω a manivelei AB?

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Vitezele punctelor B și C fiind normale pe manivelele AB și EC, centrul instantaneu I_1 al triunghiului BCD se găsește la intersecția direcțiilor AB și EC. Punctul F are o mișcare rectilinie pe direcția AG deci centrul instantaneu I_2 al bielei se găsește la intersecția normalei FI_2 la AG cu direcția I_1D normală pe viteza $\bar{v}_D = \bar{\omega}_1 \times \overline{I_1D}$ (fig. 16.13).

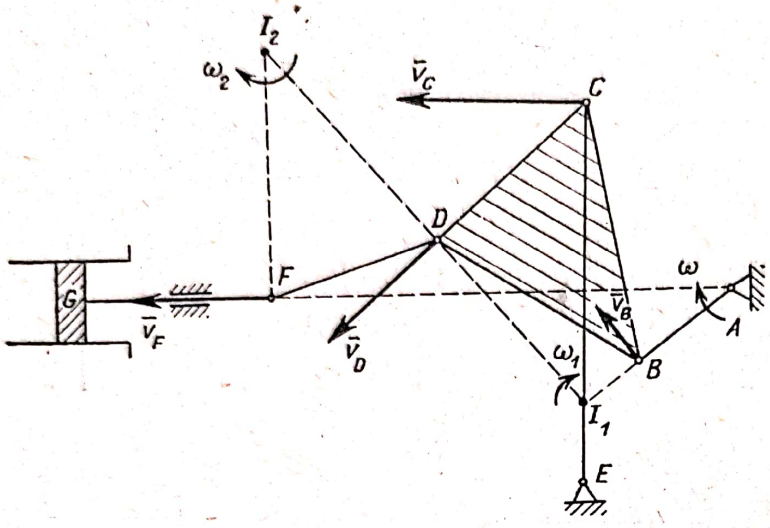


Fig. 16.13

Ținînd seama de ecuația (16.10) avem:

$$v_B = \omega \cdot AB = \omega_1 \cdot I_1B$$
$$v_D = \omega_1 I_1 D = \omega_2 I_2 D \quad (1)$$
$$v = v_F = \omega_2 I_2 F$$

de unde:

$$v = \frac{I_2F \times I_1D \times AB}{I_2D \times I_1B}\,\omega. \quad (2)$$

16.14. O camă circulară de rază r și excentricitate e, articulată în O_1, se rotește cu viteza unghiulară ω_0. Ea acționează prin intermediul tijelor AB și BC placa triunghiulară CO_2D. La rîndul ei placa triunghiulară articulată în O_2 acționează bara DF la care punctul F se poate mișca orizontal și barele EG și GH.

Să se determine vitezele punctelor A, B, C, D, E, F și G pentru poziția din figura 16.14 dacă se cunosc:

$$O_1A = BC = CO_2 = O_2D = b,\ O_1O = e,\ \omega_0,$$
$$\alpha = \pi/4,\ \beta = \gamma = \delta = \pi/2.$$

Rezolvare. Cama circulară poate fi asimilată cu mecanismul bielă-manivelă deoarece tot timpul distanțele O_1O și AO sînt constante. Centrul instantaneu I_1 al manivelei AO se găsește la intersecția normalelor O_1O și AI_1 pe vitezele $\bar{v}_0$ și $\bar{v}_A$. Conform (16.10):

$$v_0 = e\omega_0 = I_1O\,\omega_1$$
$$v_A = I_1A\,\omega_1$$

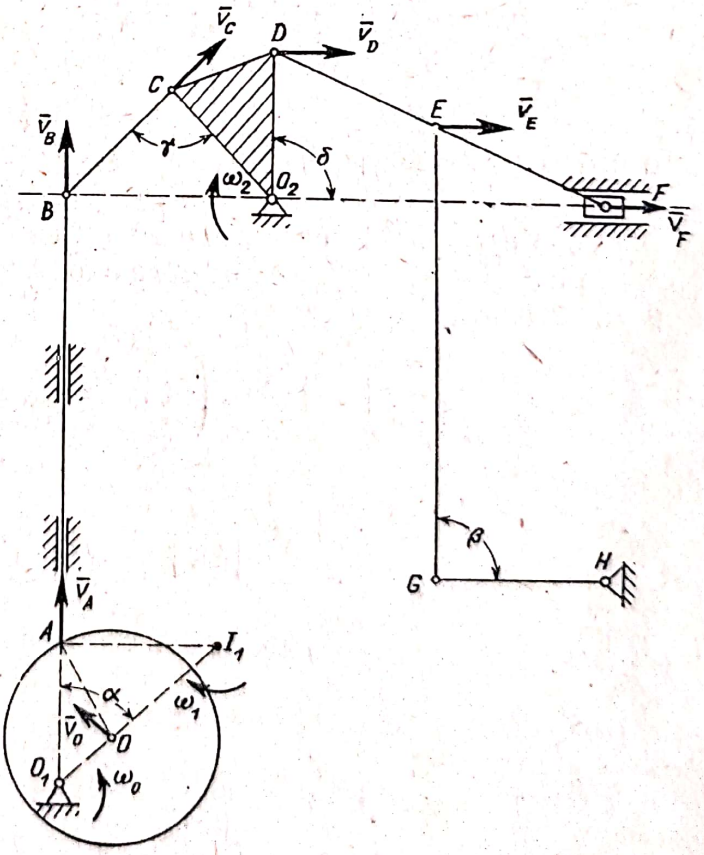


Fig. 16.14

unde:

$$I_1O = O_1I_1 - O_1O = b\sqrt{2} - e \qquad O_1A = AI_1 = b$$

Deci:

$$v_A = v_B = \frac{be}{b\sqrt{2} - e}\omega_0$$

(punctele A și B aparțin barei AB care are o mișcare de translație).

Centrul instantaneu de rotație al barei BC se află în O_2 la intersecția normalelor BO_2 și CO_2 pe vitezele $\overline{v}_B$ și $\overline{v}_C$, iar viteza unghiulară instantanee:

$$\omega_2 = \frac{v_B}{BO_2} = \frac{be\omega_0}{(b\sqrt{2} - e)\, b\sqrt{2}} = \frac{e\omega_0}{2b - \sqrt{2}e}$$

$$v_C = v_D = b\omega_2 = \frac{be\omega_0}{2b - \sqrt{2}e}.$$

Distribuția de viteze pentru bara DF la momentul considerat este ca și cum aceasta ar avea o mișcare de translație căci normalele la $\overline{v}_D$ și $\overline{v}_F$, fiind paralele, centrul instantaneu de rotație este situat la infinit:

$$v_F = v_E = v_D = \frac{be\omega_0}{2b - \sqrt{2}e}.$$

Pentru bara EG centrul instantaneu de rotație este situat chiar în punctul G, punctul de intersecție al normalelor EG și GH pe vitezele $\overline{v}_E$ și $\overline{v}_G$. Deci:

$$v_G = O.$$

16.15. Să se determine pozițiile centrelor instantanee ale corpurilor ce alcătuiesc mecanismul din figura 16.15, și vitezele punctelor A, B, C, D, E, F, G, H, știind că $O_1A = AC = CD = CE = ED = BD = O_2B = EH = HG = GF = EF = FK = GL = l$ și cunoscînd vitezele unghiulare $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ în jurul centrelor O_1 și O_2 precum și vitezele $v_K = v_L = \omega l$.

Rezolvare. Pentru barele *1* și *2* centrele instantanee sînt punctele fixe O_1 și O_2 deci:

$$v_A = \omega_1 \cdot O_1A = \omega l \qquad v_B = \omega_2\, O_2B = \omega l. \tag{1}$$

Centrele instantanee I_6, I_7 și I_8 ale barelor *6*, *7* și *8* se găsesc pe direcțiile acestor bare deoarece ele sînt normale pe vitezele $\overline{v}_B$, $\overline{v}_K$ și $\overline{v}_L$. Prin urmare vitezele $\overline{v}_D$, $\overline{v}_F$ și $\overline{v}_G$ sînt normale pe barele *6*, *7* și *8*.

Centrul instantaneu I_3 al plăcii *3* se găsește în centrul plăcii la intersecția direcțiilor barelor *7* și *8* normale pe vitezele $\overline{v}_F$ și $\overline{v}_G$.

Centrul instantaneu I_4 al plăcii *4* se găsește la mijlocul segmentului CE, la intersecția direcției barei *6*, normală pe viteza $\overline{v}_D$, cu direcția I_3E normală pe viteza $\overline{v}_E$.

Scanned with OKEN Scanner

Centrul instantaneu I_5 al barei *5* se găsește pe dreapta de la infinit deoarece normalele O_1A și I_4C pe vitezele $\bar{v}_A$ și $\bar{v}_C$ sînt paralele. Bara *5* are deci în momentul considerat o distribuție de viteze ca într-o mișcare de translație iar:

$$v_C = v_A = \omega l. \tag{2}$$

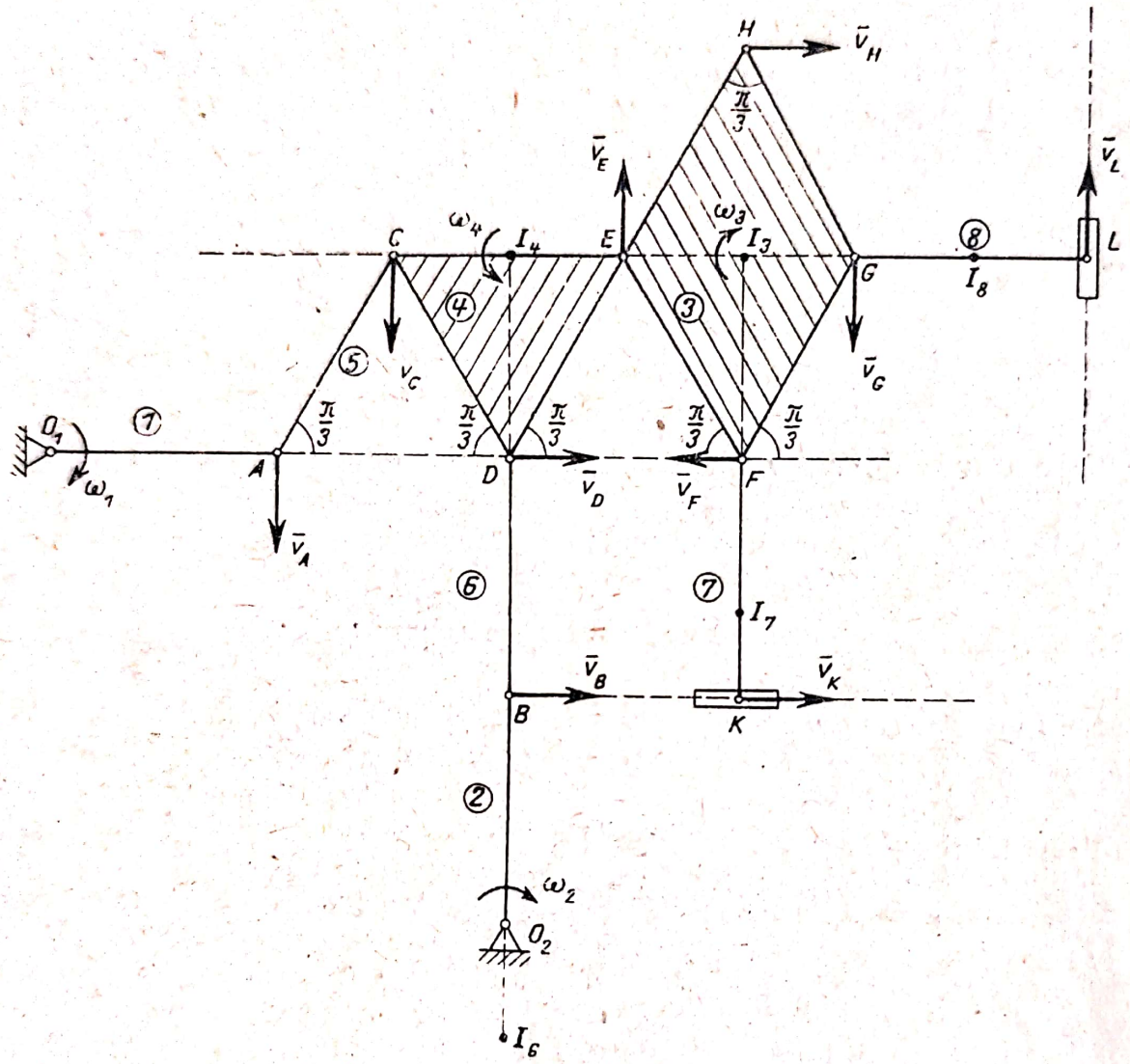


Fig. 16.15

Viteza unghiulară instantanee a plăcii *4* este conform (16.10):

$$\omega_4 = \frac{v_C}{I_4C} = \frac{\omega l}{\frac{l}{2}} = 2\,\omega \tag{3}$$

deci:

$$v_E = \omega_4 I_4 E = 2\omega \cdot \frac{l}{2} = \omega l \qquad v_D = \omega_4 I_4 D = 2\omega \frac{\sqrt{3}\,l}{2} = \sqrt{3}\,\omega l. \tag{4}$$

Viteza unghiulară instantanee a plăcii *3* este:

$$\omega_3 = \frac{v_E}{I_3 E} = \frac{\omega l}{\frac{l}{2}} = 2\omega \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

deci:

$$v_G = \omega_4 \frac{l}{2} = \omega l \qquad v_F = v_H = \omega_4 \frac{\sqrt{3}\, l}{2} = \sqrt{3}\, \omega l. \tag{6}$$

Pentru a găsi pozițiile centrelor instantanee I_6, I_7 și I_8 de pe barele 6, 7 și 8 exprimăm cu ajutorul formulei (16.10) vitezele:

$$\begin{aligned} v_D &= \sqrt{3}\, \omega l = \omega_6 I_6 D & v_B &= \omega l = \omega_6 I_6 B \\ v_F &= \sqrt{3}\, \omega l = \omega_7 I_7 F & v_K &= \omega l = \omega_7 I_7 K \\ v_G &= \omega l = \omega_8 I_8 G & v_L &= \omega l = \omega_8 I_8 L \end{aligned} \tag{7}$$

iar:

$$I_6 D - I_6 B = l \qquad I_7 F + I_7 K = l \qquad I_8 G + I_8 G = l \tag{8}$$

căci I_7 și I_8 se găsesc între punctele F și K respectiv G și L iar I_6 pe dreapta DB sub punctul B ($v_B < v_D$). Din (7) și (8) rezultă:

$$\omega_6 = (\sqrt{3} - 1)\omega \qquad \omega_7 = (\sqrt{3} + 1)\omega \qquad \omega_8 = 2\omega \tag{9}$$

$$I_6 B = \frac{l}{\sqrt{3} - 1} \qquad I_7 F = \frac{\sqrt{3}\, l}{\sqrt{3} + 1} \qquad I_8 G = \frac{l}{2} \tag{10}$$

centrele I_6, I_7 și I_8 fiind reprezentate pe figura 16.15.

16.16. Un disc se rostogolește fără alunecare pe un plan orizontal; viteza centrului discului este v_0, iar raza discului r. Într-un punct A de pe periferia discului este articulată bara AB, de lungime l, al cărei capăt B lunecă pe planul orizontal. Să se determine vitezele punctelor A și B, în funcție de unghiul θ de rotație a discului.

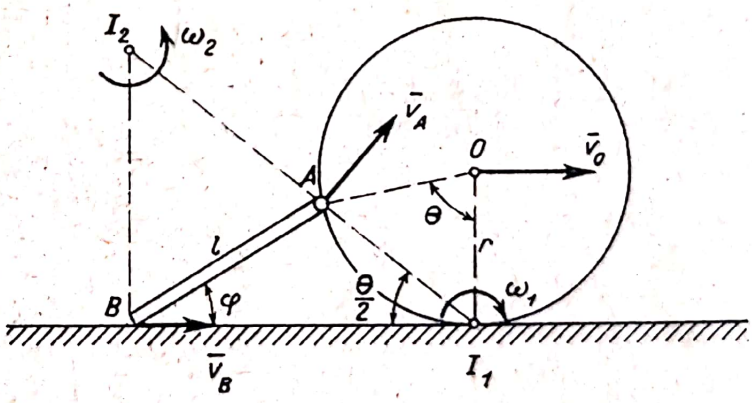


Fig. 16.16

Rezolvare. Centrul instantaneu de rotație I_1 al discului fiind punctul de contact al discului cu planul orizontal (v. problema 16.8, cazul 1°), viteza (16.10) a centrului O al discului este:

$$v_0 = \omega_1 r \tag{1}$$

de unde:

$$\omega_1 = \frac{v_0}{r}. \tag{2}$$

Viteza punctului A este normală pe vectorul $I_1 A$, modulul ei fiind:

$$v_A = \omega_1 I_1 A = \frac{v_0}{r} \cdot 2r \sin \frac{\theta}{2} = 2v_0 \sin \frac{\theta}{2}. \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Centrul instantaneu de rotație I_2 al barei AB se găsește la intersecția normalelor I_1A și BI_2 pe direcțiile vitezelor $\bar{v}_A$ și $\bar{v}_B$ (fig. 16.16). Conform (16.10):

$$v_A = \omega_2 I_2A \qquad v_B = \omega_2 I_2B. \tag{4}$$

Observînd că $l \sin\varphi = 2r \sin^2\frac{\theta}{2}$ din triunghiurile I_1AB și I_1I_2B avem:

$$I_1B = l\cos\varphi + 2r\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{l^2 - 4r^2\sin^4\frac{\theta}{2}} + r\sin\theta$$

$$I_2B = I_1B\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\sqrt{l^2 - 4r^2\sin^4\frac{\theta}{2}} + 2r\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{5}$$

$$I_2A = \frac{I_1B}{\cos\frac{\theta}{2}} - I_1A = \frac{\sqrt{l^2 - 4r^2\sin^4\frac{\theta}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

deci:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{I_2A} = \frac{v_0\sin\theta}{\sqrt{l^2 - 4r^2\sin^4\frac{\theta}{2}}} \tag{6}$$

și:

$$v_B = 2v_0\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1 + \frac{r\sin\theta}{\sqrt{l^2 - 4r^2\sin^4\frac{\theta}{2}}}\right). \tag{7}$$

16.17. O bară AB de lungime l, are o mișcare plană. Cunoscînd accelerațiile extremităților A și B, să se determine centrul accelerațiilor J pentru bara AB și accelerația unui punct P de pe bară.

Aplicație numerică: $a_A = 4\,\mathrm{m/s^2}$; $a_B = 6\,\mathrm{m/s^2}$; $\alpha = \sphericalangle(a_A, AB) = 60°$; $\beta = \sphericalangle(a_B, AB) = 120°$; $AB = l = 1\,\mathrm{m}$; P la mijlocul barei.

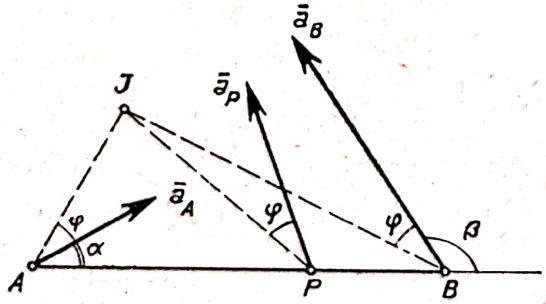


Fig. 16.17 *a*

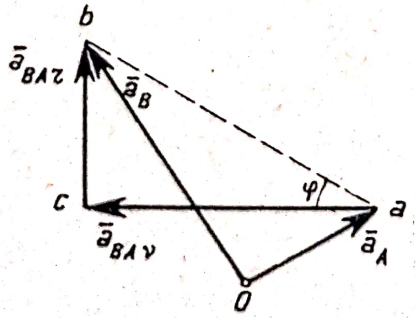


Fig. 16.17 *b*

Rezolvare. Bara AB avînd o mișcare plană, putem determina accelerația unui punct oarecare de pe bară, conform relațiilor (16.13) și (16.14):

$$\bar{a}_P = \dot{\bar{\omega}} \times \overline{JP} - \omega^2\overline{JP} \tag{1}$$

$$a_P = JP\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}. \tag{2}$$

Accelerația $\bar{a}_P$ face cu direcția razei vectoare $\overline{JP}$, unghiul φ, determinat de relația (16.15):

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde ω și $\dot{\omega}$ reprezintă viteza, respectiv accelerația unghiulară momentană a barei AB.

Pentru a determina pe ω și $\dot{\omega}$ vom porni de la formula (16.2) aplicată punctelor A și B:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \dot{\bar{\omega}} \times \overline{AB} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AB}). \tag{4}$$

Vectorul $\bar{a}_{BA\tau} = \dot{\bar{\omega}} \times \overline{AB}$ este perpendicular pe AB iar vectorul $\bar{a}_{BAv} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AB}) = -\omega^2 \overline{AB}$ are direcția barei AB. Din (4) rezultă:

$$\bar{a}_B - \bar{a}_A = \bar{a}_{BA\tau} + \bar{a}_{BAv} \tag{5}$$

și proiectînd pe direcția AB și pe normala la AB obținem:

$$a_B \cos \beta - a_A \cos \alpha = -\omega^2 l \tag{6}$$

$$a_B \sin \beta - a_A \sin \alpha = \dot{\omega} l \tag{7}$$

căci $|\bar{a}_{BA\tau}| = \dot{\omega} l$ și $|\bar{a}_{BA\nu}| = \omega^2 l$. Din (6) și (7) rezultă:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_A \cos \alpha - a_B \cos \beta}{l}}; \quad \dot{\omega} = \frac{a_B \sin \beta - a_A \sin \alpha}{l} \tag{8}$$

deci:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_B \sin \beta - a_A \sin \alpha}{a_A \cos \alpha - a_B \cos \beta} = \frac{a_{BA\tau}}{a_{BAv}}. \tag{9}$$

Ducînd prin A și B două drepte înclinate cu unghiul φ față de $\bar{a}_A$ și $\bar{a}_B$ la intersecția lor se găsește centrul accelerațiilor (fig. 16.17 *a*). Accelerația punctului P este dată de relația (2), unghiul dintre $\bar{a}_P$ și $\overline{JP}$ fiind tot φ.

Putem determina și grafic componentele $\bar{a}_{BA\tau}$ și a_{BAv} și unghiul φ. Într-un punct oarecare O construim vectorii $\overline{Oa} = \bar{a}_A$ și $\overline{Ob} = \bar{a}_B$ (fig. 16.17 *b*): ducînd prin a o paralelă la AB și prin b o perpendiculară pe AB, aceste drepte se intersectează în punctul c iar $\overline{ac} = \bar{a}_{BAv}$ și $\overline{cb} = \bar{a}_{BA\tau}$ căci conform relației (5) $\overline{Ob} - \overline{Oa} = \overline{ac} + \overline{cb}$.

Unghiul $\varphi = \sphericalangle bac$ căci conform relației (9) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{cb}{ac}$.

În cazul aplicației numerice din (6) și (7) rezultă:

$$a_{BAv} = \omega^2 l = 5 \text{ m/s}^2 \qquad a_{BA\tau} = \dot{\omega} l = \sqrt{3} \text{ m/s}$$

de unde:

$$\omega = \sqrt{5}\, \text{s}^{-1} \qquad \dot{\omega} = \sqrt{3}\, \text{s}^{-2} \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{5} \qquad \varphi = 19°5'.$$

Cum:

$$JP = \sqrt{JA^2 + \frac{l^2}{4} - 2 \frac{l}{2} JA \cos(\alpha + \varphi)} = 0{,}825 \text{ m}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde :

$$JA = \frac{a_A}{\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \text{ m}$$

$$a_P = \sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}\, JP = 4{,}35 \text{ m/s}^2.$$

16.18. O placă are o mișcare plană. Considerîndu-se trei puncte oarecare ale plăcii A, B și C și construind într-un punct O trei vectori echipolenți cu vectorii viteză $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$, $\bar{v}_C$ sau cu vectorii accelerație $\bar{a}_A$, $\bar{a}_B$, $\bar{a}_C$ să se arate că triunghiul format de extremitățile celor trei vectori este asemenea cu triunghiul ABC.

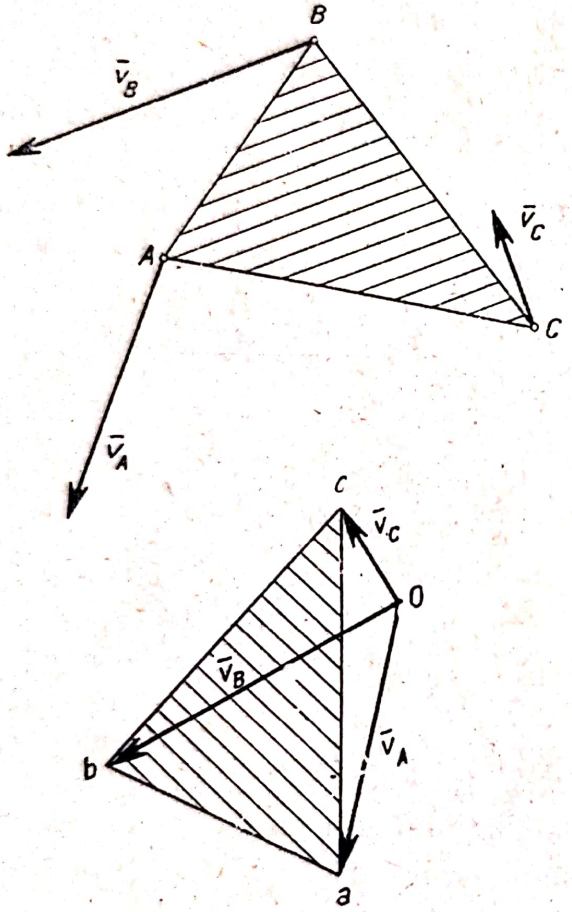


Fig. 16.18 *a*

Rezolvare. Conform (16.1) :

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}$$

deci :

$$\bar{v}_B - \bar{v}_A = \bar{\omega} \times \overline{AB}. \qquad (1)$$

În figura 16.18 *a* s-au construit vectorii $\overline{Oa}$, $\overline{Ob}$ și $\overline{Oc}$ echipolenți cu vitezele $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$ și $\bar{v}_C$. Cum:

$$\bar{v}_B - \bar{v}_A = \overline{ab} = \bar{\omega} \times \overline{AB} \qquad (2)$$

latura ab este perpendiculară pe AB. Analog $\overline{bc} \perp \overline{BC}$ și $\overline{ca} \perp \overline{CA}$. Triunghiurile ABC și abc avînd laturile perpendiculare sînt asemenea. Triunghiul abc este rotit cu 90° față de triunghiul ABC (în sensul lui $\bar{\omega}$).

Conform (16.2):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \dot{\bar{\omega}} \times \overline{AB} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AB}) =$$

$$= \bar{a}_A + \dot{\bar{\omega}} \times \overline{AB} - \omega^2 \overline{AB}$$

deci:

$$\bar{a}_B - \bar{a}_A = \dot{\bar{\omega}} \times \overline{AB} - \omega^2 \overline{AB}. \qquad (3)$$

În figura 16.18 *b* s-au construit vectorii $\overline{Oa}$, $\overline{Ob}$ și $\overline{Oc}$ echipolenți cu accelerațiile $\bar{a}_A$, $\bar{a}_B$ și $\bar{a}_C$. Vom avea:

$$\bar{a}_B - \bar{a}_A = \overline{ab} = \dot{\bar{\omega}} \times \overline{AB} - \omega^2 \overline{AB} \qquad (4)$$

deci în modul:

$$ab = AB \sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}.$$

Analog:

$$bc = BC\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}$$

$$ca = CA\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}$$

deci:

$$\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{ca}{CA} = \sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}. \qquad (5)$$

Triunghiurile ABC și abc avînd laturile proporționale sînt asemenea. Triunghiul abc este rotit cu unghiul φ față de triunghiul ABC (în sensul lui $\dot{\omega}$) unde:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|\dot{\omega}|}{\omega^2}. \qquad (6)$$

Într-adevăr vectorul $\overline{ab}$ este înclinat față de vectorul $\overline{AB}$ cu unghiul φ căci:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|\overline{ab} \times \overline{AB}|}{|\overline{ab} \cdot \overline{AB}|} = \frac{|\dot{\omega}|\, AB^2}{\omega^2 AB^2} = \frac{|\dot{\omega}|}{\omega^2}.$$

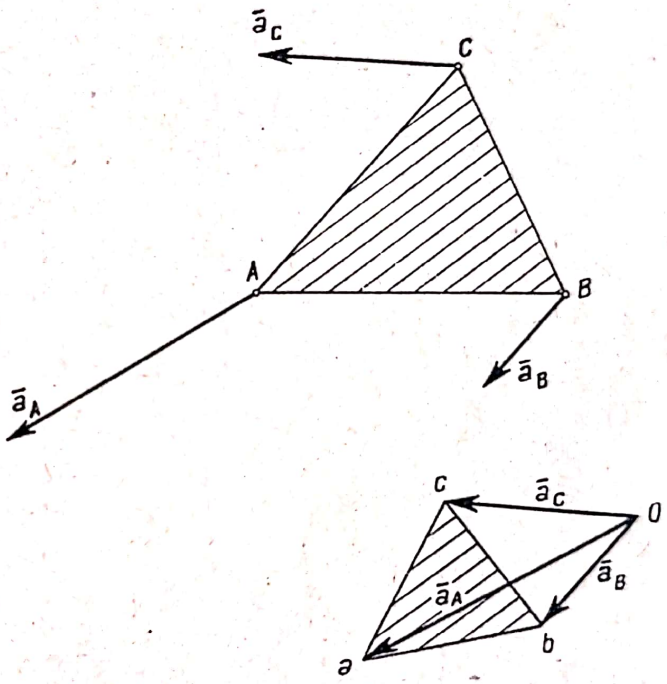


Fig. 16.18 *b*

Cunoscînd vitezele sau accelerațiile a două puncte ale unei plăci, dintr-un pol O putem determina punctele a și b (fig. 16.18 *a* sau *b*) și apoi determinarea grafică a vitezei sau accelerației unui al treilea punct C se reduce la construirea unui triunghi asemenea abc cu triunghiul ABC.

16.19. Se consideră 2 puncte A și B ale unei plăci, care are o mișcare plană. Să se arate că, dacă se rabat cu 90° vectorii viteză ai punctelor A și B, extremitățile vitezelor astfel rabătute se află pe o dreaptă paralelă cu AB.

Rezolvare. Prin rabaterea vitezelor $\bar{v}_A$ și $\bar{v}_B$ cu 90°, vectorii $\overline{AA'}$ și $\overline{BB'}$ au direcțiile dreptelor $\overline{AI}$ și $\overline{BI}$, care trec prin centrul instantaneu de rotație I:

$$v_A = AA' = IA \cdot \omega$$

$$v_B = BB' = IB \cdot \omega.$$

Rezultă:

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{IA}{IB}.$$

Deci dreapta $A'B'$ este paralelă cu dreapta AB.

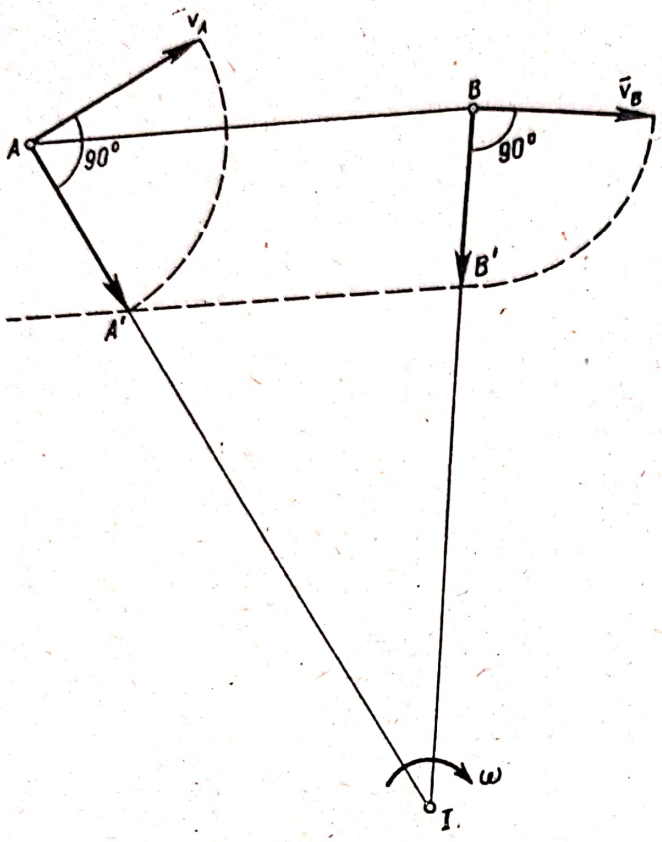


Fig. 16.19

16.20. Două bare AC și BC sînt legate între ele printr-o articulație C, capetele A și B mișcîndu-se pe aceeași dreaptă AB (fig. 16.20 *a*). Cunoscînd vitezele $\bar{v}_A, \bar{v}_B$, accelerațiile $\bar{a}_A, \bar{a}_B$ și lungimile $\overline{AC} = l_1$ și $BC = l_2$ să se determine pe cale grafică viteza și accelerația punctului C.

Rezolvare. Viteza punctului C poate fi exprimată în funcție de $\bar{v}_A$, sau de $\bar{v}_B$ cu ajutorul formulei (16.1):

$$\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{\omega}_1 \times \overline{AC} \qquad (1)$$

$$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{\omega}_2 \times \overline{BC} \qquad (2)$$

unde $\bar{\omega}_1$ și $\bar{\omega}_2$ sînt vitezele unghiulare instantanee ale barelor AC și BC. Vom nota:

$$\bar{v}_{CA} = \bar{\omega}_1 \times \overline{AC}$$

$$\bar{v}_{BA} = \bar{\omega}_2 \times \overline{AB} \qquad (3)$$

$\bar{v}_{CA}$ și $\bar{v}_{BA}$ fiind perpendiculare pe $\overline{AC}$ și $\overline{BC}$.

Pentru a determina grafic viteza punctului C, dintr-un punct O construim vectorii $\overline{Oa} = \bar{v}_A$ și $\overline{Ob} = \bar{v}_B$; din a și b ducem perpendicularele ac și bc pe direcțiile AC și BC care se intersectează în punctul c (fig. 16.20 *b*). Vom avea:

$$\overline{ac} = \bar{v}_{CA} = \bar{\omega}_1 \times \overline{AC} \qquad \overline{bc} = \bar{v}_{CB} = \bar{\omega}_2 \times \overline{AB} \qquad (4)$$

și deci viteza căutată este:

$$\overline{Oc} = \bar{v}_C \qquad (5)$$

căci îndeplinește condițiile (1) și (2):

$$\overline{Oc} = \overline{Oa} + \overline{ac} = \overline{Ob} + \overline{bc}.$$

Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul abc se obține:

$$v_{CA} = \frac{v_A + v_B}{\sin(\alpha + \beta)} \cos\beta \qquad v_{CB} = \frac{v_A + v_B}{\sin(\alpha + \beta)} \cos\alpha \qquad (6)$$

Scanned with OKEN Scanner

iar din triunghiul Oac:

$$v_C = \frac{\sqrt{v_A^2 \cos^2\alpha + v_B^2 \cos^2\beta + 2v_A v_B \cos\alpha \cos\beta \cos(\alpha+\beta)}}{\sin(\alpha+\beta)}. \qquad (7)$$

Conform (16.2) accelerația punctului C este:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA\tau} + \bar{a}_{CAv} \qquad \bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB\tau} + \bar{a}_{CBv} \qquad (8)$$

unde:

$$\bar{a}_{CA\tau} = \dot{\bar{\omega}}_1 \times \overline{AC} \qquad \bar{a}_{CAv} = \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \overline{AC}) = -\omega_1^2 \overline{AC}$$
$$\bar{a}_{CB\tau} = \dot{\bar{\omega}}_2 \times \overline{BC} \qquad \bar{a}_{CBv} = \bar{\omega}_2 \times (\bar{\omega}_2 \times \overline{BC}) = -\omega_2^2 \overline{BC}. \qquad (9)$$

Se cunosc vectorii $\bar{a}_A$, $\bar{a}_B$, $\bar{a}_{CAv}$ (pe direcția CA), $\bar{a}_{CBv}$ (pe direcția BA):

$$a_{CAv} = \omega_1^2 AC = \frac{v_{CA}^2}{AC} = \frac{(v_A + v_B)^2 \cos^2\beta}{l_1 \sin^2(\alpha+\beta)} \qquad a_{CBv} = \omega_2^2 \cdot BC = \frac{v_{BA}^2}{BC} =$$

$$= \frac{(v_A + v_B)^2 \cos^2\alpha}{l_2 \sin^2(\alpha+\beta)} \qquad (10)$$

și direcțiile vectorilor $\bar{a}_{CA\tau}$ și $\bar{a}_{CB\tau}$ normale pe direcțiile AC și BC.

Pentru a determina grafic accelerația punctului C vom construi dintr-un punct O vectorii $\overline{Oa} = \bar{a}_A$, $\overline{Ob} = \bar{a}_B$, $\overline{ad} = \bar{a}_{CAv}$, $\overline{be} = \bar{a}_{CBv}$ iar prin d și e dreptele dc și ec perpendiculare pe direcțiile AC și BC care se intersectează în punctul c (fig. 16.20 c). Rezultă:

$$\overline{dc} = \bar{a}_{CA\tau}$$
$$\overline{ec} = \bar{a}_{CB\tau} \qquad (11)$$

iar accelerația căutată este:

$$\bar{a}_C = \overline{Oc} = \overline{Oa} + \overline{ad} +$$
$$+ \overline{dc} = \overline{Ob} + \overline{be} + \overline{ec}.$$

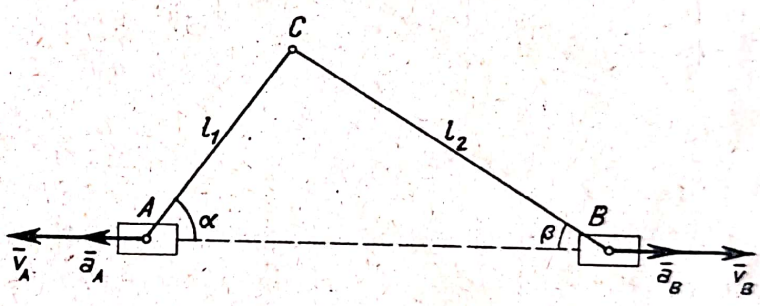


Fig. 16.20 *a*

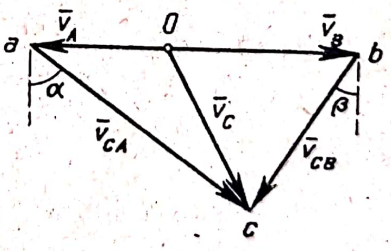


Fig. 16.20 *b*

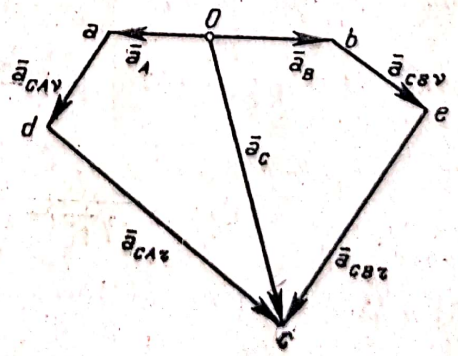


Fig. 16.20 *c*

16.21. O culisă verticală B este acționată de un sistem bielă-manivelă; axa de rotație a manivelei O este la distanța h de ghidajul culisei (fig. 16.21*a*). Să se determine grafic, viteza și accelerația culisei B, pentru o anumită poziție a mecanismului, cunoscînd lungimea manivelei $OA = r$, lungimea bielei $AB = l$ și viteza unghiulară constantă ω, cu care se rotește manivela în jurul punctului O.

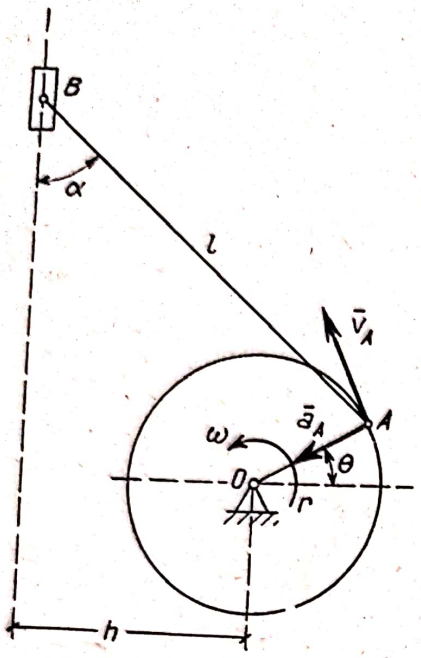


Fig. 16.21 *a*

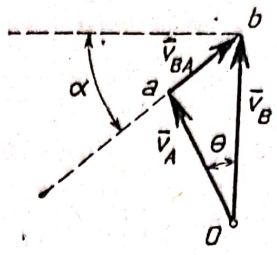


Fig. 16.21 *b*

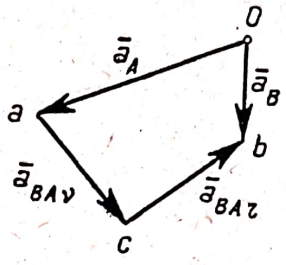


Fig. 16.21 *c*

Rezolvare. Conform relației (16.1):

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \qquad (1)$$

unde se cunoaște vectorul $\bar{v}_A$ și direcțiile vectorilor $\bar{v}_B$ și:

$$\bar{v}_{BA} = \bar{\omega}_1 \times \overline{AB} \qquad (2)$$

perpendicular pe $\overline{AB}$ ($\bar{\omega}_1$ viteza unghiulară instantanee a bielei).

Rezolvarea grafică este arătată în figura 16.21 *b*. În triunghiul *Oab* cunoaștem $\overline{Oa} = \bar{v}_A$ direcțiile laturilor $\overline{Ob} = \bar{v}_B$ și $\overline{ab} = \bar{v}_{BA}$.

Aplicînd teorema sinusurilor avem:

$$v_B = \frac{v_A \cos(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \qquad v_{BA} = \frac{v_A \sin \theta}{\cos \alpha}.$$

Din figura 16.21 *a* rezultă:

$$l \sin \alpha = h + r \cos \theta$$

și cum $v_A = r\omega$ obținem:

$$v_B = r\omega \cos \theta + \frac{r\omega \sin \theta (h + r \cos \theta)}{\sqrt{l^2 - (h + r \cos \theta)^2}} \qquad (3)$$

$$v_{BA} = \frac{lr\omega}{\sqrt{l^2 - (h + r \cos \theta)^2}} \sin \theta. \qquad (4)$$

Accelerația (16.2) a punctului B este:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA\nu} + \bar{a}_{BA\tau} \qquad (5)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde se cunosc vectorii $\bar{a}_A$ și :

$$\bar{a}_{BAv} = \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \overrightarrow{AB}) = -\omega_1^2 \overrightarrow{AB}$$

$$a_{BAv} = \omega_1^2 AB = \frac{v_{BA}^2}{AB} = \frac{lr^2\omega^2 \sin^2\theta}{l^2 - (h + r\cos\theta)^2} \tag{6}$$

și direcțiile vectorilor $\bar{a}_B$ și :

$$\bar{a}_{BA\tau} = \dot{\bar{\omega}}_1 \times \overrightarrow{AB}. \tag{7}$$

Construcția grafică pentru determinarea accelerației $\bar{a}_B$ este indicată în fig. 16.21 *c* în care $\overline{Oa} = \bar{a}_A$, $(a_A = r\omega^2)$, $\overline{ac} = \bar{a}_{BAv}$, direcțiile vectorilor $\overline{Ob} = \bar{a}_B$ (dirijat în lungul ghidajului) și $\overline{cb} = \bar{a}_{BA\tau}$ (perpendicular pe AB) fiind cunoscute.

16.22. Se consideră patrulaterul articulat din fig. 16.22 *a* format din barele $O_1A = a$, $O_2b = b$, $AB = c$, distanța dintre articulațiile fixe fiind $O_1O_2 = d$. Cunoscînd viteza unghiulară ω_1 a barei O_1A, să se determine vitezele unghiulare instantanee ω_2 și ω_3 ale barelor O_2B și AB. În ce poziții ale sistemului avem $\omega_1 = \omega_3$, $\omega_2 = \omega_3$, $\omega_2 = 0$ și $\omega_3 = 0$.

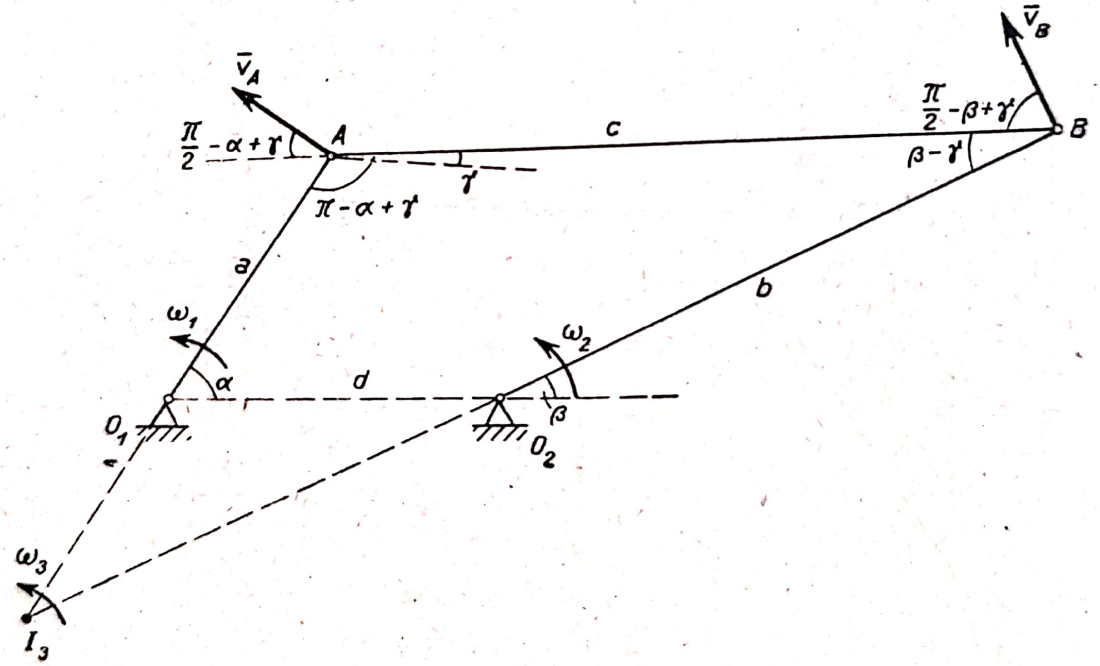


Fig. 16.22 *a*

Rezolvare. Centrul instantaneu I_3 al barei AB se găsește la intersecția direcțiilor O_1A și O_2B normale pe vitezele $\bar{v}_A$ și $\bar{v}_B$. Conform (16.10):

$$v_A = \omega_1 a = \omega_3 I_3A \qquad v_B = \omega_2 b = \omega_3 I_3B \tag{1}$$

deci:

$$\omega_3 = \frac{a}{I_3A}\omega_1 \qquad \omega_2 = \frac{a \cdot I_3B}{b \cdot I_3A}\omega_1. \tag{2}$$

Pentru o poziție dată a sistemului se pot determina distanțele I_3A, I_3B și deci și vitezele unghiulare. Putem găsi același rezultat și folosind alte metode. Astfel, aplicînd teorema proiecțiilor (16.18) pentru vitezele $\bar{v}_A$ și $\bar{v}_B$ avem :

$$v_A \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \gamma\right) = v_B \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta + \gamma\right),$$

γ fiind unghiul dintre direcțiile AB și O_1O_2, iar $\pi - \alpha + \gamma$ unghiul dintre O_1A și AB. Rezultă:

$$\omega_2 = \frac{a}{b} \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\sin(\beta - \gamma)} \omega_1 \qquad (3)$$

relație identică cu cea obținută anterior, căci conform teoremei sinusurilor în triunghiul I_3AB, $\frac{I_3A}{\sin(\beta - \gamma)} = \frac{I_3B}{\sin(\alpha - \gamma)}$.

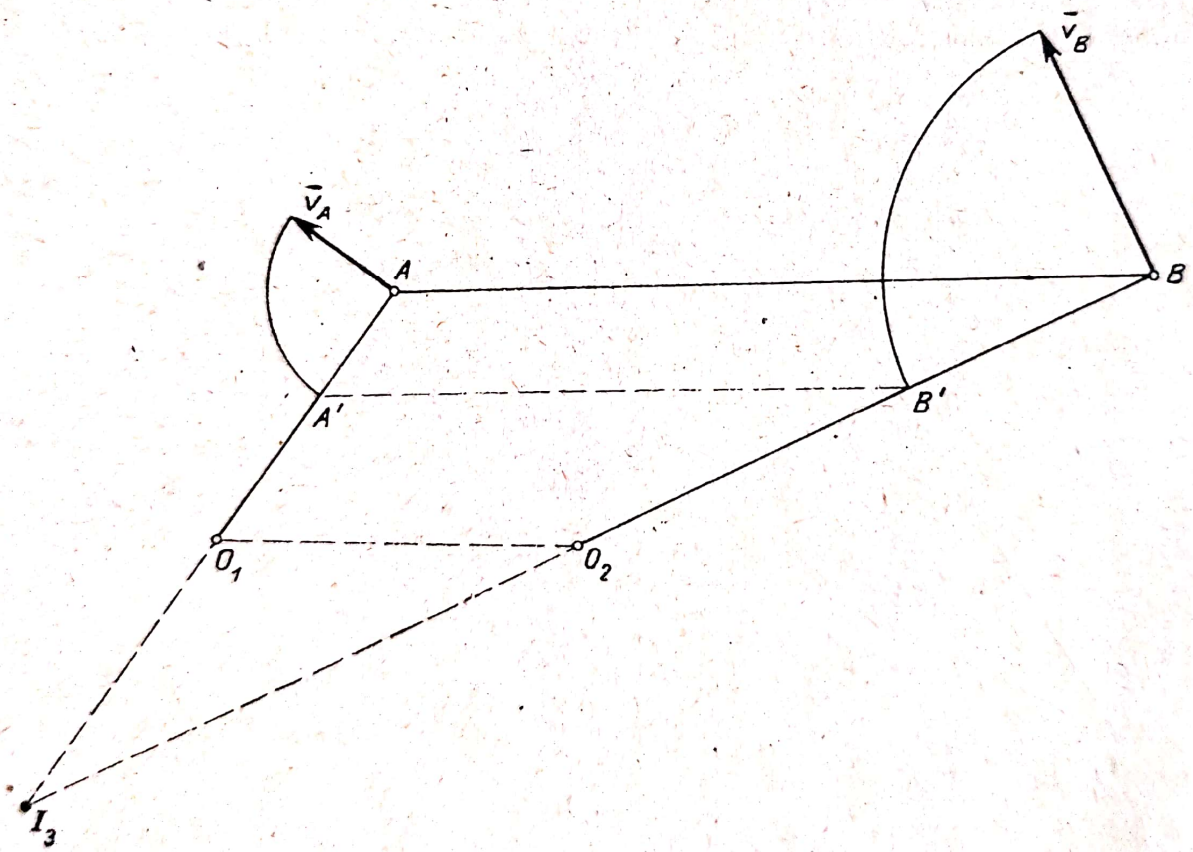


Fig. 16.22 *b*

Folosind metoda rabaterii (v. problema 16.19), dreapta $A'B'$ este paralelă cu AB (segmentele AA' și BB' sînt proporționale cu vitezele v_A și v_B) :

$$v_A = \omega_1 a = \lambda AA' \qquad v_B = \omega_2 b = \lambda BB'$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde:

$$\omega_2 = \frac{a\,BB'}{b\,AA'} \cdot \omega_1 . \tag{4}$$

Pentru o poziție dată a sistemului se poate calcula raportul $\frac{BB'}{AA'} = \frac{I_3B}{I_3A}$ (fig. 16.22 *b*).

Putem folosi o construcție grafică. Conform (16.1):

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \tag{5}$$

unde:

$$\bar{v}_{BA} = \bar{\omega}_3 \times \overline{AB}. \tag{6}$$

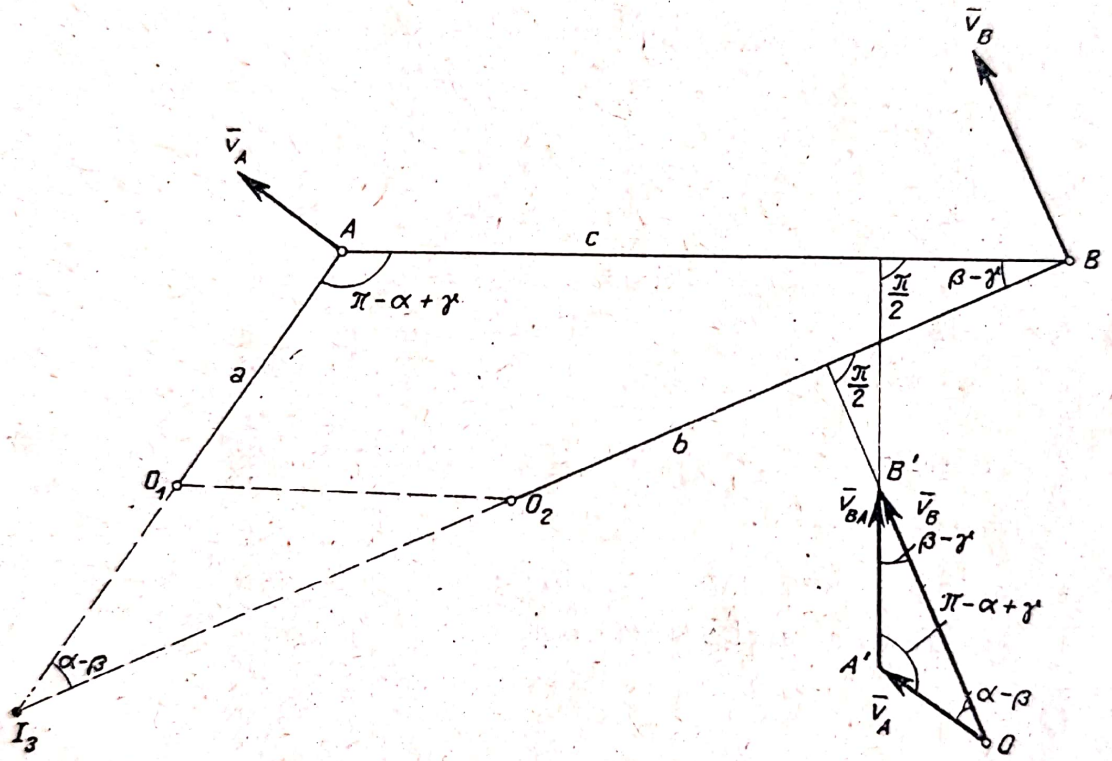


Fig. 16.22 *c*

Vectorul $\bar{v}_A$ și direcțiile vectorilor $\bar{v}_B$ și $\bar{v}_{BA}$ normale pe O_2B și AB fiind cunoscute, construim, triunghiul $OA'B$ (fig. 16.22 *c*) unde:

$$\overline{OA'} = \bar{v}_A \qquad \overline{OB'} = \bar{v}_B \qquad \overline{A'B'} = \bar{v}_{BA}. \tag{7}$$

Aplicînd teorema sinusurilor în acest triunghi avem:

$$\frac{v_A}{\sin(\beta - \gamma)} = \frac{v_B}{\sin(\alpha - \gamma)} = \frac{v_{BA}}{\sin(\alpha - \beta)} \tag{8}$$

de unde:

$$v_B = \omega_2 b = \frac{a\omega_1 \sin(\alpha - \gamma)}{\sin(\beta - \gamma)} \qquad v_{BA} = \omega_3 c = \frac{a\omega_1 \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\beta - \gamma)}. \tag{9}$$

Triunghiurile $OA'B'$ și I_3AB avînd unghiurile egale sînt asemenea deci:

$$\frac{a\omega_1}{I_3A} = \frac{b\omega_2}{I_3B} = \frac{c\omega_3}{c} \tag{10}$$

de unde obținem relațiile (2).

Ținînd seama de (2) din condiția $\omega_1 = \omega_3$ rezultă:

$$I_3A = a$$

deci I_3 se găsește în O_1, bara O_2B are direcția O_1O_2, $I_3B = b + d$ și $\omega_2 = \frac{(b+d)}{b}\omega_1$ (fig. 16.22 *d*).

Din condiția $\omega_2 = \omega_3$ rezultă:

$$I_3B = b$$

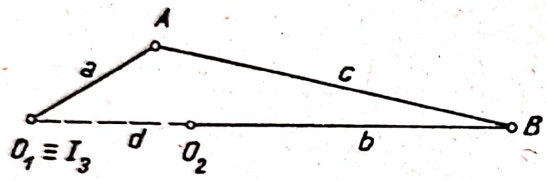


Fig. 16.22 *d*

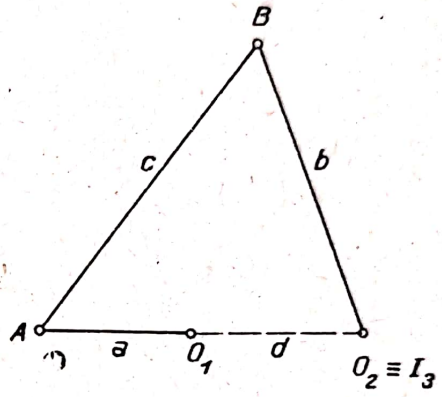


Fig. 16.22 *e*

deci I_3 se găsește în O_2, bara O_1A are direcția O_1O_2, $I_3A = a + d$ și $\omega_2 = \frac{a}{a+d}\omega_1$ (fig. 16.22 *e*).

Pentru ca $\omega_2 = 0$ trebuie ca $I_3B = 0$ deci I_3 se găsește în B, barele O_1A și AB au aceeași direcție, $I_3A = c$ și $\omega_3 = \frac{a\omega_1}{c}$ (fig. 16.22 *f*).

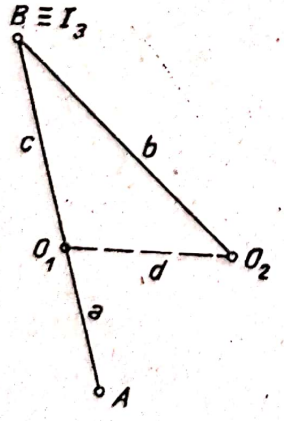


Fig. 16.22 *f*

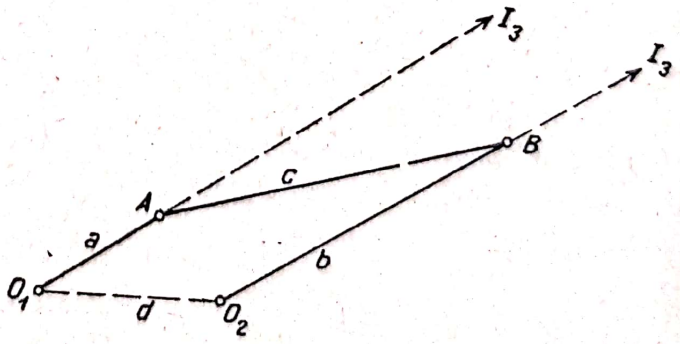


Fig. 16.22 *g*

Pentru ca $\omega_3 = 0$ trebuie ca $I_3A \to \infty$, deci I_3 se găsește pe dreapta de la infinit, barele O_1A și O_2B fiind paralele (fig. 16.22 *g*). În acest caz distribuția instantanee de viteze a barei AB este aceeași ca într-o mișcare de translație.

16.23. Să se arate că într-o mișcare plan paralelă accelerația centrului instantaneu de rotație este:

$$\bar{a}_I = \bar{V} \times \bar{\omega} \tag{16.16}$$

unde $\bar{V}$ este viteza de mișcare a centrului instantaneu pe bază sau pe rostogolitoare:

$$\bar{V} = \dot{\xi}_1 \bar{i}_1 + \dot{\eta}_1 \bar{j}_1 = \dot{\xi}\, \bar{i} + \dot{\eta}\, \bar{j}. \tag{16.17}$$

Rezolvare. Dacă $\bar{\rho}_1$ și $\bar{\rho}$ sînt vectorii de poziție ai centrului instantaneu de rotație în raport cu un sistem fix $O_1x_1y_1$ și unul mobil Oxy solidar cu corpul în mișcare plană:

$$\bar{\rho}_1 = \bar{r}_0 + \bar{\rho} \tag{1}$$

unde $\bar{r}_0$ este vectorul de poziție al punctului O față de O_1 (fig. 16.23). Derivînd obținem viteza de mișcare a centrului instantaneu:

$$\bar{V} = \dot{\bar{\rho}}_1 = \dot{\bar{r}}_0 + \dot{\bar{\rho}}. \tag{2}$$

Accelerația centrului instantaneu I este conform (16.2):

$$\bar{a}_I = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}). \tag{3}$$

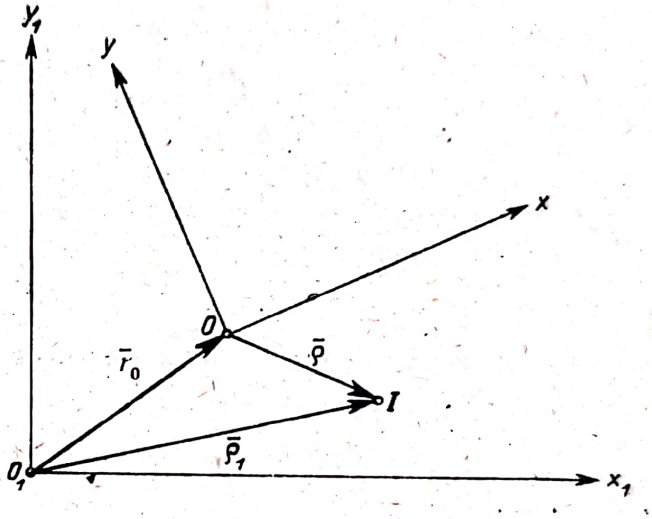


Fig. 16.23

Să determinăm accelerația originii $\bar{a}_0$. Într-o mișcare plană viteza punctului O este conform (16.9):

$$\bar{v}_0 = \dot{\bar{r}}_0 = \bar{\omega} \times \overline{IO} = -\bar{\omega} \times \bar{\rho} \tag{4}$$

și prin derivare:

$$\bar{a}_0 = -\dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} - \bar{\omega} \times \dot{\bar{\rho}}. \tag{5}$$

Însă din (2) și (4):

$$\dot{\bar{\rho}} = \bar{V} + \bar{\omega} \times \bar{\rho} \tag{6}$$

deci:

$$\bar{a}_0 = -\dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} - \bar{\omega} \times \bar{V} - \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}). \tag{7}$$

Înlocuind în (3) obținem:

$$\bar{a}_I = -\bar{\omega} \times \bar{V} = \bar{V} \times \bar{\omega} \tag{8}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

16.24. O placă are o mișcare plan paralelă. Să se determine locul geometric al punctelor P a căror accelerație este coliniară la un moment dat cu vectorul de poziție $\bar{r} = \overline{IP}$ al punctului P în raport cu centrul instantaneu de rotație I și locul geometric al punctelor a căror accelerație este normală pe vectorul $\overline{IP}$.

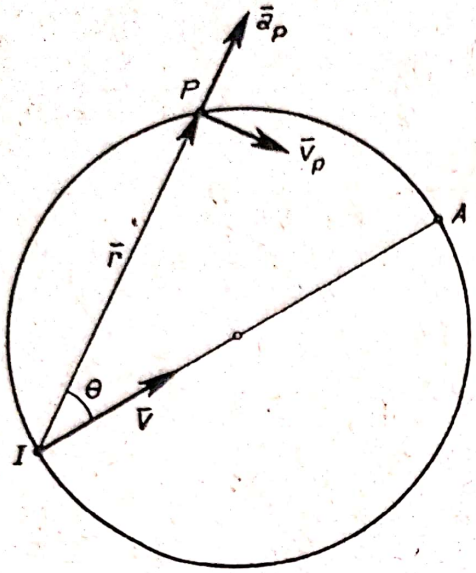


Fig. 16.24 *a*

Rezolvare. Accelerația centrului instantaneu (16.16) fiind:

$$\bar{a}_I = \bar{V} \times \bar{\omega} \tag{1}$$

($\bar{V}$ este viteza de mișcare a centrului instantaneu pe bază sau pe rostogolitoare), accelerația punctului P este conform (16.2):

$$\bar{a}_P = \bar{a}_I + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) =$$

$$= \bar{V} \times \bar{\omega} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} - \omega^2 \bar{r}. \tag{2}$$

În punctele în care $\bar{a}_P$ și $\bar{r}$ sînt coliniare, $\bar{a}_P \times \bar{r} = 0$ deci:

$$(\bar{V} \times \bar{\omega}) \times \bar{r} + (\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}) \times \bar{r} = 0 \tag{3}$$

căci $-\omega^2 \bar{r} \times \bar{r} = 0$. Însă:

$$(\bar{V} \times \bar{\omega}) \times \bar{r} = -(\bar{r} \cdot \bar{\omega}) \bar{V} + (\bar{r} \cdot \bar{V}) \bar{\omega} = (\bar{r} \cdot \bar{V}) \bar{\omega}$$

$$(\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}) \times \bar{r} = -(\bar{r} \cdot \bar{r}) \dot{\bar{\omega}} + (\bar{r} \dot{\bar{\omega}}) \bar{r} = -r^2 \dot{\bar{\omega}}$$

vectorii $\bar{r}$ și $\bar{\omega}$ respectiv $\bar{r}$ și $\dot{\bar{\omega}}$ fiind perpendiculari. Din (3) rezultă deci:

$$(\bar{r} \cdot \bar{V}) \bar{\omega} - r^2 \dot{\bar{\omega}} = 0$$

și cum vectorii $\bar{\omega}$ și $\dot{\bar{\omega}}$ sînt coliniari:

$$(\bar{r} \cdot \bar{V}) \omega - r^2 \dot{\omega} = 0. \tag{4}$$

Notînd cu θ unghiul dintre vectorii $\bar{V}$ și $\bar{r}$ din (4) avem:

$$r V \omega \cos\theta - r^2 \dot{\omega} = 0 \tag{5}$$

de unde ecuația în coordonate polare a locului geometric căutat este:

$$\frac{r}{\cos\theta} = \frac{V\omega}{\dot{\omega}} \tag{6}$$

ecuație a unui cerc, *cercul inflexiunilor*, avînd diametrul $IA = \left|\frac{\omega}{\dot{\omega}}\right| V$ pe direcția vectorului $\bar{V}$ (tangent la bază și la rostogolitoare), vectorul $\overline{IA}$ avînd sensul lui $\bar{V}$ dacă $\frac{\omega}{\dot{\omega}} > 0$ și sens contrar dacă $\frac{\omega}{\dot{\omega}} < 0$ (fig. 16.24 *a*).

Scanned with OKEN Scanner

Pentru punctele P ale acestui loc geometric accelerația tangențială instantanee este nulă (căci $\bar{v}_P \cdot \bar{a}_P = 0$) deci punctele găsite au în momentul considerat viteza maximă sau minimă.

Dacă $\dot{\omega} = 0$ atunci din (5) rezultă $\cos\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ deci locul geometric căutat este o dreaptă normală pe $\bar{V}$ (normală pe bază sau pe rostogolitoare în punctul I).

Pentru a găsi locul punctelor în care $\bar{a}_P$ și $\bar{r}$ sînt perpendiculare vom pune condiția $\bar{a}_P \cdot \bar{r} = 0$ deci:

$$(\bar{V} \times \bar{\omega})\,\bar{r} - \omega^2 r^2 = 0 \tag{7}$$

căci $(\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r})\,\bar{r} = 0$ iar $\omega^2 \bar{r}\bar{r} = \omega^2 r^2$. Cum $\bar{\omega}$ este perpendicular pe $\bar{V}$ și $\bar{r}$ notînd cu θ unghiul dintre vectorii $\bar{V}$ și $\bar{r}$ avem:

$$(\bar{V} \times \bar{\omega})\,\bar{r} = (\bar{r} \times \bar{V})\,\bar{\omega} = V r \omega \sin\theta$$

și înlocuind în (7) rezultă:

$$\frac{r}{\sin\theta} = \frac{V}{\omega}. \tag{8}$$

Locul geometric căutat este deci un cerc, *cercul de rebrusment*, tangent vitezei $\bar{V}$ avînd diametrul $IB = \frac{V}{|\omega|}$ pe direcția normalei comune la bază și rostogolitoare (fig. 16.24 *b*). Cum din (7) $(\bar{V} \times \bar{\omega}) \cdot \bar{r} > 0$, triedrul $\bar{V}, \bar{\omega}, \bar{r}$ trebuie să fie drept.

Punctele P în care $\bar{a}_P \perp \bar{r}$ au accelerația $\bar{a}_P$ și viteza $\bar{v}_P$ coliniare, deci accelerația normală este nulă, $a_{Pv} = 0$ și curbura traiectoriei punctului P este nulă.

Locurile geometrice mai sus găsite sînt cunoscute sub numele de *cercurile lui Bresse*.

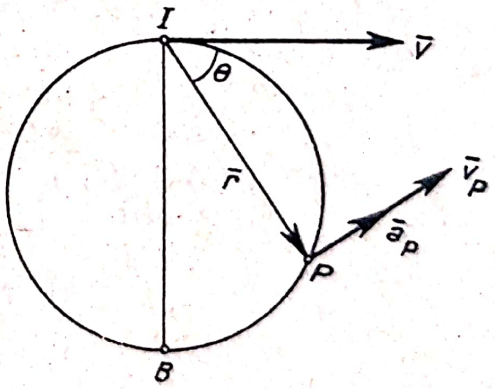


Fig. 16.24 *b*

16.25. Într-o mișcare plană, baza este o dreaptă, iar rostogolitoarea parabola:

$$y = \frac{x^2}{2p}. \tag{1}$$

Să se afle traiectoria focarului parabolei.

Rezolvare. Parabola rostogolindu-se fără lunecare pe dreaptă (axa O_1x_1 din fig. 16.25), notînd cu O_1 punctul de pe dreaptă care coincide cu vîrful O al parabolei cînd O este punctul de tangență avem:

$$O_1 I = \text{arc}\, OI = s \tag{2}$$

I este centrul instantaneu de rotație (punctul de contact dintre parabolă și dreaptă). Însă:

$$s = \int_{OI} ds \tag{3}$$

unde elementul de arc de parabolă este:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\, dx.$$

Înlocuind în (3):

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\, dx = \frac{x}{2p}\sqrt{p^2 + x^2} + \frac{p}{2} \operatorname{argsh} \frac{x}{p} \tag{4}$$

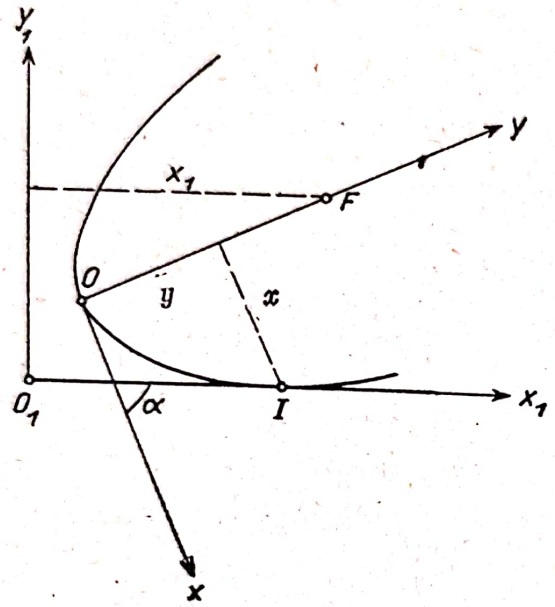


Fig. 16.25

unde x, y, sînt coordonatele punctului I în raport cu sistemul xOy.

Vectorul de poziție al focarului F față de sistemul fix $x_1O_1y_1$ este:

$$\overline{O_1F} = \overline{O_1I} - \overline{OI} + \overline{OF} \tag{5}$$

unde $OF = \frac{p}{2}$. Proiectînd ecuația (5) pe axele x_1O_1y obținem coordonatele x_1, y_1 ale punctului F:

$$\begin{aligned} x_1 &= s - x\cos\alpha + \left(\frac{p}{2} - y\right)\sin\alpha \\ y_1 &= x\sin\alpha + \left(\frac{p}{2} - y\right)\cos\alpha \end{aligned} \tag{6}$$

unde:

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = \frac{x}{p}. \tag{7}$$

Înlocuind (1), (4) și (7) în ecuațiile (6) rezultă ecuațiile parametrice ale traiectoriei focarului:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{p}{2} \operatorname{argsh} \frac{x}{p} \\ y_1 &= \frac{\sqrt{x^2 + p^2}}{2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Eliminînd parametrul x:

$$x = p \operatorname{sh} \frac{2x_1}{p} \tag{9}$$

obținem ecuația carteziană a traiectoriei focarului F, lănțișorul:

$$y_1 = \frac{p}{2} \operatorname{ch} \frac{2x_1}{p}.$$

Scanned with OKEN Scanner

16.26. Într-o mișcare plană rostogolitoarea este un cerc de rază r. Știind că un punct A situat pe rostogolitoare se mișcă pe o dreaptă fixă O_1x_1 să se determine baza mișcării.

Rezolvare. Alegem originea O_1 pe axa O_1x_1 astfel încît să coincidă cu punctul A cînd punctul B diametral opus lui A pe rostogolitoare este centrul instantaneu de rotație.

Într-o poziție oarecare a punctului A centrul instantaneu de rotație se găsește pe normala AI la viteza $\bar{v}_A$ (la axa O_1x_1). Notînd $\theta = \sphericalangle BAI$ avem $s = \text{arc } BI = 2r\theta$ deci elementul de arc de pe rostogolitoare este:

$$ds = 2\,r\,d\,\theta. \qquad (1)$$

Dacă ecuația bazei este $\eta_1 = \eta_1(\xi_1)$ elementul de arc al bazei este:

$$ds_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta_1}{d\xi_1}\right)^2}\, d\xi_1 \qquad (2)$$

și cum rostogolitoarea se rostogolește fără să alunece pe bază $ds_1 = ds$ adică:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{d\eta_1}{d\xi_1}\right)^2}\, d\xi_1 = 2\,r\,d\,\theta. \qquad (3)$$

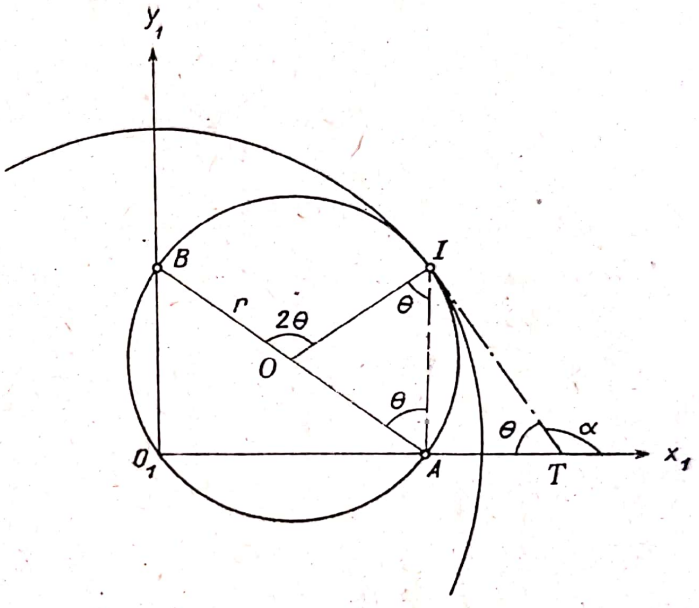


Fig. 16.26

Rostogolitoarea și baza avînd tangenta comună IT și cum $\sphericalangle ATI = AIO = \theta$ (unghiuri cu laturi perpendiculare) avem $\alpha = \pi - \theta$ (fig. 16.26) deci:

$$\frac{d\eta_1}{d\xi_1} = \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\theta. \qquad (4)$$

Din (3) și (4) rezultă:

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}\; d\xi_1 = 2\,r\,d\,\theta$$

de unde:

$$d\xi_1 = 2\,r\cos\theta\,d\theta \qquad d\eta_1 = -2\,r\sin\theta\,d\theta. \qquad (5)$$

Integrînd ecuațiile (5) cum pentru $\theta = 0$, $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 2r$ rezultă:

$$\xi_1 = 2r\sin\theta \qquad \eta_1 = 2\,r\cos\theta \qquad (6)$$

baza fiind cercul:

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = 4r^2 \qquad (7)$$

cu centrul în O_1 și raza $2r$.

16.27. O bară OA se mișcă capătul O descriind o dreaptă O_1x_1, bara fiind tangentă în B la un cerc de rază r tangent în O_1 la axa Ox_1. Să se determine baza și rostogolitoarea mișcării.

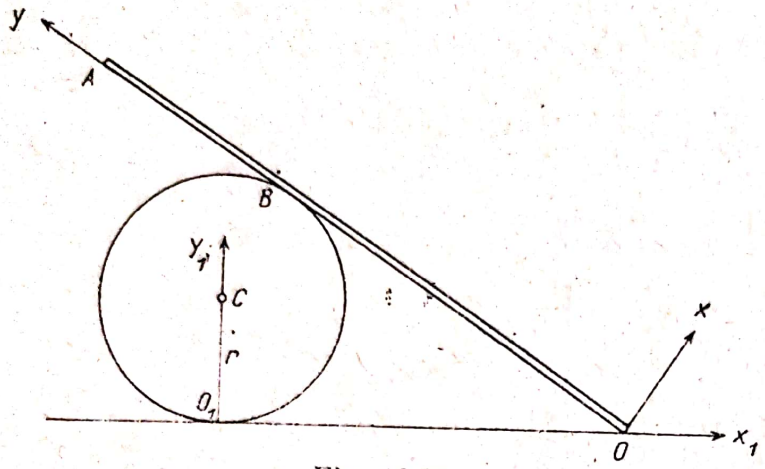


Fig. 16.27

Răspuns. Cu sistemul de axe din figura 16.27, baza este parabola:

$$\eta_1 = \frac{\xi_1^2}{2r} + \frac{r}{2}$$

iar rostogolitoarea parabola:

$$\xi = \frac{\eta^2}{2r} - \frac{r}{2}.$$

16.28. O bară OA se mișcă astfel încît capătul O alunecă cu viteza $\bar{v}_0$ pe dreapta O_1x_1, bara rezemîndu-se de punctul B de ordonata $O_1B = h$. Să se determine baza, rostogolitoarea și viteza unghiulară instantanee ω a barei.

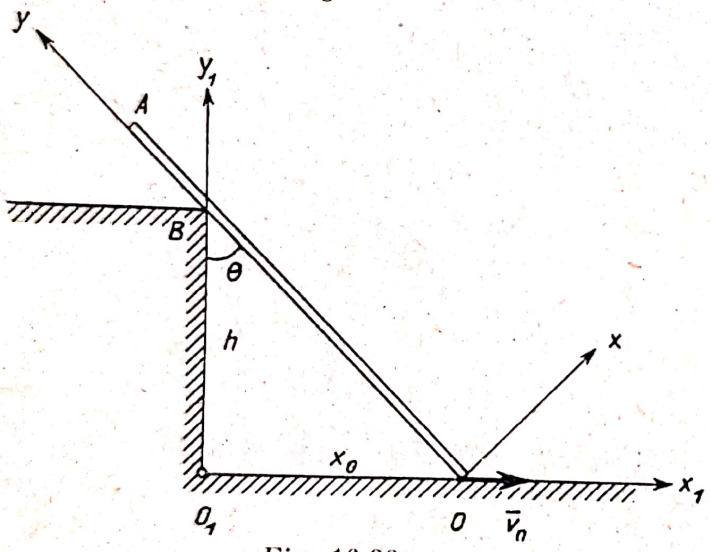


Fig. 16.28

Răspuns. Cu sistemul de axe din figura 16.28, baza este parabola

$$\eta_1 = \frac{\xi_1^2}{h} + h,$$

ecuația rostogolitoarei este

$$\eta^4 - h^2\,(\xi^2 + \eta^2) = 0,$$

iar

$$\omega = \frac{v_0 \cos^2\theta}{h} = \frac{v_0\, h}{x_0^2 + h^2}$$

unde $x_0 = O_1O$.

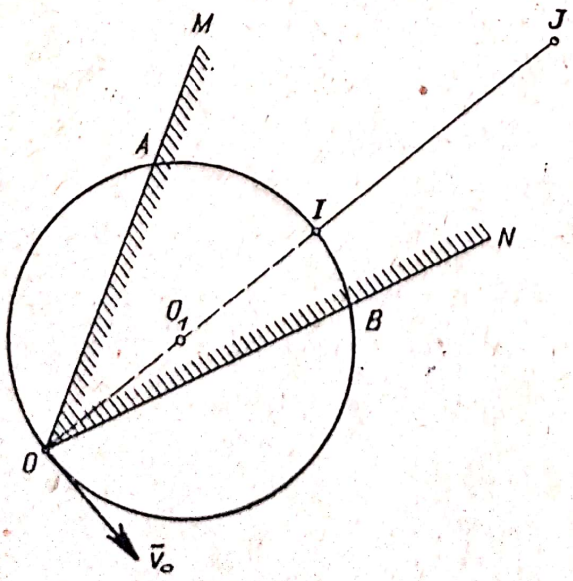


Fig. 16.29

16.29. Un unghi rigid $\widehat{MON} = \varphi$ se mișcă în planul său astfel încît latura OM trece prin punctul fix A, iar latura ON prin punctul fix B. Să se afle baza și rostogolitoarea mișcării. Presupunînd viteza $\bar{v}_0$ a

punctului O constantă în modul, să se determine poziția centrului accelerațiilor.

Răspuns. Baza este cercul descris de O ce trece prin O, A și B, centrul instantaneu I fiind punctul diametral opus lui O. Dacă r este raza bazei, rostogolitoarea este un cerc cu centrul în O și rază $2r$. Centrul accelerațiilor J se găsește pe dreapta OI la distanța $OJ = 4r$.

16.30. În interiorul unui cilindru de rază R se rostogolește fără să lunece un disc circular de rază $r < R$, centrul O al discului fiind condus de bara O_1O articulată la capete, care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω. Să se determine viteza unghiulară instantanee a discului ω_1, poziția centrului accelerațiilor J, viteza și accelerația centrului instantaneu de rotație I, viteza și accelerația unui punct P de pe periferia discului.

Răspuns. Centrul instantaneu I se găsește în punctul de contact dintre disc și cilindru, $\omega_1 = \frac{R-r}{r}\omega$, centrul accelerațiilor se găsește pe dreapta O_1O la distanța $JO = \frac{r^2}{R-r}$, $v_I = 0$, $a_I = \frac{R(R-r)}{r}\omega^2$ și este orientată de la I spre J (spre O_1), $v_P = 2(R-r)\omega \sin\frac{\theta}{2}$ și este normală pe IP, $a_P = \frac{(R-r)\omega^2}{r}\sqrt{R^2 - 2r(R-r)(1-\cos\theta)}$ și are direcția PJ (fig. 16.30). S-a notat cu θ unghiul IOP.

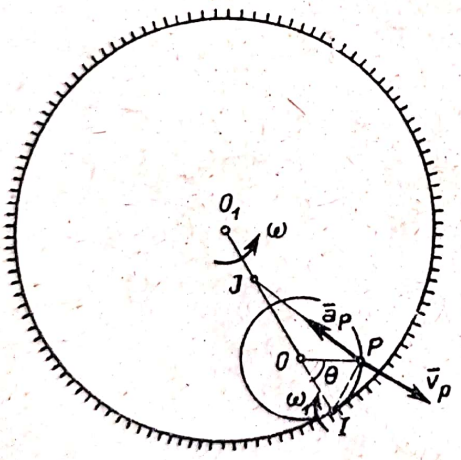


Fig. 16.30

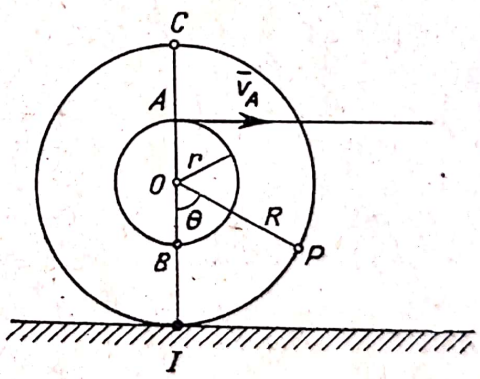


Fig. 16.31

16.31. Un corp este alcătuit din două discuri concentrice solidare, unul de rază R care se rostogolește pe un plan și unul de rază r peste care este înfășurat un fir (fig. 16.31). Cunoscînd viteza v_A a capătului firului, se cere viteza unghiulară instantanee a discurilor și vitezele punctelor O, B, C și P.

Răspuns. Centrul instantaneu I fiind punctul de contact dintre discul de rază R și plan, rezultă $\omega = \frac{v_A}{R+r}$, $v_0 = \frac{R}{R+r}v_A$, $v_B = \frac{R-r}{R+r}v_A$, $v_C = \frac{2R}{R+r}v_A$, $v_P = \frac{2R\sin\frac{\theta}{2}}{R+r}v_A$.

Scanned with OKEN Scanner

16.32. Se consideră mecanismul din fig. 16.32. Cunoscînd viteza unghiulară ω a manivelei OA, lungimile $OA = AB_1 = AB_2 = B_1O_1 = B_2O_2 = l$ și unghiul $\alpha = \frac{\pi}{6}$ să se determine viteza $\bar{v}_D$ a tijei DE pentru poziția din figură.

Răspuns. $v_D = \omega l$, viteza fiind dirijată de la D spre E.

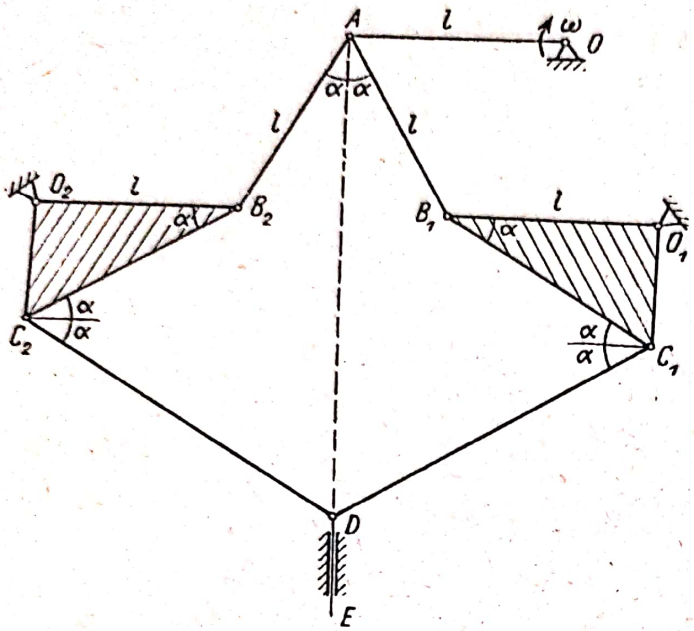


Fig. 16.32

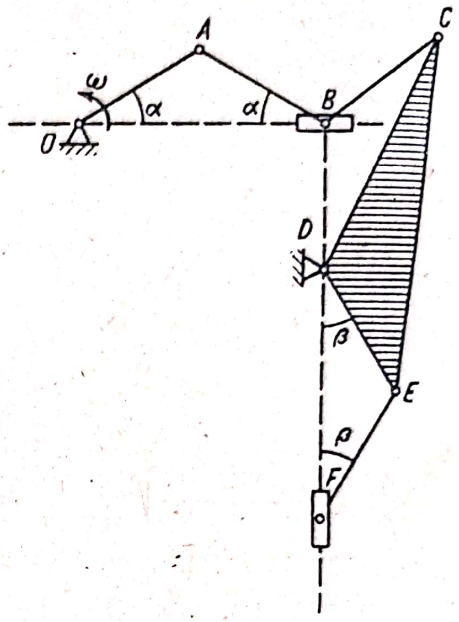


Fig. 16.33

16.33. Se consideră mecanismul din figura 16.33. Știind că manivela OA se rotește uniform cu viteza unghiulară ω și cunoscînd lungimile $OA = AB = BC = BD = DE = EF = l$, $CD = l_1$ și unghiurile α și β, să se determine vitezele punctelor A, B, C, E și F pentru poziția din figură.

Răspuns. $v_A = \omega l$, $v_B = v_E = 2\,l\omega \sin\alpha$, $v_C = 2\,l_1\omega \sin\alpha$, $v_F = 4\,\omega l \sin\alpha \sin\beta$.

Capitolul XVII

CINEMATICA MIȘCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Vom numi *mișcare absolută* a punctului P mișcarea lui în raport cu un triedru de referință fix T_1 $(O_1x_1y_1z_1)$.

Mișcarea relativă a punctului P va fi mișcarea lui în raport cu un triedru de referință mobil T $(Oxyz)$.

Mișcarea de transport a punctului P este mișcarea pe care ar avea-o punctul față de triedrul fix dacă ar rămîne nemișcat față de triedrul mobil,

Scanned with OKEN Scanner

adică dacă mișcarea lui relativă ar înceta (sau mișcarea unui punct solidar legat de triedrul mobil care în momentul considerat ar coincide cu punctul P).

Vectorul de poziție al punctului P față de T_1 este:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r} \qquad (17.1)$$

unde $\bar{r}_0$ este vectorul de poziție al punctului O față de T_1 și:

$$\bar{r} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k} \qquad (17.2)$$

este vectorul de poziție al punctului P față de T (fig. 17.*a*).

Viteza absolută a punctului P este:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t \qquad (17.3)$$

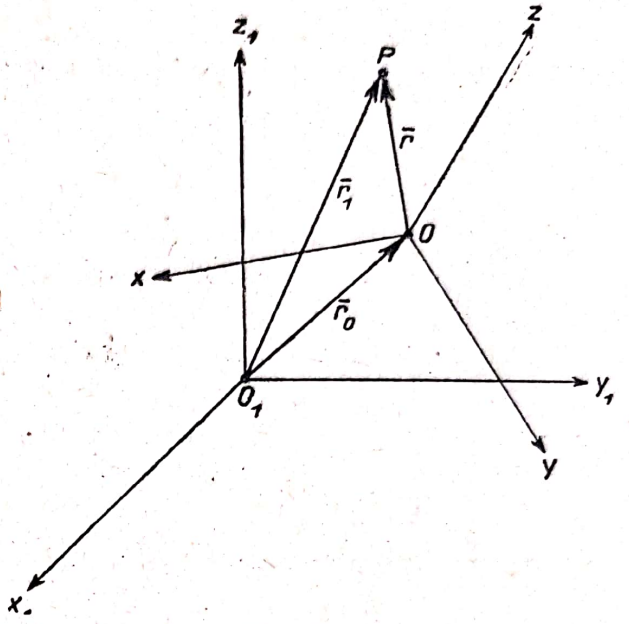


Fig. 17. *a*

unde:

$$\bar{v}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \dot{x}\,\bar{i} + \dot{y}\,\bar{j} + \dot{z}\,\bar{k} \qquad (17.4)$$

este viteza relativă a punctului, iar:

$$\bar{v}_t = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} \qquad (17.5)$$

este viteza de transport a punctului. S-a notat cu:

$$\bar{v}_0 = \dot{\bar{r}}_0 \qquad \bar{a}_0 = \ddot{\bar{r}}_0 \qquad (17.6)$$

viteza și accelerația punctului O, iar componentele vitezei unghiulare $\bar{\omega}$ a triedrului mobil sînt:

$$\omega_x = \dot{\bar{j}}\,\bar{k} = -\dot{\bar{k}}\,\bar{j}; \quad \omega_y = \dot{\bar{k}}\,\bar{i} = -\dot{\bar{i}}\,\bar{k}; \quad \omega_z = \dot{\bar{i}}\,\bar{j} = -\dot{\bar{j}}\,\bar{i}. \qquad (17.7)$$

Deci viteza absolută a punctului P este:

$$\bar{v}_a = \dot{\bar{r}}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}. \qquad (17.8)$$

Accelerația absolută a punctului P este:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c \qquad (17.9)$$

unde accelerația relativă este:

$$\bar{a}_r = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = \ddot{x}\,\bar{i} + \ddot{y}\,\bar{j} + \ddot{z}\,\bar{k}, \qquad (17.10)$$

accelerația de transport este:

$$\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \qquad (17.11)$$

Scanned with OKEN Scanner

iar accelerația lui Coriolis:

$$\bar{a}_c = 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 2\,\bar{\omega} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}. \tag{17.12}$$

Expresia accelerației absolute se poate scrie deci:

$$\bar{a}_a = \ddot{\bar{r}}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} + 2\,\bar{\omega} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}. \tag{17.13}$$

Accelerația lui Coriolis este nulă dacă viteza relativă este nulă ($\bar{v}_r = 0$), dacă mișcarea de transport este o mișcare de translație ($\bar{\omega} = 0$) sau dacă viteza relativă $\bar{v}_r$ este coliniară cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$.

Derivata unui vector $\bar{u}$ cînd se cunosc proiecțiile lui pe un sistem de axe mobile T este:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{u} \tag{17.14}$$

unde $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$ este derivata calculată ca și cum triedrul T ar fi fix, adică:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial u_x}{\partial t}\bar{i} + \frac{\partial u_y}{\partial t}\bar{j} + \frac{\partial u_z}{\partial t}\bar{k}. \tag{17.15}$$

B. PROBLEME REZOLVATE

17.1. Cît timp va vedea călătorul dintr-un tren care merge cu viteza v_1 un tren de lungime l care merge în sens contrar cu viteza v_2. Aplicație numerică: $v_1 = 40$ km/h, $v_2 = 50$ km/h, $l = 150$ m.

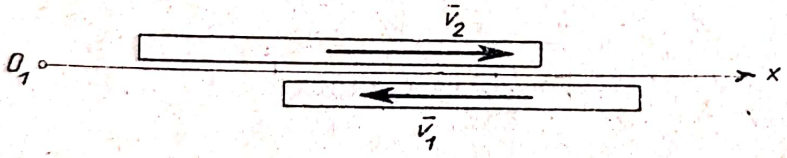


Fig. 17.1

Rezolvare. Să determinăm viteza relativă $\bar{v}_r$, a trenului al doilea în raport cu primul. Viteza lui absolută este $\bar{v}_a = \bar{v}_2$, iar viteza lui de transport (dacă ar fi invariabil legat de primul tren) este $\bar{v}_t = \bar{v}_1$. Conform (17.3):

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$$

de unde:

$$\bar{v}_r = \bar{v}_a - \bar{v}_t = \bar{v}_2 - \bar{v}_1. \tag{1}$$

Proiectînd această relație pe axa Ox_1 (fig. 17.1):

$$v_r = v_2 + v_1. \tag{2}$$

Călătorul va vedea trenul timpul:

$$t = \frac{l}{v_r} = \frac{l}{v_2 + v_1}. \tag{3}$$

În cazul aplicației numerice:

$$v_r = 90 \text{ km/h} = 2{,}5 \text{ m/s} \qquad t = \frac{150}{2{,}5} = 6\text{s}.$$

17.2. O barcă cu motor a cărei viteză într-un lac este $\bar{v}_1$, se mișcă într-un rîu, viteza curentului apei fiind $\bar{v}_2$ pe toată lățimea rîului. Să se determine viteza absolută a bărcii. În ce direcție trebuie să se traverseze rîul pentru ca pornind din A să se atingă malul opus în B (fig. 17.2*a*)? În ce direcție trebuie să se traverseze rîul pentru ca timpul de traversare să fie minim?

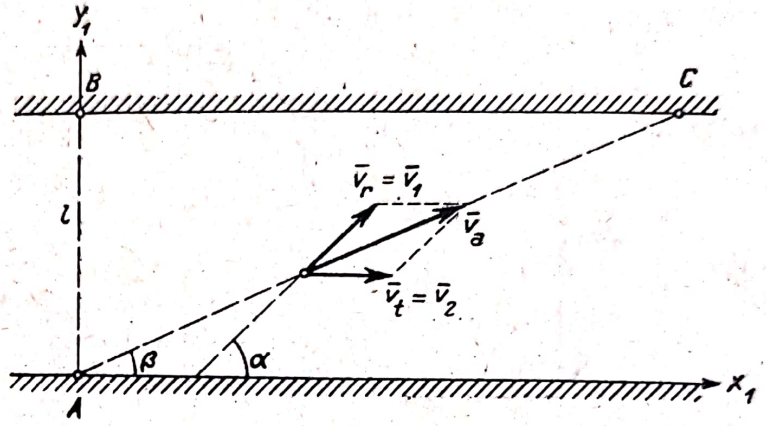


Fig. 17.2 *a*

Rezolvare. Viteza relativă a bărcii va fi viteza ei în raport cu apa, adică:

$$\bar{v}_r = \bar{v}_1.$$

Viteza de transport va fi viteza bărcii dacă mișcarea relativă ar înceta (dacă motorul ar fi oprit), deci este viteza curentului apei:

$$\bar{v}_t = \bar{v}_2.$$

Conform (17.3) viteza absolută este:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = \bar{v}_1 + \bar{v}_2. \tag{1}$$

Notînd cu α și β unghiurile dintre viteza relativă și viteza absolută cu malul și proiectînd relația (1) pe axele triedrului fix Ax_1y_1, rezultă:

$$v_a \cos \beta = v_1 \cos \alpha + v_2 \tag{2}$$

$$v_a \sin \beta = v_1 \sin \alpha \tag{3}$$

de unde:

$$v_a = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos \alpha} \tag{4}$$

$$\sin \beta = \frac{v_1 \sin \alpha}{v_a} = \frac{v_1 \sin \alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos \alpha}}. \tag{5}$$

Dacă $\alpha = 0$, adică barca merge în același sens cu curentul, $\beta = 0$, iar $v_a = v_1 + v_2$; dacă $\alpha = \pi$, adică barca merge împotriva curentului, $v_a = |v_1 - v_2|$, sensul vitezei absolute fiind cel al vitezei mai mari dintre vitezele v_1 și v_2.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca barca pornind din A să ajungă în B trebuie ca $\beta = \frac{\pi}{2}$. Înlocuind în relația (5) obținem:

$$v_1 \sin \alpha = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos \alpha}$$

de unde:

$$\cos \alpha = -\frac{v_2}{v_1}.$$

Înlocuind în (4) rezultă:

$$v_a = \sqrt{v_1^2 - v_2^2}.$$

Deci $\alpha > \frac{\pi}{2}$ și barca poate ajunge în B numai dacă $v_1 > v_2$ (fig. 17.2 *b*).

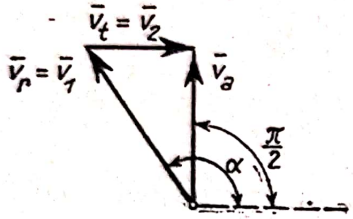


Fig. 17.2 *b*

Timpul de traversare a rîului este:

$$t = \frac{AC}{v_a} = \frac{l}{v_a \sin \beta},$$

unde l este lățimea rîului. Ținînd seama de ecuația (3) rezultă:

$$t = \frac{l}{v_1 \sin \alpha}$$

deci timpul va fi minim cînd $\sin \alpha$ este maxim adică pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$. În acest caz viteza relativă este normală pe mal, viteza absolută este:

$$v_a = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

iar:

$$\sin \beta = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

17.3. Viteza curentului unui rîu de lățime l variază parabolic fiind egală cu zero la mal și maximă în mijlocul rîului $v_{max} = v_1$. O barcă traversează rîul cu viteza relativă v_2 normală pe mal. Să se determine traiectoria bărcii, locul în care barca atinge malul opus și timpul de traversare.

Rezolvare. Viteza de transport este viteza curentului apei. Cu sistemul de axe ales el va fi de forma:

$$v_t = a y^2 + b$$

unde pentru $y = 0$, $v_t = v_1$ iar pentru $y = \pm l$; $v_t = 0$. Rezultă:

$$v_t = -\frac{4 v_1}{l^2} y^2 + v_1. \quad (1)$$

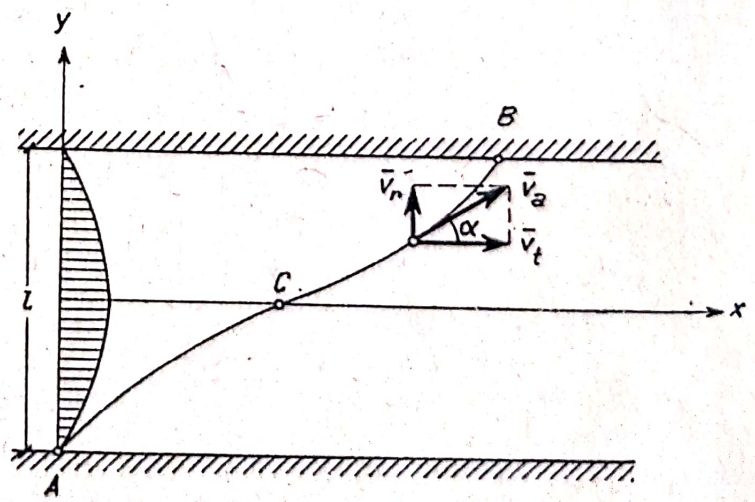


Fig. 17.3

Viteza absolută (17.3) va fi:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_t + \bar{v}_r \tag{2}$$

și proiectînd pe axele alese în figura 17.3 obținem:

$$\dot{x} = v_t = -\frac{4v_1}{l^2}y^2 + v_1 \qquad \dot{y} = v_r = v_2. \tag{3}$$

Integrînd ecuația a doua și punînd condiția inițială $t = 0$, $y = -\frac{l}{2}$ rezultă:

$$y = v_2 t - \frac{l}{2} \tag{4}$$

deci:

$$\dot{x} = -\frac{4v_1}{l^2}v_2^2 t^2 + \frac{4v_1 v_2 t}{l}$$

și prin integrare, cum pentru $t = 0$, $x = 0$, rezultă:

$$x = -\frac{4v_1 v_2^2 t^3}{3l^2} + \frac{2v_1 v_2 t^2}{l}. \tag{5}$$

Eliminînd timpul t din ecuațiile parametrice ale traiectoriei (4), (5) obținem:

$$x = -\frac{4v_1}{3v_2 l^2}y^3 + \frac{v_1}{v_2}y + \frac{v_1 l}{3v_2}$$

traiectoria fiind o parabolă cubică avînd centrul de simetrie în punctul $C\left(\frac{v_1 l}{3v_2}, 0\right)$.

Barca ajunge pe malul opus în punctul B de coordonate:

$$x_B = \frac{2v_1}{3v_2}l \qquad y_B = \frac{l}{2}$$

timpul de traversare fiind:

$$t = \frac{l}{v_2}.$$

17.4. Un glonț străbate un vagon de lățime a care merge cu viteza $\bar{v}_1$. Cunoscînd unghiul α dintre viteza glonțului și cea a vagonului și distanța b dintre găurile de intrare și de ieșire a glonțului A și B (fig. 17.4), să se determine viteza absolută și viteza relativă (față de vagon) a glonțului.

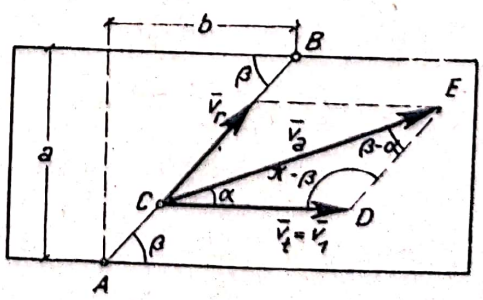


Fig. 17.4

Rezolvare. Conform relației (17.3):

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t.$$

În problema noastră cunoaștem viteza de transport (viteza vagonului) $\bar{v}_t = \bar{v}_1$,

direcția vitezei absolute (unghiul α) și direcția vitezei relative determinată de unghiul β unde:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a}{b} \tag{1}$$

deoarece traiectoria relativă a glonțului față de vagon este dreapta AB.

Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul CDE avem:

$$\frac{v_a}{\sin \beta} = \frac{v_1}{\sin (\beta - \alpha)} = \frac{v_r}{\sin \alpha} \tag{2}$$

de unde:

$$v_a = \frac{v_1 \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)} = \frac{a}{a \cos \alpha - b \sin \alpha} v_1 \tag{3}$$

$$v_r = \frac{v_1 \sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \sin \alpha}{a \cos \alpha - b \sin \alpha} v_1 . \tag{4}$$

Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$ împușcătura se execută perpendicular pe direcția mișcării vagonului:

$$v_a = \frac{a}{-b} v_1 = \frac{a}{|b|} v_1 \qquad v_r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{-b} v_1 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|b|} v_1$$

căci în acest caz $b < 0$.

17.5. Particulele de apă trec de pe roata directoare a unei turbine pe roata motoare cu viteza v_1. Cunoscînd unghiul α dintre direcția vitezei și tangenta la cercul interior al roții directoare, raza R a roții motoare și viteza unghiulară ω a roții motoare, să se determine unghiul β dintre paletele roții motoare și tangenta la circumferința acestei roți, știind că apa intră în roata motoare fără să lovească paletele (fig. 17.5 *a*). Aplicație numerică: $v = 8$ m/s, $\alpha = 40°$, $n = 360$ rot/min (turația turbinei), $R = 25$ cm.

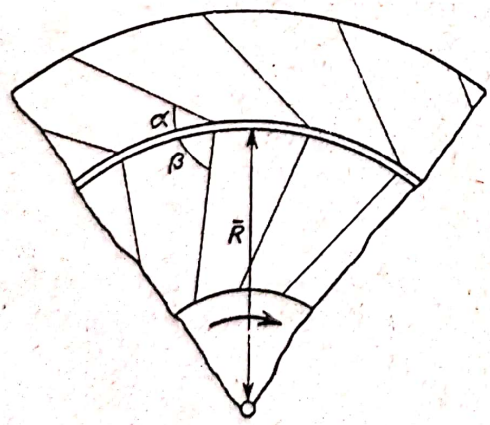


Fig. 17.5 *a*

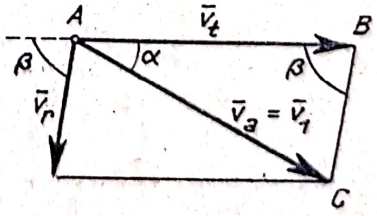


Fig. 17.5 *b*

Rezolvare. Viteza absolută a unei picături de apă este $\bar{v}_a = \bar{v}_1$. Viteza relativă este tangentă la paletele roții motoare căci apa nu lovește paletele.

Viteza de transport este viteza apei dacă mișcarea relativă ar înceta, adică viteza periferică a roții motoare $v_t = \omega R$. Conform (17.3):

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$$

Scanned with OKEN Scanner

și scriind teorema sinusurilor în triunghiul ABC din figura 17.5 *b* rezultă:

$$\frac{v_1}{\sin\beta} = \frac{v_r}{\sin\alpha} = \frac{\omega R}{\sin(\alpha+\beta)}$$

de unde:

$$v_1(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = \omega R\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_1\sin\alpha}{R\omega - v_1\cos\alpha}$$

$$v_r = \sqrt{v_1^2 + R^2\omega^2 - 2R\omega v_1\cos\alpha}\,.$$

În cazul aplicației numerice:

$$\omega = \frac{n\pi}{30} = 37{,}68\ \text{s}^{-1}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{8\cdot 0{,}643}{0{,}25\cdot 37{,}68 - 8\cdot 0{,}766} = 1{,}56$$

$$\beta \approx 57°20'.$$

17.6. Un punct P se mișcă pe o dreaptă Δ după legea $r = r(t)$, dreapta executînd o mișcare de rotație într-un plan în jurul punctului fix O după legea $\theta = \theta(t)$ (s-a notat $OP = r$ și θ unghiul dintre dreapta Δ și o direcție fixă Ox_1 din plan). Să se determine vitezele relativă, de transport și absolută a punctului și accelerațiile relativă, de transport, a lui Coriolis și absolută a punctului. Caz particular: punctul descrie uniform dreapta, iar dreapta se rotește uniform.

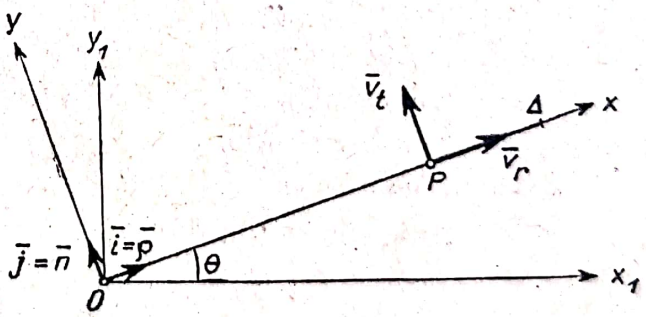


Fig. 17.6 *a*

Rezolvare. Considerînd un triedru de referință mobil $Oxyz$ și unul fix $Ox_1y_1z_1$, vectorul de poziție (17.2) al punctului P față de triedrul mobil este:

$$\bar{r} = r\,\bar{i}. \qquad (1)$$

Viteza unghiulară (17.7) și accelerația unghiulară a triedrului mobil sînt:

$$\bar{\omega} = \dot{\theta}\,\bar{k} \qquad \dot{\bar{\omega}} = \ddot{\theta}\,\bar{k} \qquad (2)$$

iar viteza și accelerația originii (17.6) sînt nule:

$$\bar{v}_0 = \bar{0} \qquad \bar{a}_0 = \bar{0}. \qquad (3)$$

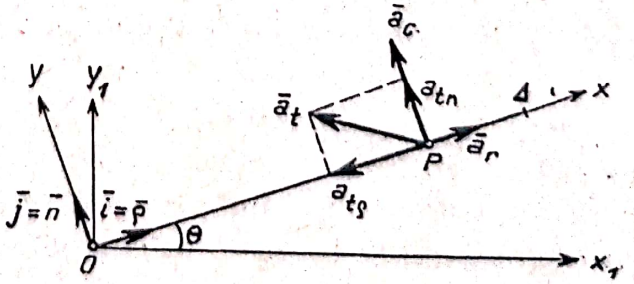


Fig. 17.6 *b*

Viteza relativă (17.4) și de transport (17.5) sînt:

$$\bar{v}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \dot{r}\,\bar{i} \qquad \bar{v}_t = \bar{\omega} \times \bar{r} = r\,\dot{\theta}\,\bar{j} \tag{4}$$

viteza relativă avînd direcția dreptei Δ, iar cea de transport, care este viteza punctului de pe dreapta Δ care coincide cu P, este normală la dreapta Δ și egală cu $\dot{\theta}\, r = \omega\, r$ (fig. 17.6 *a*). Viteza absolută (17.3) este:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = \dot{r}\,\bar{i} + r\,\dot{\theta}\,\bar{j}. \tag{5}$$

Accelerația relativă (17.10), accelerația de transport (17.11) și accelerația lui Coriolis (17.12) sînt:

$$\bar{a}_r = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = \ddot{r}\,\bar{i} \tag{6}$$

$$\bar{a}_t = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = r\,\ddot{\theta}\,\bar{j} - r\,\dot{\theta}^2\,\bar{i} \tag{7}$$

$$\bar{a}_c = 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\,\bar{j} \tag{8}$$

deci accelerația absolută (17.9) este:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\bar{i} + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})\,\bar{j}. \tag{9}$$

Accelerația relativă are direcția dreptei Δ; accelerația de transport care este accelerația punctului solidar cu dreapta Δ care coincide cu P, are două componente, una avînd direcția axei Δ orientată spre O egală în modul cu $r\omega^2 = r\,\dot{\theta}^2$ (accelerația normală în mișcarea de rotație a dreptei Δ) și una egală cu $r\dot{\omega} = r\,\ddot{\theta}$ normală pe Δ (accelerația tangențială); accelerația Coriolis este normală pe bară.

De fapt am găsit expresiile (13.11) și (13.12) ale vitezei și accelerației în coordonate polare, căci $\bar{i} = \bar{\rho}$ iar $\bar{j} = \bar{n}$.

În cazul particular considerat $\dot{r} = \text{const}$, $\ddot{r} = 0$, $\dot{\theta} = \text{const}$, $\ddot{\theta} = 0$ și notînd $\dot{r} = v_0$, $\dot{\theta} = \omega_0$ obținem:

$$\bar{v}_a = v_0\,\bar{i} + r\,\omega_0\,\bar{j}$$

$$\bar{a}_a = -\,r\omega_0^2\,\bar{i} + 2\,v_0\,\omega_0\,\bar{j}.$$

Traiectoria punctului este o spirală cu pasul $\frac{2\pi}{\omega_0}\,v_0$.

17.7. O dreaptă Δ se rotește într-un plan în jurul extremității sale O cu viteza unghiulară constantă ω. Un punct P se mișcă pe dreaptă, viteza absolută a punctului fiind constantă în modul, $|\bar{v}_a| = v_1$. Știind că în momentul inițial $OP = r_0 \leqslant \frac{v_1}{\omega}$, să se studieze mișcarea relativă a punctului pe dreaptă și mișcarea absolută a punctului.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Notînd $OP = r$ (fig. 17.7 *a*), viteza relativă $\dot{r}$ are direcția axei Δ iar viteza de transport este viteza punctului de pe Δ care coincide cu P datorită mișcării de rotație a dreptei, adică $v_t = \omega r$ și este normală pe Δ. Conform (17.3) viteza absolută a punctului P este:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = \dot{r}\,\bar{i} + r\,\omega\,\bar{j} \qquad (1)$$

deci:

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{\dot{r}^2 + \omega^2 r^2} = v_1 \qquad (2)$$

de unde:

$$\dot{r} = \sqrt{v_1^2 - \omega^2 r^2}$$

sau:

$$\frac{dr}{\sqrt{v_1^2 - \omega^2 r^2}} = dt.$$

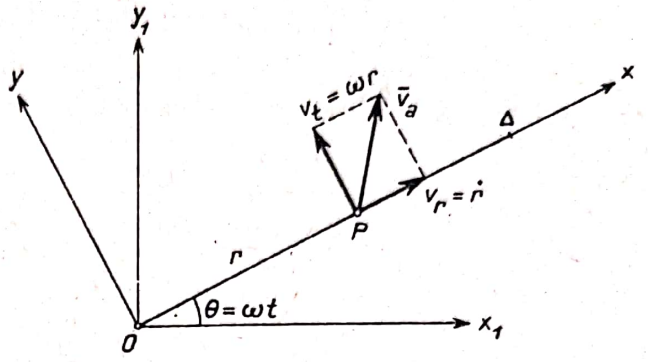


Fig. 17.7 *a*

Integrînd obținem:

$$r = \frac{v_1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) \qquad (3)$$

și punînd condiția inițială pentru $t = 0$, $r = r_0$ obținem constanta φ:

$$\sin\varphi = \frac{\omega r_0}{v_1} \qquad \varphi = \arcsin\frac{\omega r_0}{v_1}. \qquad (4)$$

Mișcarea relativă a punctului este o oscilație armonică pe dreapta Δ, de amplitudine $\frac{v_1}{\omega}$, pulsație ω, faza la momentul inițial fiind φ. Viteza relativă și accelerația relativă sînt:

$$\bar{v}_r = \dot{r}\,\bar{i} = v_1\cos(\omega t + \varphi)\,\bar{i} \qquad \bar{a}_r = \ddot{r}\,\bar{i} = -v_1\,\omega\sin(\omega t + \varphi)\,\bar{i} = -\omega^2 r\,\bar{i}. \qquad (5)$$

Accelerația relativă are direcția dreptei Δ. Accelerația de transport este accelerația din mișcarea de rotație uniformă (14.10) și are direcția dreptei Δ, fiind orientată spre O, adică:

$$\bar{a}_t = -\omega^2 r\,\bar{i}. \qquad (6)$$

Accelerația Coriolis (17.12) este:

$$\bar{a}_c = 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 2\,\omega\bar{k} \times \dot{r}\,\bar{i} = 2\,\omega\,\dot{r}\,\bar{j} = 2\,\omega\,v_1\cos(\omega t + \varphi)\,\bar{j} \qquad (7)$$

deci accelerația absolută (17.9) este:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c = -2\,\omega\,v_1\sin(\omega t + \varphi)\,\bar{i} + 2\omega\,v_1\cos(\omega t + \varphi)\,\bar{j} \qquad (8)$$

modulul ei fiind:

$$|\bar{a}_a| = 2\,\omega\,v_1. \qquad (9)$$

Scanned with OKEN Scanner

Accelerația absolută și viteza absolută sînt perpendiculare căci $\bar{v}_a \cdot \bar{a}_a = 0$ (fig. 17.7 *b*). Ecuațiile parametrice ale traiectoriei absolute sînt:

$$x_1 = r\cos\theta = \frac{v_1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)\cos\omega t = \frac{v_1}{2\omega}\sin(2\omega t + \varphi) + \frac{v_1}{2\omega}\sin\varphi$$

$$y_1 = r\sin\theta = \frac{v_1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)\sin\omega t = -\frac{v_1}{2\omega}\sin(2\omega t + \varphi) + \frac{v_1}{2\omega}\cos\varphi$$

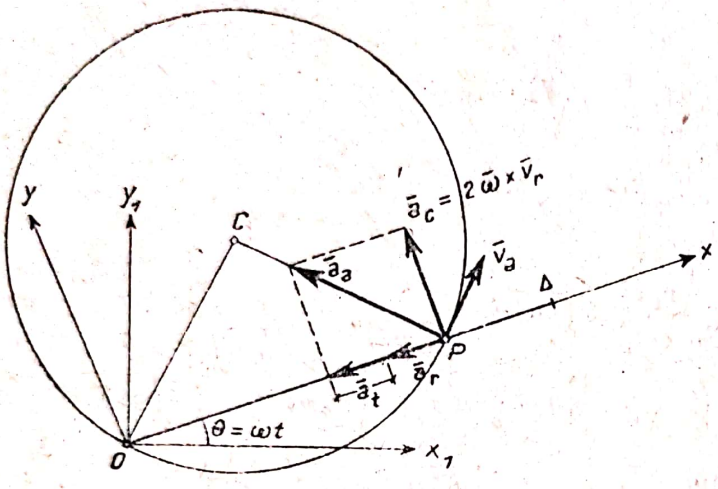


Fig. 17.7 *b*

căci fără a particulariza problema putem considera $\theta = \omega t$. Eliminînd timpul t obținem:

$$\left(x_1 - \frac{v_1}{2\omega}\sin\varphi\right)^2 + \left(y_1 - \frac{v_1}{2\omega}\cos\varphi\right)^2 = \frac{v_1^2}{4\omega^2}$$

traiectoria fiind un cerc de rază $\rho = \frac{v_1}{2\omega}$ cu centrul în punctul $C\left(\frac{v_1}{2\omega}\sin\varphi, \frac{v_1}{2\omega}\cos\varphi\right)$, cercul trecînd prin punctul O. Mișcarea punctului este o mișcare circulară uniformă cu viteza v_1 și cu accelerația (13.18) $\frac{v_1^2}{\rho} = 2v_1\omega$ normală pe viteză, rezultat care s-a obținut anterior.

În afară de soluția (3) problema mai admite pentru condiția inițială $r_0 = \frac{v_1}{\omega}$ soluția:

$$r = \frac{v_1}{\omega} \qquad \dot{r} = 0 \qquad \ddot{r} = 0$$

mișcarea relativă încetînd, punctul descriind uniform cu viteza $v_a = v_1$ cercul:

$$x_1^2 + y_1^2 = \left(\frac{v_1}{\omega}\right)^2$$

cu centrul în O și raza $\rho = \frac{v_1}{\omega}$, accelerația absolută fiind $a_a = \frac{v_1^2}{\rho} = \omega v_1$.

17.8. Punctul P pornește din vîrful O al unui con avînd unghiul la vîrf 2α și se mișcă uniform pe generatoarea OA a conului cu viteza v_1, conul se rotește în jurul axei sale cu viteza unghiulară constantă ω. Să se determine viteza și accelerația absolută a punctului P.

Rezolvare. Considerînd sistemul de referință $Oxyz$ solidar cu conul, axa Oz fiind axa conului, planul xOz conținînd generatoarea OA (fig. 17.8), viteza relativă a punctului (față de con) este:

$$\bar{v}_r = \bar{v}_1 = v_1 \sin\alpha\,\bar{i} + v_1 \cos\alpha\,\bar{k}. \tag{1}$$

Cum:

$$OP = v_1 t \qquad \bar{r} = v_1 t \sin\alpha\,\bar{i} + v_1 t \cos\alpha\,\bar{k}. \tag{2}$$

Viteza de transport (17.5) este:

$$\bar{v}_t = \bar{\omega} \times \bar{r} =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ v_1 t \sin\alpha & 0 & v_1 t \cos\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \omega v_1 t \sin\alpha\,\bar{j} \tag{3}$$

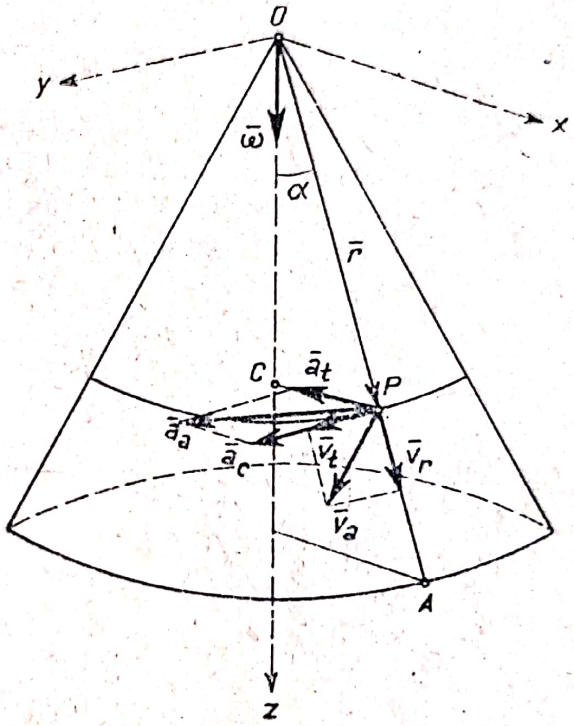


Fig. 7.8

căci $\bar{v}_0 = 0$. Viteza absolută (17.3) este:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = v_1 \sin\alpha\,\bar{i} + \omega v_1 t \sin\alpha\,\bar{j} + v_1 \cos\alpha\,\bar{k} \tag{4}$$

egală în modul cu:

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{v_1^2 + \omega^2 v_1^2 t^2 \sin^2\alpha} = v_1\sqrt{1 + \omega^2 t^2 \sin^2\alpha}.$$

Accelerația relativă (17.10) este nulă, mișcarea relativă fiind rectilinie și uniformă:

$$\bar{a}_r = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = 0. \tag{5}$$

Accelerația de transport (17.11) este:

$$\bar{a}_t = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega v_1 t \sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 v_1 t \sin\alpha\,\bar{i} \tag{6}$$

căci $\bar{a}_0 = 0$, $\dot{\bar{\omega}} = 0$. Accelerația Coriolis (17.12) este:

$$\bar{a}_c = 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ v_1 \sin\alpha & 0 & v_1 \cos\alpha \end{vmatrix} = 2\,\omega v_1 \sin\alpha\,\bar{j}. \tag{7}$$

Accelerația absolută (17.9) este situată într-un plan normal pe axa conului:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c = -\omega^2 v_1 t \sin\alpha\, \bar{i} + 2\omega v_1 \sin\alpha\, \bar{j} \qquad (8)$$

$$|\bar{a}_a| = \omega v_1 \sin\alpha \sqrt{\omega^2 t^2 + 4}\,.$$

Observație. Viteza și accelerația de transport fiind egale cu viteza și accelerația punctului de pe con care coincide cu P datorită mișcării de rotație uniforme a conului, sînt conform (14.9) și (14.10) $v_t = \omega\rho$ tangentă și $a_t = \omega^2\rho$ normală la cercul paralel care trece prin punctul P (raza cercului este $\rho = CP = OP \sin\alpha = v_1 t \sin\alpha$). Se obțin astfel relațiile (3) și (6).

17.9. Un punct P se mișcă uniform cu viteza v_1 pe meridianul unei sfere de rază R, iar sfera se rotește uniform în jurul diametrului NS cu viteza unghiulară ω. Să se determine viteza și accelerația absolută a punctului P în funcție de unghiul λ (fig. 17.9 *a*).

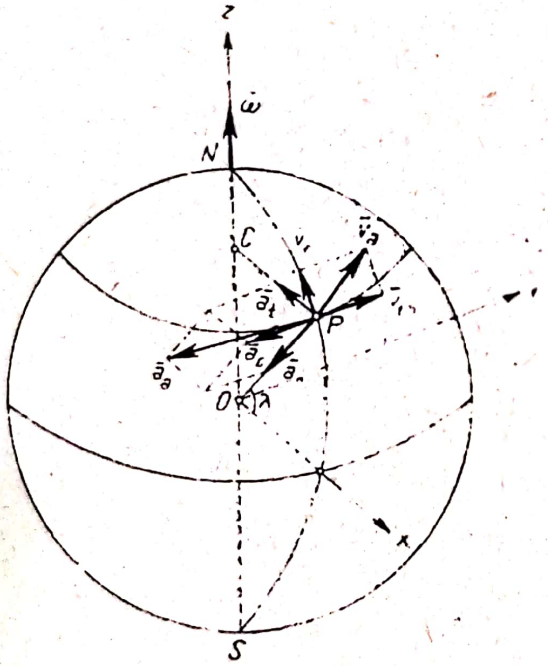


Fig. 17.9 *a*

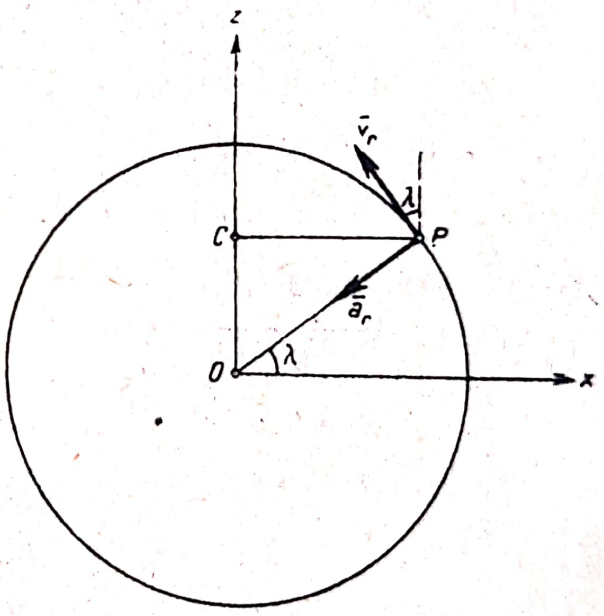


Fig. 17.9 *b*

Rezolvare. Viteza relativă (fig. 17.9 *b*) este tangentă la meridian:

$$\bar{v}_r = \bar{v}_1 = -v_1 \sin\lambda\, \bar{i} + v_1 \cos\lambda\, \bar{k}. \qquad (1)$$

Accelerația relativă este accelerația din mișcarea circulară uniformă (13.18) și are direcția razei $OP = R$ de versor $\bar{\nu} = -\cos\lambda\,\bar{i} - \sin\lambda\,\bar{k}$:

$$\bar{a}_r = \frac{v_1^2}{R}\bar{\nu} = -\frac{v_1^2}{R}\cos\lambda\,\bar{i} - \frac{v_1^2}{R}\sin\lambda\,\bar{k}. \qquad (2)$$

Viteza și accelerația de transport a punctului P sînt viteza și accelerația punctului dacă ar rămîne imobil în raport cu sfera. Sfera avînd o mișcare de rotație uniformă conform (14.9) și (14.10) $v_t = \omega\rho$ și este tangentă

la cercul paralel trecînd prin P, iar $a_t = \omega^2 \rho$ este dirijată spre centrul cercului paralel. Deoarece raza cercului paralel $\rho = R\cos\lambda$:

$$\bar{v}_t = \omega R \cos\lambda \bar{j}; \quad \bar{a}_t = -\omega^2 R \cos\lambda \bar{i}. \tag{3}$$

Aceste rezultate se puteau obține și cu ajutorul formulelor (17.5) și (17.11) în care:

$$\bar{v}_0 = 0, \quad \bar{a}_0 = 0, \quad \bar{\omega} = \omega\bar{k}, \quad \dot{\bar{\omega}} = 0, \quad \bar{r} = R\cos\lambda\bar{i} + R\sin\lambda\bar{k}.$$

Viteza și accelerația de transport sînt nule pentru $\lambda = \pm\frac{\pi}{2}$ cînd P se găsește pe axa de rotație NS și maxime pentru $\lambda = 0$ în planul ecuatorial xOy.

Accelerația Coriolis:

$$\bar{a}_c = 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 2\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -v_1\sin\lambda & 0 & v_1\cos\lambda \end{vmatrix} = -2\omega v_1 \sin\lambda \bar{j} \tag{4}$$

este normală pe viteza relativă și orientată spre stînga în emisfera $\lambda > 0$ și orientată spre dreapta în emisfera $\lambda < 0$. Ea se anulează pe cercul ecuatorial ($\lambda = 0$) cînd $\bar{v}_r$ și $\bar{\omega}$ sînt coliniare și este maximă în punctele N și S $\left(\lambda = \pm\frac{\pi}{2}\right)$.

Viteza și accelerația absolută (17.3) și (17.9) sînt reprezentate în figura 17.9*a*:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = -v_1\sin\lambda\bar{i} + \omega R\cos\lambda\bar{j} + v_1\cos\lambda\bar{k} \tag{5}$$

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c = -\left(\frac{v_1^2}{R}\cos\lambda + \omega^2 R\cos\lambda\right)\bar{i} - 2\omega v_1\sin\lambda\bar{j} - \frac{v_1^2}{R}\sin\lambda\bar{k} \tag{6}$$

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{v_1^2 + \omega^2 R^2\cos^2\lambda}$$

$$|\bar{a}_a| = \sqrt{\frac{v_1^4}{R^2} + \omega^4 R^2\cos^2\lambda + 2\omega^2 v_1^2\cos^2\lambda + 4\omega^2 v_1^2\sin^2\lambda}.$$

Aceste rezultate se pot folosi pentru determinarea vitezei și accelerației absolute ale unui punct care se mișcă pe un cerc paralel pe suprafața pămîntului (ținînd seama numai de mișcarea de rotație proprie a pămîntului).

17.10. Un cilindru de rază R este șlefuit cu un polizor a cărui piatră de rază r se rotește în jurul axei A de pe brațul OA cu viteza unghiulară ω_1. Brațul OA se rotește în jurul axei fixe O cu viteza unghiulară ω. Să se determine viteza și accelerația absolută a punctului de contact B dintre piatră și cilindru.

Rezolvare. Viteza relativă a punctului B față de bara OA este tangentă la cercul de rază r cu centrul în A descris de punctul B, deci cu notațiile din figura 17.10:

$$\bar{v}_r = \omega_1 r \bar{j}. \qquad (1)$$

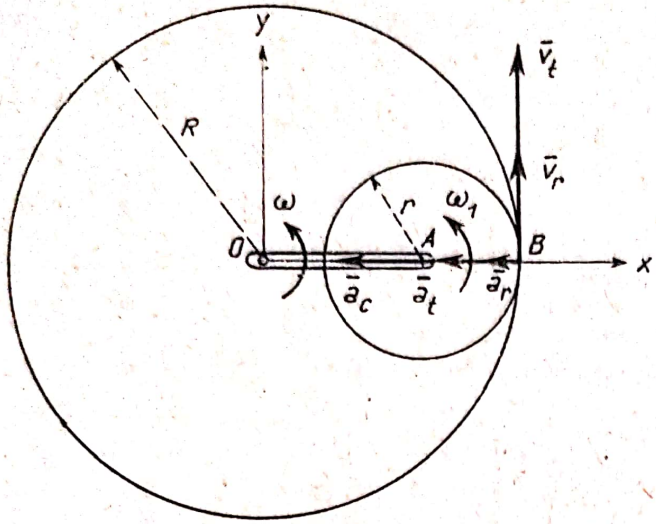


Fig. 17.10

Accelerația relativă este accelerația normală (13.18) din mișcarea circulară uniformă:

$$\bar{a}_r = -\frac{v_r^2}{r}\bar{i} = -\omega_1^2 r \bar{i}. \qquad (2)$$

Viteza și accelerația de transport sînt viteza și accelerația dacă mișcarea relativă ar înceta, dacă piatra ar fi solidară cu brațul OA care se rotește uniform, deci conform (14.9) și (14.10):

$$\bar{v}_t = \omega R \bar{j} \quad \bar{a}_t = -\omega^2 R \bar{i}. \qquad (3)$$

Accelerația Coriolis (17.12) este:

$$\bar{a}_c = 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 2\,\omega \bar{k} \times r\,\omega_1 \bar{j} = -2\,\omega\omega_1 r \bar{i}. \qquad (4)$$

Deci viteza absolută (17.3) și accelerația absolută (17.9) sînt:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = (\omega_1 r + \omega R)\bar{j}$$

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c = -(\omega_1^2 r + \omega^2 R + 2\,\omega\,\omega_1 r)\bar{i} \qquad (5)$$

și au direcția tangentei, respectiv a normalei la cercul paralel al cilindrului.

17.11. Un cerc de rază r se rotește în planul său în jurul unui punct fix O cu viteza unghiulară constantă ω în sens trigonometric. Un punct P se mișcă pe acest cerc cu viteza unghiulară 2ω în sensul acelor de ceasornic. Punctul P pornește din A, punctul diametral opus lui O. Să se determine viteza, accelerația și traiectoria absolută a punctului P.

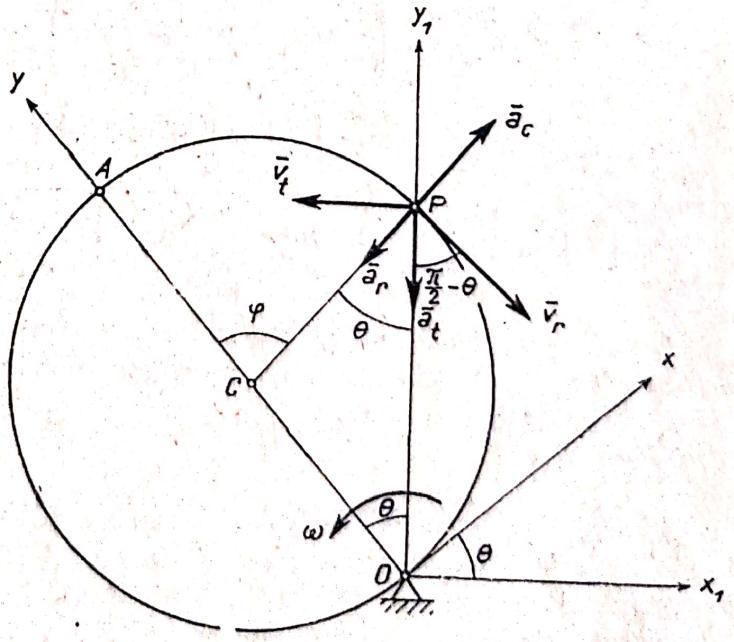


Fig. 17.11

Rezolvare.

Unghiul $\widehat{ACP} = \varphi$ este:

$$\varphi = 2\omega t \qquad (1)$$

și unghiul θ dintre axele Ox_1, Ox și Oy_1, Oy este:

$$\theta = \omega t \qquad (2)$$

axele Oxy și Ox_1y_1 coincizînd în momentul inițial. Dacă P' ar fi punctul de intersecție al axei Oy_1 cu cercul, atunci arc $AP' = 2r\,\theta = 2r\omega t$. Însă arc $AP = r\,\varphi = 2\,r\omega t$ deci arc AP' = arc AP punctele P' și P coincizînd, adică P este punctul de intersecție dintre axa Oy_1 și cerc, iar:

$$OP = 2r\cos\theta = 2r\cos\omega t. \tag{3}$$

Viteza relativă și accelerația relativă a punctului P în raport cu cercul sînt cele din mișcarea circulară uniformă (13.22) tangentă respectiv normală la cerc și egale cu:

$$v_r = 2\omega r \qquad a_r = 4\omega^2 r \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_r &= 2\,\omega\,r\cos\theta\,\bar{i}_1 - 2\,\omega\,r\sin\theta\,\bar{j}_1 \\ \bar{a}_r &= -4\,\omega^2 r\sin\theta\,\bar{i}_1 - 4\,\omega^2 r\cos\theta\,\bar{j}_1\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Viteza și accelerația de transport sînt cele ale punctului de pe cerc care coincide cu P datorită mișcării de rotație uniformă a cercului (14.9) și (14.10), viteza fiind normală iar accelerația coliniară cu OP:

$$\begin{aligned} \bar{v}_t &= -\,\omega\,OP\,\bar{i}_1 = -\,2\,\omega\,r\cos\theta\,\bar{i}_1 \\ \bar{a}_t &= -\,\omega^2\,OP\,\bar{j}_1 = -\,2\,\omega^2\,r\cos\theta\,\bar{j}_1\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Accelerația Coriolis (17.12):

$$\bar{a}_c = 2\,\bar{\omega}\times\bar{v}_r = 2\begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ 2\omega r\cos\theta & -2\,\omega r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = 4\,\omega^2 r\sin\theta\,\bar{i}_1 + 4\,\omega^2 r\cos\theta\,\bar{j}_1 \tag{7}$$

are direcția razei CP a cercului, orientată spre exteriorul cercului și este egală în modul cu $4\omega^2 r$.

Viteza (17.3) și accelerația absolută (17.9) sînt:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = -\,2\,\omega r\sin\theta\,\bar{j}_1 = -\,2\,\omega r\sin\omega t\,\bar{j}_1 \tag{8}$$

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c = -\,2\,\omega^2 r\cos\theta\,\bar{j}_1 = -\,2\,\omega^2 r\cos\omega t\,\bar{j}_1\,. \tag{9}$$

Punctul P găsindu-se pe axa Oy_1 traiectoria este un segment al axei Oy_1. Puteam găsi aceste rezultate direct. Din relația (3) vectorul de poziție al punctului P față de sistemul fix este:

$$\bar{r}_1 = 2r\cos\omega t\,\bar{j}_1 \tag{10}$$

deci:

$$\begin{aligned} \bar{v}_a &= \dot{\bar{r}}_1 = -\,2r\,\omega\sin\omega t\,\bar{j}_1 \\ \bar{a}_a &= \ddot{\bar{r}}_1 = -\,2r\,\omega^2\cos\omega t\,\bar{j}_1\,. \end{aligned}$$

Mișcarea absolută a punctului P este o oscilație armonică pe amplitudine $2r$ și pulsație ω pe axa Oy_1.

Scanned with OKEN Scanner

17.12. Un disc circular de rază r solidarizat de o bară OA de lungime l (fig. 17.12) execută oscilații în jurul punctului O după legea $\theta = \theta_0 \sin \omega_1 t$, unde θ_0 și ω_1 sînt constante. Pe circumferința cercului se mișcă un punct P cu viteza unghiulară constantă ω_2. Să se determine viteza și accelerația absolută a punctului P. Cazuri particulare: AP și OP coliniare sau normale.

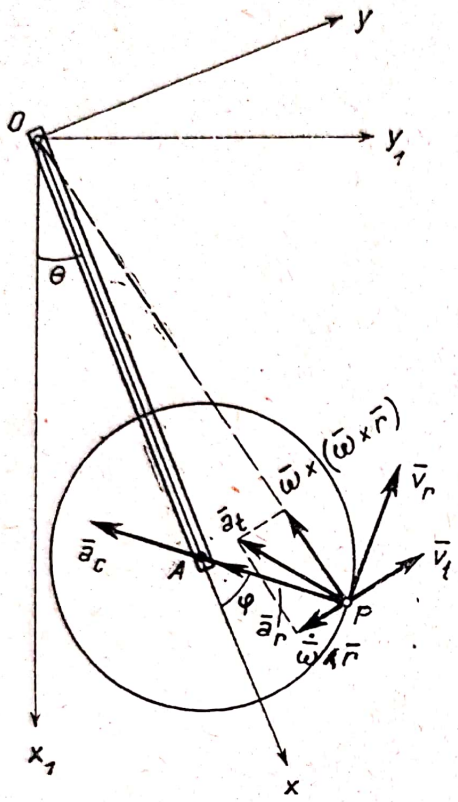


Fig. 17.12

Rezolvare. Mișcarea relativă a punctului este o mișcare circulară uniformă, viteza (13.22) fiind tangentă iar accelerația (13.22) fiind normală la circumferința discului:

$$v_r = \omega_2 r \qquad a_r = \omega_2^2 r$$

$$\bar{v}_r = -\omega_2 r \sin\varphi\, \bar{i} + \omega_2 r \cos\varphi\, \bar{j}$$

$$\bar{a}_r = -\omega_2^2 r \cos\varphi\, \bar{i} - \omega_2^2 r \sin\varphi\, \bar{j} \qquad (1)$$

(φ este unghiul dintre AP și axa Ox).

Mișcarea de transport este mișcarea unui punct de pe disc care coincide cu P. Cum:

$$\bar{v}_0 = 0 \quad \bar{a}_0 = 0 \quad \bar{\omega} = \dot{\theta}\bar{k} = \omega_1 \theta_0 \cos \omega_1 t\, \bar{k}$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \ddot{\theta}\bar{k} = -\omega_1^2 \theta_0 \sin \omega_1 t\, \bar{k}$$

$$\bar{r} = \overline{OP} = (l + r\cos\varphi)\,\bar{i} + r\sin\varphi\,\bar{j}.$$

Viteza de transport (17.5) este:

$$\bar{v}_t = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega_1 \theta_0 \cos \omega_1 t \\ l + r\cos\varphi & r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\omega_1 r \theta_0 \cos\omega_1 t \sin\varphi\, \bar{i} + \omega_1 (l + r\cos\varphi)\,\theta_0 \cos\omega_1 t\, \bar{j}. \qquad (2)$$

Accelerația de transport (17,11) este:

$$\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) =$$

$$= \omega_1^2 \theta_0 [r \sin \omega_1 t \sin\varphi - (l + r\cos\varphi)\,\theta_0 \cos^2 \omega_1 t]\, \bar{i} - \qquad (3)$$

$$- \omega_1^2 \theta_0 [(l + r\cos\varphi) \sin \omega_1 t + r\theta_0 \cos^2 \omega_1 t \sin\varphi]\, \bar{j}$$

căci:

$$\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & -\omega_1^2 \theta_0 \sin \omega_1 t \\ l + r\cos\varphi & r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \omega_1^2 r \theta_0 \sin \omega_1 t \sin\varphi\, \bar{i} - \omega_1^2 (l + r\cos\varphi)\,\theta_0 \sin \omega_1 t \bar{j}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_1 \theta_0 \cos \omega_1 t \\ -\omega_1 r \theta_0 \cos \omega_1 t \sin \varphi & \omega_1 (l + r \cos \varphi) \theta_0 \cos \omega_1 t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\omega_1^2 (l + r \cos \varphi) \theta_0^2 \cos^2 \omega_1 t \, \vec{i} - \omega_1^2 r \theta_0^2 \cos^2 \omega_1 t \sin \varphi \, \vec{j}.$$

Viteza de transport este normală pe $\overline{OP}$, iar componentele $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ și $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ sînt una normală, cealaltă coliniară cu $\overline{OP}$.

Accelerația Coriolis (17.12) este :

$$\vec{a}_c = 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_1 \theta_0 \cos \omega_1 t \\ -\omega_2 r \sin \varphi & \omega_2 r \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \omega_1 \omega_2 r \dot{\theta}_0 \cos \omega_1 t \cos \varphi \, \vec{i} - 2 \omega_1 \omega_2 r \theta_0 \cos \omega_1 t \sin \varphi \, \vec{j} \qquad (4)$$

și are direcția AP, fiind orientată spre centrul cercului cînd $\dot{\theta} > 0$, $\cos \omega_1 t > 0$ și spre exteriorul cercului pentru $\dot{\theta} < 0$, $\cos \omega_1 t < 0$.

Viteza absolută (17.3) este:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t = -r \sin \varphi (\omega_2 + \omega_1 \theta_0 \cos \omega_1 t) \vec{i} +$$

$$+ [r \cos \varphi (\omega_2 + \omega_1 \theta_0 \cos \omega_1 t) + \omega_1 l \theta_0 \cos \omega_1 t] \vec{j}. \qquad (5)$$

Accelerația absolută (17.9) este :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_c = [-\omega_2^2 r \cos \varphi + \omega_1^2 r \theta_0 \sin \omega_1 t \sin \varphi -$$

$$- \omega_1^2 (l + r \cos \varphi) \theta_0^2 \cos^2 \omega_1 t - 2 \omega_1 \omega_2 r \theta_0 \cos \omega_1 t \cos \varphi] \vec{i} +$$

$$+ [-\omega_2^2 r \sin \varphi - \omega_1^2 (l + r \cos \varphi) \theta_0 \sin \omega_1 t - \omega_1^2 r \theta_0^2 \cos^2 \omega_1 t \sin \varphi -$$

$$- 2 \omega_1 \omega_2 r \theta_0 \cos \omega_1 t \sin \varphi) \vec{j}. \qquad (6)$$

Pentru $\varphi = 0$ și $\varphi = \pi$ cînd O, A și P sînt coliniare:

$$\vec{v}_a = [\pm r (\omega_2 + \omega_1 \theta_0 \cos \omega_1 t) + \omega_1 l \theta_0 \cos \omega_1 t] \vec{j}$$

$$\vec{a}_a = [\mp \omega_2^2 r - \omega_1^2 (l \pm r) \theta_0^2 \cos^2 \omega_1 t \mp 2 \omega_1 \omega_2 r \theta_0 \cos \omega_1 t] \vec{i} -$$

$$- \omega_1^2 (l \pm r) \theta_0 \sin \omega_1 t \vec{j}.$$

Pentru $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ cînd OA și AP sînt perpendiculare :

$$\vec{v}_a = \mp r (\omega_2 + \omega_1 \theta_0 \cos \omega_1 t) \vec{i} + \omega_1 l \theta_0 \cos \omega_1 t \vec{j}$$

$$\vec{a}_a = (\pm \omega_1^2 r \theta_0 \sin \omega_1 t - \omega_1^2 l \theta_0^2 \cos^2 \omega_1 t) \vec{i} +$$

$$+ (\mp \omega_2^2 r - \omega_1^2 l \theta_0 \sin \omega_1 t \mp \omega_1^2 r \theta_0^2 \cos^2 \omega_1 t \mp 2 \omega_1 \omega_2 r \theta_0 \cos \omega_1 t) \vec{j}.$$

Scanned with OKEN Scanner

17.13. O bară O_1A de lungime r se rotește uniform cu viteza unghiulară ω_1 în jurul punctului O_1. Capătul A al barei este prevăzut cu o culisă care poate luneca pe bara O_2B, articulată în punctul O_2 (fig. 17.13 *a*).

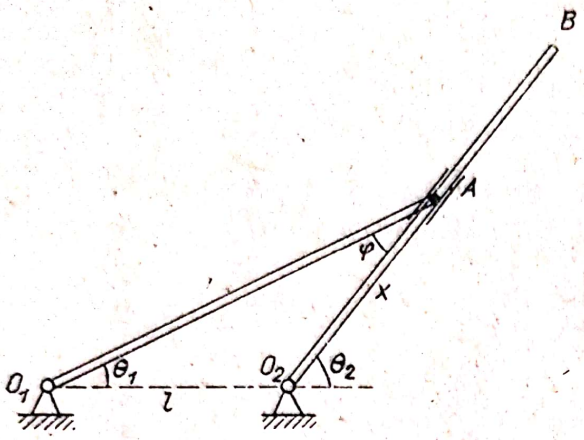


Fig. 17.13 *a*

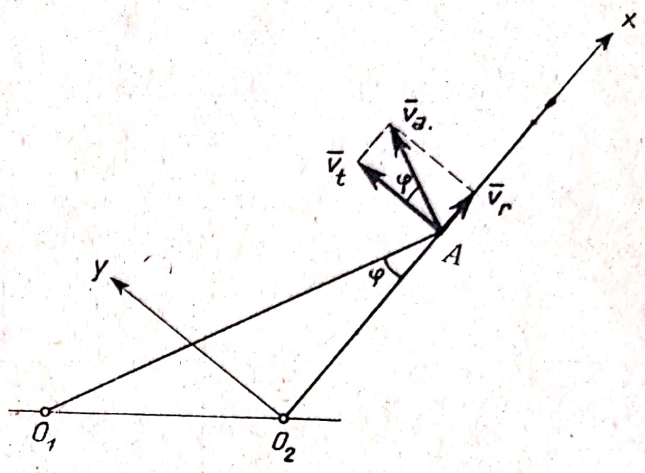


Fig. 17.13 *b*

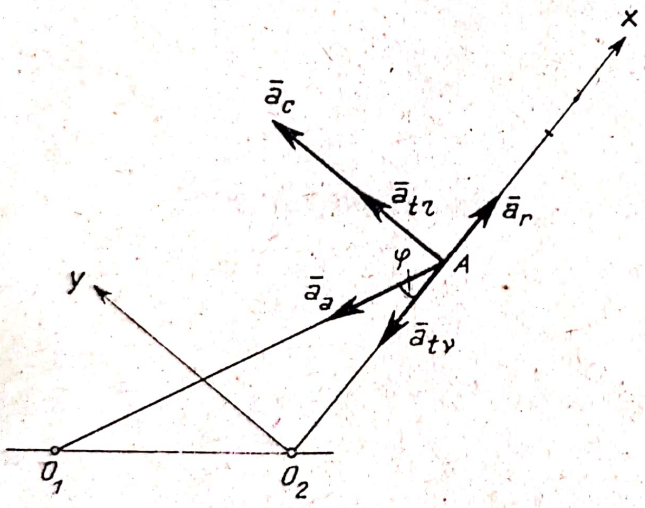


Fig. 17.13 *c*

Cunoscînd distanța $O_1O_2 = l$ să se determine viteza și accelerația unghiulară ω_2 și $\dot{\omega}_2$ a barei O_2B și viteza și accelerația relativă a culisei în raport cu bara O_2B.

Rezolvare. Viteza relativă (fig. 17.13 *b*) a culisei are direcția barei O_2A (direcția axei O_2x):

$$\bar{v}_r = \dot{x}\,\bar{i}. \tag{1}$$

Viteza de transport este viteza punctului de pe bara O_2A care coincide cu culisa și este normală pe bara O_2A avînd direcția axei Oy:

$$\bar{v}_t = \omega_2 x\,\bar{j} \tag{2}$$

unde $x = O_2A$. Viteza absolută a culisei este normală pe bara O_1A și este egală în modul cu:

$$v_a = \omega_1 r. \tag{3}$$

Proiectînd relația (17.3) $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$ pe axele triedrului mobil Oxy avem:

$$\begin{aligned} v_a \sin\varphi &= v_r \\ v_a \cos\varphi &= v_t. \end{aligned} \tag{4}$$

Din triunghiul O_1O_2A avem:

$$x = \sqrt{r^2 + l^2 - 2rl\cos\theta_1}; \quad \sin\varphi = \frac{l\sin\theta_1}{\sqrt{r^2 + l^2 - 2rl\cos\theta_1}}$$

$$\cos\varphi = \frac{r - l\cos\theta_1}{\sqrt{r^2 + l^2 - 2rl\cos\theta_1}}. \tag{5}$$

Înlocuind în relațiile (4) expresiile (3) și (5) obținem:

$$v_r = \frac{r\,l\,\sin\theta_1}{\sqrt{r^2 + l^2 - 2\,r\,l\cos\theta_1}}\,\omega_1 \tag{6}$$

$$v_t = \frac{(r - l\cos\theta_1)\,r}{\sqrt{r^2 + l^2 - 2\,r\,l\cos\theta_1}}\,\omega_1 \tag{7}$$

și ținînd seama de (2) obținem viteza unghiulară:

$$\omega_2 = \frac{(r - l\cos\theta_1)\,r}{l^2 + r^2 - 2\,r\,l\cos\theta_1}\,\omega_1 . \tag{8}$$

Accelerația relativă a culisei (fig. 17.13 *c*) are direcția barei O_2A:

$$\bar{a}_r = \ddot{x}\,\bar{i} . \tag{9}$$

Accelerația de transport care este accelerația punctului de pe bara O_2A care coincide cu culisa, are două componente, una tangențială (normală pe O_2A) și una normală dirijată spre O_2:

$$\bar{a}_t = -a_{t\nu}\,\bar{i} + a_{t\tau}\,\bar{j} \qquad a_{t\tau} = \dot{\omega}_2\,x \qquad a_{t\nu} = \omega_2^2\,x. \tag{10}$$

Accelerația Coriolis este normală pe viteza unghiulară de transport $\bar{\omega}_2$ și pe $\bar{v}_r$ deci este normală pe bara O_2B, deci:

$$\bar{a}_c = 2\,\omega_2 v_r\,\bar{j} = \frac{2\,r^2\,l\,(r - l\cos\theta_1)\sin\theta_1}{\sqrt{(l^2 + r^2 - 2\,r\,l\cos\theta_1)^3}}\,\omega_1^2\,\bar{j}. \tag{11}$$

Accelerația absolută a culisei are direcția barei O_1A și este orientată spre O_1, mișcarea absolută fiind o mișcare de rotație uniformă:

$$a_a = \omega_1^2 r. \tag{12}$$

Proiectînd ecuația (17.9) $\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c$ pe axele triedrului mobil Oxy avem:

$$\begin{aligned} -a_a\cos\varphi &= a_r - a_{t\nu} \\ a_a\sin\varphi &= a_{t\tau} + a_c \end{aligned} \tag{13}$$

de unde:

$$a_r = \frac{r\,l\,(r - l\cos\theta_1)\,(r\cos\theta_1 - l)}{\sqrt{(l^2 + r^2 - 2\,r\,l\cos\theta_1)^3}}\,\omega_1^2 \tag{14}$$

$$a_{t\tau} = -\frac{(r^2 - l^2)\,r\,l\sin\theta_1}{\sqrt{(l^2 + r^2 - 2\,r\,l\cos\theta_1)^3}}\,\omega_1^2 \tag{15}$$

și ținînd seama de (10):

$$\dot{\omega}_2 = -\frac{(r^2 - l^2)\,r\,l\sin\theta_1}{(l^2 + r^2 - 2\,r\,l\cos\theta_1)^2}\,\omega_1^2 . \tag{16}$$

17.14. Bara cotită ABC are la un moment dat o mișcare de translație cu viteza v_1 și accelerația a_1. Cunoscînd unghiurile α, β, γ și distanța $EG=l$ să se determine viteza și accelerația punctului E, și viteza unghiulară instantanee ω a barei EF (fig. 17.14*a*).

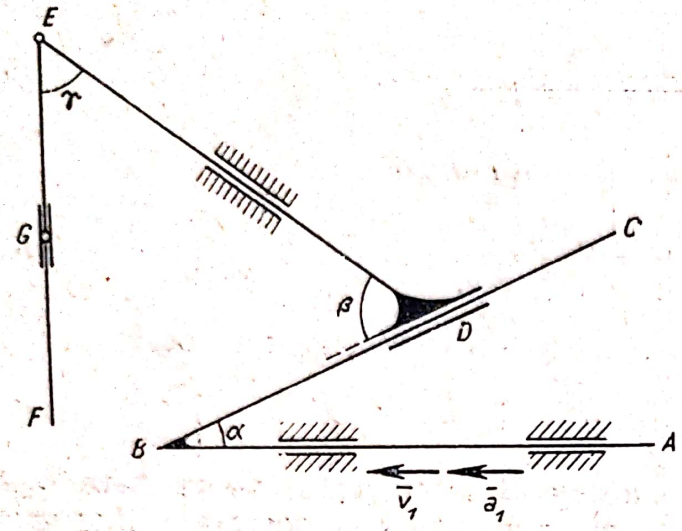


Fig. 17.14 *a*

Rezolvare. Bara DE avînd o mișcare de translație :

$$\bar{v}_E = \bar{v}_D \qquad \bar{a}_E = \bar{a}_D \qquad (1)$$

viteza și accelerația absolută a punctului D avînd direcția DE. Viteza și accelerația relativă a punctului D față de bara BC au direcția BC.

Viteza și accelerația de transport sînt viteza $\bar{v}_1$ și accelerația $\bar{a}_1$ a punctului de pe bara BC care coincide cu D (fig. 17.14 *b*). Cum mișcarea de transport este o mișcare de translație, $\bar{\omega} = 0$ și accelerația Coriolis este nulă, deci conform (17.3) și (17.9) :

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t \qquad \bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t \qquad (2)$$

$$\frac{v_D}{\sin\alpha} = \frac{v_1}{\sin\beta} = \frac{v_r}{\sin(\beta-\alpha)} \qquad \frac{a_D}{\sin\alpha} = \frac{a_1}{\sin\beta} = \frac{a_r}{\sin(\beta-\alpha)} \qquad (3)$$

de unde :

$$v_E = v_D = \frac{v_1 \sin\alpha}{\sin\beta} \qquad v_r = \frac{v_1 \sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta} \qquad (4)$$

$$a_E = a_D = \frac{a_1 \sin\alpha}{\sin\beta} \qquad a_r = \frac{a_1 \sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}. \qquad (5)$$

Bara EF are o mișcare plană, cunoaștem direcțiile vitezelor punctelor E și G. Centrul instantaneu de rotație I se va găsi la intersecția normalelor duse pe aceste viteze (fig. 17.14 *c*). Conform (16.10):

$$v_E = \omega\, IE \qquad (6)$$

unde :

$$IE = \frac{l}{\sin\gamma} \qquad (7)$$

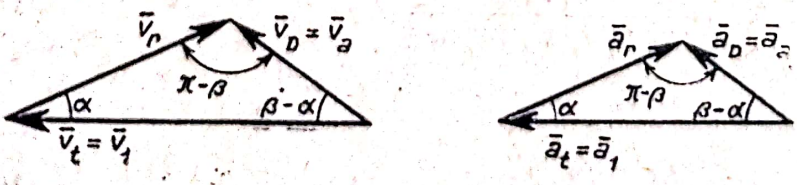


Fig. 17.14 *b*

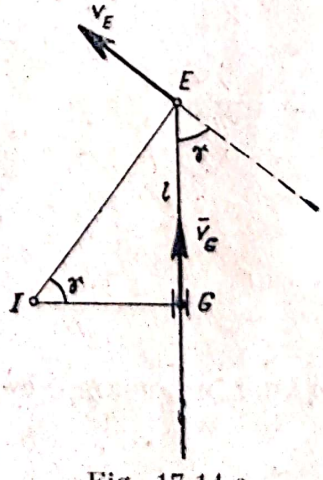


Fig. 17.14 *c*

Scanned with OKEN Scanner

deci:

$$\omega = \frac{v_E \sin \gamma}{l} = \frac{v_1 \sin \alpha \sin \gamma}{l \sin \beta}. \tag{8}$$

17.15. O bară OA de lungime l articulată în capătul O, se reazemă pe o pană care are o mișcare de translație uniformă cu viteza $\bar{v}_1$. Cunoscînd unghiul de înclinare α al penei față de orizontală și unghiul β, să se determine viteza și accelerația unghiulară ω_2 și $\dot{\omega}_2$ a barei.

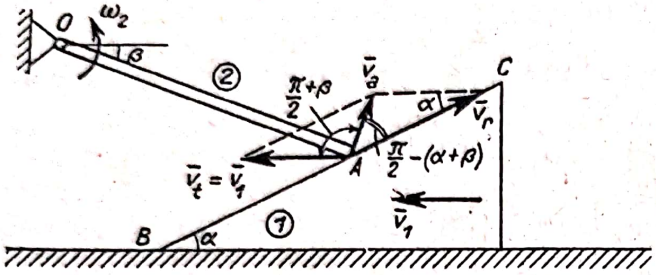


Fig. 17.15 *a*

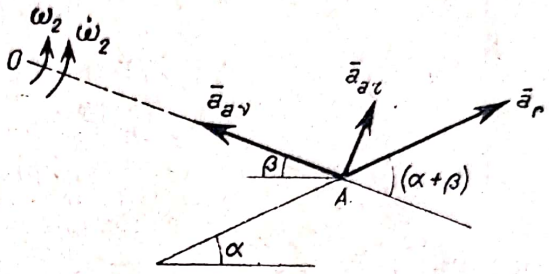


Fig. 17.15 *b*

Rezolvare. Bara avînd o mișcare de rotație, viteza absolută a capătului A al barei este normală pe OA și egală cu:

$$v_a = \omega_2 l \tag{1}$$

Viteza relativă are direcția BC, iar viteza de transport este viteza penei:

$$\bar{v}_t = \bar{v}_1. \tag{2}$$

Cum:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$$

din figura 17.15' *a* rezultă:

$$\frac{v_a}{\sin \alpha} = \frac{v_r}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)} = \frac{v_1}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right]} \tag{3}$$

deci:

$$v_a = \frac{v_1 \sin \alpha}{\cos (\alpha + \beta)} \tag{4}$$

$$v_r = \frac{v_1 \cos \beta}{\cos (\alpha + \beta)}. \tag{5}$$

Din (1) și (4) rezultă:

$$\omega_2 = \frac{v_1 \sin \alpha}{l \cos (\alpha + \beta)}. \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Accelerația de transport este nulă $\bar{a}_t = 0$, căci pana are o mișcare de translație rectilinie și uniformă și cum în acest caz $\bar{\omega} = 0$, accelerația Coriolis este și ea nulă $\bar{a}_c = 0$. Deci în acest caz:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r . \tag{7}$$

Accelerația relativă are direcția BC, iar componentele accelerației absolute pe direcția barei OA și a normalei pe bară sînt:

$$a_{aN} = \omega_2^2 l = \frac{v_1^2 \sin^2 \alpha}{l \cos^2 (\alpha + \beta)} \qquad a_{a\tau} = \dot{\omega}_2 l. \tag{8}$$

Proiectînd relația (7) pe direcția barei și a normalei pe bară avem:

$$\frac{v_1^2 \sin^2 \alpha}{l \cos^2 (\alpha + \beta)} = - a_r \cos (\alpha + \beta)$$

$$\dot{\omega}_2 l = a_r \sin (\alpha + \beta)$$

de unde:

$$a_r = - \frac{v_1^2 \sin^2 \alpha}{l \cos^3 (\alpha + \beta)} \tag{9}$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{- v_1^2 \sin^2 \alpha \sin (\alpha + \beta)}{l^2 \cos^3 (\alpha + \beta)} . \tag{10}$$

17.16. O prismă are o mișcare de translație rectilinie și uniformă cu viteza $\bar{v}_1$ și împinge un disc circular de rază r care se rostogolește pe un plan orizontal (fig. 17.16). Să se determine viteza și accelerația absolută a punctului (de pe disc) de contact A dintre prismă și disc și viteza și accelerația relativă a punctului A față de prismă.

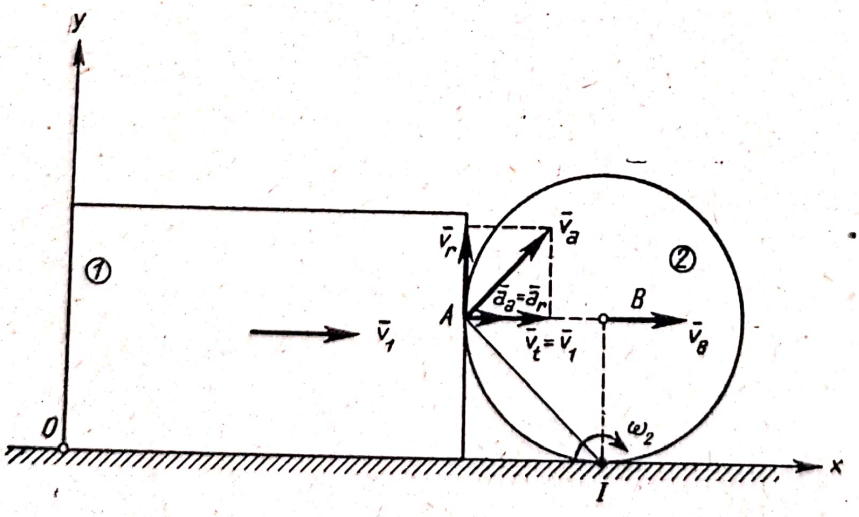


Fig. 17.16

Rezolvare. Viteza relativă a punctului A se găsește pe direcția tangentei la disc în punctul A, viteza de transport este viteza prismei:

$$\bar{v}_t = \bar{v}_1 \tag{1}$$

iar viteza absolută este normală pe dreapta IA și egală conform (16.10) cu:

$$v_a = \omega_2 IA = \omega_2 r \sqrt{2} \tag{2}$$

deoarece discul are o mișcare plan paralelă, centrul instantaneu de rotație al discului fiind în punctul de contact I dintre disc și planul orizontal (ω_2 este viteza unghiulară a discului). Proiectînd relația (17.3):

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$$

Scanned with OKEN Scanner

pe axele Ox și Oy din figură, rezultă:

$$v_a \frac{\sqrt{2}}{2} = v_1$$

$$v_a \frac{\sqrt{2}}{2} = v_r$$

de unde:

$$v_a = \sqrt{2}\, v_1 \qquad v_r = v_1 \tag{3}$$

iar:

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{2}\, v_1}{\sqrt{2}\, r} = \frac{v_1}{r} = \text{const.} \tag{4}$$

Viteza (16.10) a centrului discului B este:

$$v_B = \omega_2 \, IB = \omega_2 \, r = v_1 = \text{const}$$

și cum B are o mișcare rectilinie și uniformă accelerația lui este nulă, punctul B este centrul accelerațiilor. Cum $\omega_2 = 0$ accelerația (16.13) a punctului A este orientată spre B și este egală cu:

$$\bar{a}_a = -\, \omega_2^2 \, \overline{BA}.$$

Accelerația de transport este nulă $\bar{a}_t = 0$ căci prisma are o mișcare de translație rectilinie și uniformă, și cum în acest caz $\bar{\omega} = 0$, accelerația Coriolis este și ea nulă $\bar{a}_c = 0$. Din (17.9) rezultă deci:

$$\bar{a}_r = \bar{a}_a = -\, \omega_2^2 \, \overline{BA} = \omega_2^2 \, r \, \bar{i} = \frac{v_1^2}{r} \bar{i}. \tag{5}$$

17.17. Un excentric de rază R, care se rotește uniform cu viteza unghiulară constantă ω în jurul punctului O_1 acționează un tachet (fig. 17.17 *a*). Cunoscînd distanța $O_1B = e$, să se determine viteza și accelerația tachetului și viteza și accelerația relativă a punctului A de pe tachet în raport cu excentricul (punctul A este punctul de contact dintre tachet și excentric).

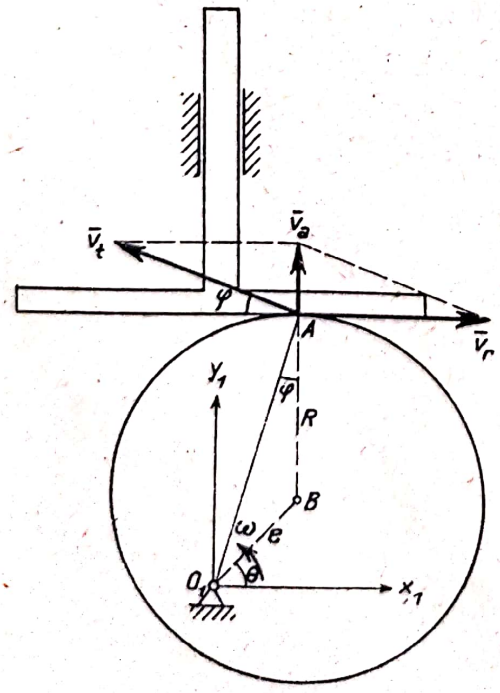


Fig. 17.17 *a*

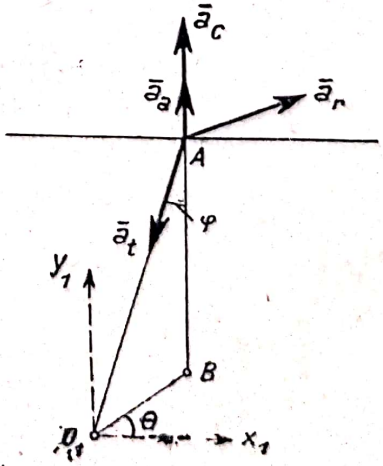


Fig. 17.17 *b*

Rezolvare. Direcția vitezei relative este direcția tangentei în A la excentric:

$$\bar{v}_r = v_r \bar{i}_1; \tag{1}$$

viteza absolută este viteza tachetului care are o mișcare de translație:

$$\bar{v}_a = v_a \bar{j}_1 \tag{2}$$

iar viteza de transport este viteza punctului A al excentricului:

$$v_t = \omega \cdot O_1 A \tag{3}$$

normală pe O_1A. Proiectînd ecuația (17.3):

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t \tag{4}$$

pe axele Ox_1 și Oy_1 avem:

$$0 = v_r - v_t \cos \varphi \qquad v_a = v_t \sin \varphi \tag{5}$$

și cum:

$$O_1A = \sqrt{R^2 + e^2 + 2Re \sin \theta} \qquad \sin \varphi = \frac{e \cos \theta}{\sqrt{R^2 + e^2 + 2Re \sin \theta}}$$

$$\cos \varphi = \frac{R + e \sin \theta}{\sqrt{R^2 + e^2 + 2Re \sin \theta}} \tag{6}$$

obținem:

$$v_t = \omega \sqrt{R^2 + e^2 + 2Re \sin \theta} \qquad \bar{v}_r = \omega (R + e \sin \theta) \bar{i}_1$$

$$\bar{v}_a = \omega e \cos \theta \bar{j}_1. \tag{7}$$

Accelerația absolută (fig. 17.17 *b*) a punctului A de pe tachet (accelerația tachetului) este derivata vitezei absolute:

$$\bar{a}_a = \frac{d\bar{v}_a}{dt} = -\omega^2 e \sin \theta \, j_1. \tag{8}$$

Accelerația de transport este accelerația punctului A al excentricului:

$$\bar{a}_t = -\omega^2 \overline{AO}_1 = -\omega^2 [e \cos \theta \, \bar{i}_1 + (R + e \sin \theta) \bar{j}_1]. \tag{9}$$

Accelerația Coriolis (17.12) este:

$$\bar{a}_c = 2 \bar{\omega} \times \bar{v}_r = 2 \omega \bar{k}_1 \times \omega (R + e \sin \theta) \bar{i}_1 = 2 \omega^2 (R + e \sin \theta) \bar{j}_1. \tag{10}$$

Ținînd seama de relația (17.9):

$$\bar{a}_r = \bar{a}_a - \bar{a}_t - \bar{a}_c = -\omega^2 e \sin \theta \bar{j}_1 + \omega^2 [e \cos \theta \bar{i}_1 + (R + e \sin \theta) \bar{j}_1)] -$$

$$- 2 \omega^2 (R + e \sin \theta) \bar{j}_1$$

deci:

$$\bar{a}_r = \omega^2 e \cos \theta \bar{i}_1 - \omega^2 (R + 2e \sin \theta) \bar{j}_1. \tag{11}$$

Scanned with OKEN Scanner

17.18. În mecanismul cu cilindri rotitori din figura 17.18 *a* blocul motorului cu cilindri se rotește uniform cu viteza unghiulară constantă ω_4 în jurul axului O iar manivela OA ce antrenează bielele AB_1, AB_2 și AB_3 se rotește cu viteza unghiulară constantă ω. Cunoscînd lungimile $OA = r$, $AB_1 = AB_2 = AB_3 = l$, să se determine vitezele și accelerațiile absolute ale articulațiilor B_1, B_2 și B_3 pentru cazul cînd articulația A se află pe direcția OB_1.

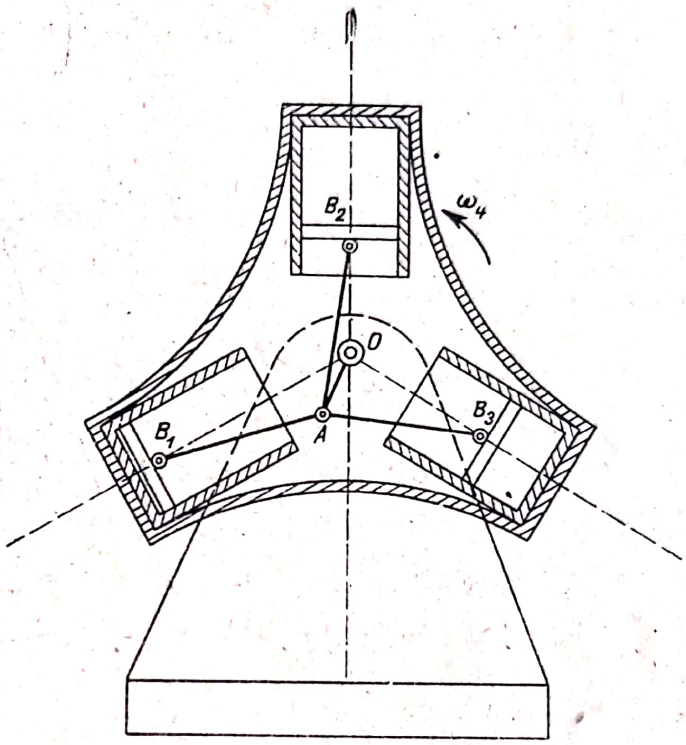


Fig. 17.18 *a*

Rezolvare. Din fig. 17.18 *b* rezultă:

$$OB_1 = r + l$$

$$OB_2 = OB_3 = l\cos\alpha - r\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{4l^2 - 3r^2} - r}{2} \qquad (1)$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}\,r}{2l},$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{4l^2 - 3r^2}}{2l}$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{12l^2 - 9r^2} - \sqrt{3}\,r}{4l} \qquad \cos\beta = \frac{3r + \sqrt{4l^2 - 3r^2}}{4l}. \qquad (2)$$

Vitezele relative ale punctelor B_i în raport cu blocul motor au direcțiile OB_i $(i = 1, 2, 3)$; vitezele de transport ale punctelor B_i, adică vitezele dacă mișcarea relativă a cilindrilor ar înceta, sînt normale pe direcțiile OB_i și egale cu $v_{it} = \omega_4 OB_i$ $(i = 1, 2, 3)$ adică:

$$v_{1t} = \omega_4 (r + l) \qquad v_{2t} = v_{3t} = \frac{\omega_4 (\sqrt{4l^2 - 3r^2} - r)}{2}. \qquad (3)$$

Vitezele absolute (17.3) ale punctelor B_i sînt:

$$\overline{v}_{ia} = \overline{v}_{ir} + \overline{v}_{it} \qquad (i = 1, 2, 3). \qquad (4)$$

Vom aplica teorema proiecțiilor (16.18) pentru punctele A și B_i, proiecțiile vitezelor punctelor A și B_i pe dreapta AB_i fiind egale. Cum viteza punctului A:

$$v_A = r\omega \qquad (5)$$

este normală pe OA, obținem:

$$v_{1r} = 0;\ v_{2t} \sin\alpha + v_{2r} \cos\alpha = v_A \sin\beta;\ v_{3t} \sin\alpha + v_{3r} \cos\alpha = v_A \sin\beta. \quad (6)$$

Din (2), (3), (5) și (6) rezultă:

$$v_{1r} = 0 \qquad v_{2r} = v_{3r} = \frac{\sqrt{3}}{2} r \left(1 - \frac{r}{\sqrt{4l^2 - 3r^2}}\right)(\omega - \omega_4) \quad (7)$$

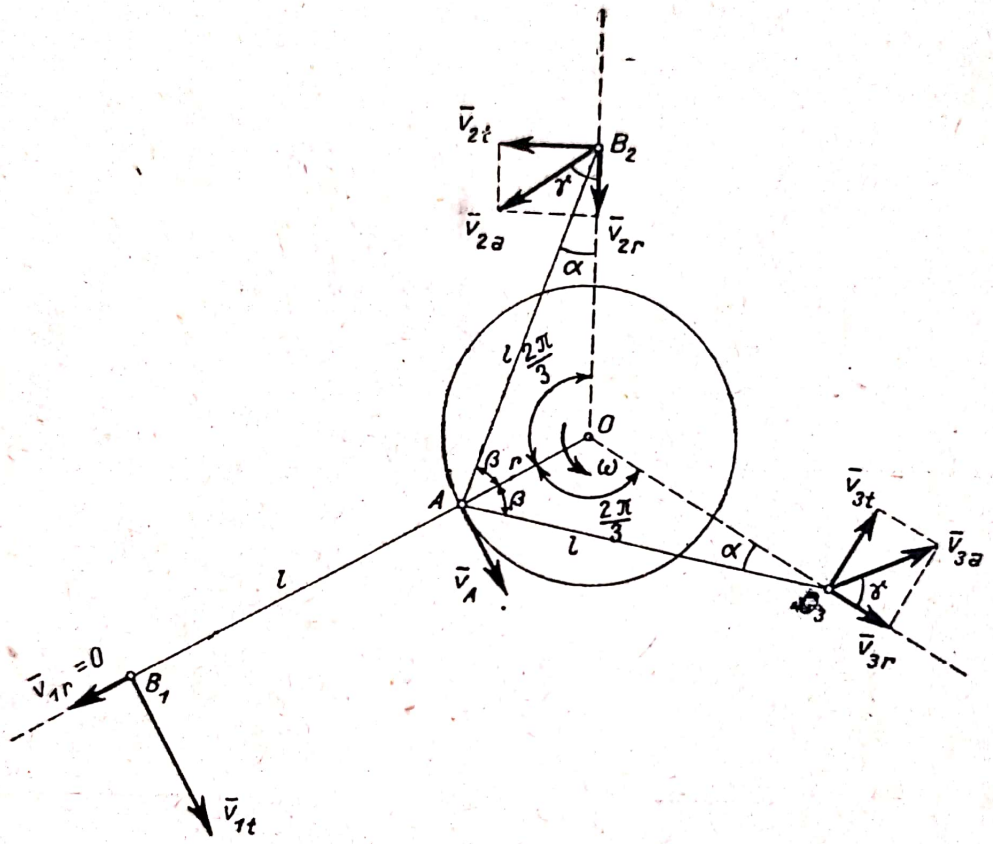


Fig. 17.18 *b*

și deci vitezele absolute sînt:

$$v_{1a} = v_{1t} = \omega_4 (r + l) \qquad v_{2a} = v_{3a} = \sqrt{v_{2r}^2 + v_{2t}^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r}{\sqrt{4l^2 - 3r^2}}\right)^2 \sqrt{3r^2\omega^2 + 4l^2\omega_4^2 - 6r^2\omega\omega_4} \quad (8)$$

viteza $\bar{v}_{1a}$ fiind normală pe OB_1 iar $\bar{v}_{2a}$ și $\bar{v}_{3a}$ formînd unghiul γ cu OB_2 respectiv OB_3 unde:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{v_{2t}}{v_{2r}} = \frac{\sqrt{4l^2 - 3r^2}}{\sqrt{3}r} \cdot \frac{\omega_4}{\omega - \omega_4}. \quad (9)$$

Accelerațiile relative ale punctelor B_i au direcțiile OB_i; accelerațiile de transport au direcțiile OB_i, sensul spre O și sînt egale cu $\bar{a}_{it} = -\omega_4^2 \overline{OB}$ adică:

$$a_{1t} = \omega_4^2 (r + l) \qquad a_{2t} = a_{3t} = \frac{\omega_4^2 (\sqrt{4l^2 - 3r^2} - r)}{2}. \quad (10)$$

Accelerațiile Coriolis (17.12) sînt $\bar{a}_{ic} = 2\,\bar{\omega}_4 \times \bar{v}_{ir}$, adică :

$$a_{1c} = 0 \quad , \quad a_{2c} = a_{3c} = \sqrt{3}\,\omega_4\,(\omega - \omega_4)\,r\left(1 - \frac{r}{\sqrt{4l^2 - 3\,r^2}}\right) \tag{11}$$

direcțiile lor fiind normale pe OB_i (direcțiile vitezelor relative).

Accelerațiile absolute (17.9) ale punctelor B_i sînt:

$$\bar{a}_{ia} = \bar{a}_{ir} + \bar{a}_{it} + \bar{a}_{ic} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).. \tag{12}$$

Însă din (14.2) și (14.3) vitezele și accelerațiile punctelor B_i sînt:

$$\bar{v}_{ia} = \bar{v}_A + \bar{\omega}_i \times \overline{AB}_i \qquad \bar{a}_{ia} = \bar{a}_A + \dot{\bar{\omega}}_i \times \overline{AB}_i - \omega_i^2\,\overline{AB}_i \tag{13}$$

unde $\bar{\omega}_i$ și $\dot{\bar{\omega}}_i$ sînt viteza și accelerația unghiulară a barei AB_i iar:

$$\bar{a}_A = -\,\omega^2\,\overline{OA} \qquad a_A = \omega^2 r. \tag{14}$$

Proiectînd expresiile (12) și (13) ale accelerațiilor $\bar{a}_{ia}$ pe direcțiile AB_i putem determina accelerațiile relative $\bar{a}_{ir}$ (fig. 17.18 *c* și *d*):

$$\begin{aligned} a_{1a} &= a_{1r} + a_{1t} = a_A + \omega_1^2\,l \\ (-\,a_{2r} + a_{2t})\cos\alpha - a_{2c}\sin\alpha &= -\,a_A\cos\beta + \omega_2^2\,l \\ (-\,a_{3r} + a_{3t})\cos\alpha - a_{3c}\sin\alpha &= -\,a_A\cos\beta + \omega_3^2\,l. \end{aligned} \tag{15}$$

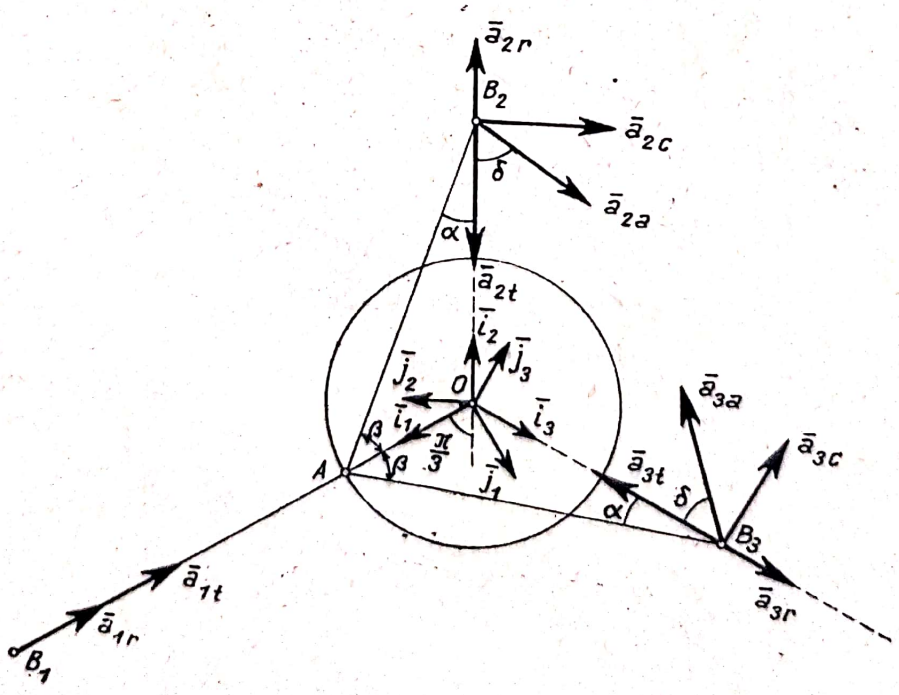


Fig. 17.18 *c*

Pentru a determina vitezele unghiulare ω_i proiectăm expresiile (4) și (13) ale vitezelor $\bar{v}_{iA}$ pe direcțiile normale pe OB_i (fig. 17.18 *b* și *d*):

$$v_{1t} = v_A + \omega_1 l \qquad v_{2t} = -v_A \cos\frac{\pi}{3} + \omega_2 l \cos\alpha$$
$$v_{3t} = -v_A \cos\frac{\pi}{3} + \omega_3 l \cos\alpha. \tag{16}$$

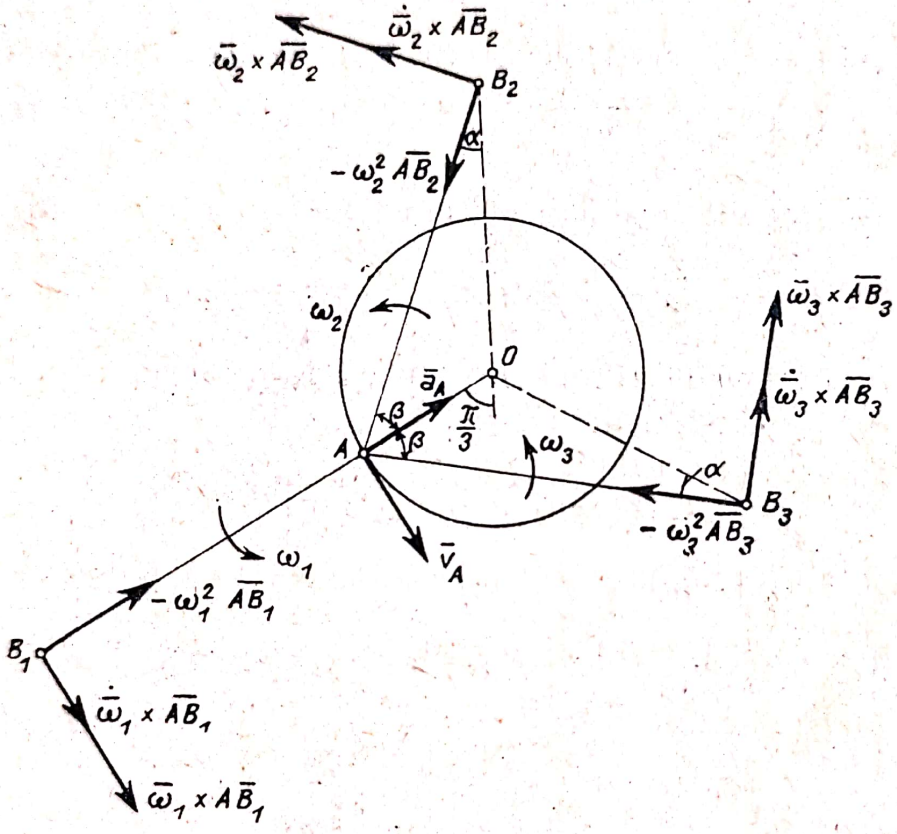


Fig. 17.18 *d*

Din (2), (3), (5) și (16) rezultă:

$$\omega_1 = \omega_4 - \frac{r}{l}(\omega - \omega_4) \qquad \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 + \frac{r}{\sqrt{4l^2 - 3r^2}}(\omega - \omega_4) \tag{17}$$

Înlocuind în (15) și ținînd seama de (2), (10), (11), (14) și (17) obținem:

$$a_{1r} = \frac{r(l+r)}{l}(\omega - \omega_4)^2;\ a_{2r} = a_{3r} = \frac{r}{2}\left[1 + \frac{r(8l^2 - 9r^2)}{(4l^2 - 3r^2)^{3/2} l}\right](\omega - \omega_4)^2. \tag{18}$$

Notînd cu $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ versorii direcțiilor OB_1, OB_2, OB_3 și cu $\bar{j}_1, \bar{j}_2, \bar{j}_3$ versorii normalelor la OB_i (fig. 17.18 *c*) avem:

$$a_{1a} = -(a_{1r} + a_{1t})\,\bar{i}_1 = -(r + l)\left[\omega_4^2 + \frac{r}{l}(\omega - \omega_4)^2\right]\bar{i}_1$$

$$\bar{a}_{\lambda a} = (a_{\lambda r} - a_{\lambda t})\,\bar{i}_\lambda \mp a_{\lambda c}\bar{j}_\lambda = \left\{\left[\frac{r}{2} + \frac{r^2(8l^2 - 9r^2)}{2(4l^2 - 3r^2)^{3/2}}\right](\omega - \omega_4)^2 - \right. \tag{19}$$

$$\left. - \frac{(4l^2 - 3r^2)^{1/2} - r}{2}\omega_4^2\right\}\bar{i}_\lambda \mp \sqrt{3}\,r\left[1 - \frac{r}{(4l^2 - 3r^2)^{1/2}}\right]\omega_4(\omega - \omega_4)\bar{j}_\lambda \quad (\lambda = 2,3)$$

semnul — luîndu-se pentru $\lambda = 2$ iar semnul + pentru $\lambda = 3$.
Modulul acceleraţiilor absolute ale punctelor B_2 şi B_3 se poate determina din relaţia :

$$a_{2a} = a_{3a} = \sqrt{(a_{2t} - a_{2r})^2 + a_{2c}^2} \tag{20}$$

iar unghiul δ dintre $\bar{a}_{2a}$ sau $\bar{a}_{3a}$ şi OB_2 sau OB_3 este dat de :

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{a_{2c}}{a_{2t} - a_{2r}}. \tag{21}$$

Putem determina şi acceleraţiile unghiulare $\dot{\omega}_i$ ale bielelor AB_i proiectînd expresiile (13) şi (19) ale acceleraţiei pe o direcţie diferită de AB_i. Astfel de exemplu pentru acceleraţia $\dot{\omega}_1$ proiectînd acceleraţia pe direcţia normală la AB_1 avem $0 = \dot{\omega}_1 l$ de unde:

$$\dot{\omega}_1 = 0.$$

Lăsăm pe seama cititorului determinarea acceleraţiilor unghiulare $\dot{\omega}_2$ şi $\dot{\omega}_3$.

17.19. O camă are o mişcare de translaţie rectilinie şi uniformă cu viteza v_0. Să se afle ecuaţia conturului camei $y = y(x)$ astfel ca tija O_1A de lungime l care se sprijină pe camă să se rotească uniform cu viteza unghiulară ω_1.

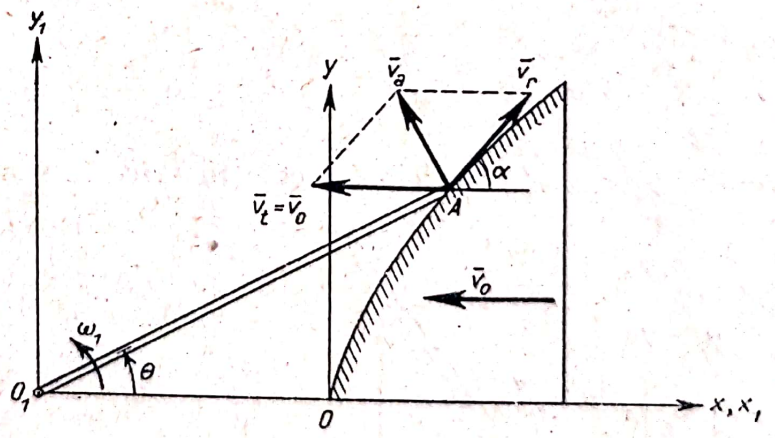


Fig. 17.19 *a*

Rezolvare. Să determinăm relaţia dintre ω_1 şi v_0.
Mişcarea absolută a punctului A este o mişcare circulară în jurul punctului O_1 deci :

$$v_a = \omega_1 l. \tag{1}$$

Viteza relativă a punctului A faţă de camă este tangentă la profilul camei (fig. 17.19 *a*). Viteza de transport a punctului A este viteza camei:

$$\bar{v}_t = \bar{v}_0. \tag{2}$$

Proiectînd relaţia (17.3) $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$ pe axele triedrului Oxy avem:

$$v_r\cos\alpha - v_t = -v_a\sin\theta \qquad v_r\sin\alpha = v_a\cos\theta \tag{3}$$

unde unghiul de înclinare θ al barei O_1A față de orizontală și direcția tangentei la profilul camei sînt date de:

$$\sin\theta = \frac{y}{l} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}. \tag{4}$$

Din (1), (2) și (3) rezultă:

$$v_r = \frac{v_0\cos\theta}{\cos(\alpha-\theta)} \qquad \omega_1 = \frac{v_0\sin\alpha}{l\cos(\alpha-\theta)} \tag{5}$$

sau ținînd seama de (4):

$$\omega_1 = \frac{v_0}{l}\cdot\frac{1}{\cos\theta\operatorname{ctg}\alpha+\sin\theta} = \frac{v_0}{\frac{dx}{dy}\sqrt{l^2-y^2}+y}. \tag{6}$$

Separînd variabilele x și y în ecuația diferențială (6):

$$dx = \frac{v_0-\omega_1 y}{\omega_1\sqrt{l^2-y^2}}\,dy \tag{7}$$

integrînd și ținînd seama de condiția $x=0,\ y=0$:

$$x = \frac{v_0}{\omega_1}\operatorname{arc\,sin}\frac{y}{l} + \sqrt{l^2-y^2} - l. \tag{8}$$

Relațiile stabilite mai sus sînt valabile pentru $\alpha > \theta$. Pentru $\alpha > \frac{\pi}{2}$ cum $\theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\alpha > \theta$. Pentru $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ va trebui ca $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\theta$ adică:

$$\frac{\omega_1\sqrt{l^2-y^2}}{v_0-\omega_1 y} > \frac{y}{\sqrt{l^2-y^2}}$$

de unde:

$$y \leqslant \frac{\omega_1 l^2}{v_0}. \tag{9}$$

Pentru $v_0 < l\omega_1$ condiția (9) este în orice caz îndeplinită căci $y < l$.

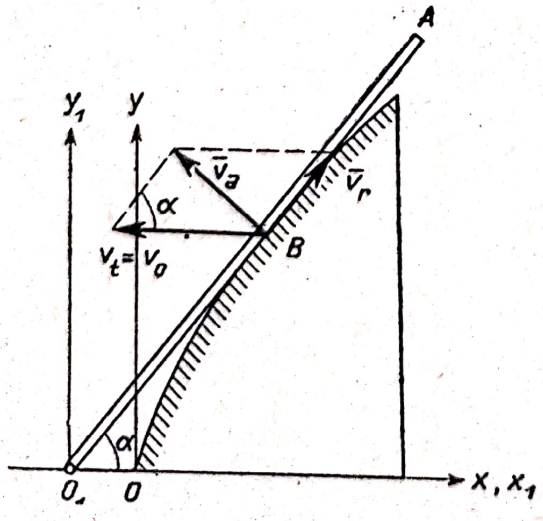


Fig. 17.19 *b*

Dacă $v_0 > l\omega_1$ și $y > \frac{\omega_1 l^2}{v_0}$ bara și profilul camei sînt tangente într-un punct B (fig. 17.19*b*) în acest caz $\theta = \alpha$, iar:

$$v_a = \omega_1 O_1B = \omega_1\frac{y}{\sin\alpha}. \tag{10}$$

Din ecuațiile (3) obținem:

$$v_r = v_0\cos\alpha; \qquad v_a = v_0\sin\alpha \tag{11}$$

deci:

$$\omega_1 = \frac{v_0\sin^2\alpha}{y} = \frac{v_0}{y}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}. \tag{12}$$

Separînd variabilele în ecuația diferențială (12):

$$dx = \sqrt{\frac{v_0 - \omega_1 y}{\omega_1 y}}\, dy \tag{13}$$

integrînd și punînd condiția $x = 0,\ y = 0$ rezultă:

$$x = -\frac{v_0}{\omega_1} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{v_0}{\omega_1 y} - 1} + y \sqrt{\frac{v_0}{\omega_1 y} - 1} + \frac{v_0 \pi}{2\,\omega_1}. \tag{14}$$

Deci ecuația profilului camei va fi dată de ecuația (8) pentru $v_0 < l\omega_1$ și $v_0 > l\omega_1,\ y \leqslant \frac{\omega_1 l^2}{v_0}$ și de ecuația (14) pentru $v_0 > l\omega_1,\ y > \frac{\omega_1 l^2}{v_0}$.

17.20. O placă are o mișcare plan paralelă. Să se arate că baza și rostogolitoarea sînt tangente și că accelerația centrului instantaneu al plăcii este:

$$a_I = \overline{V} \times \overline{\omega} \tag{16.16}$$

unde $\overline{V}$ este viteza centrului instantaneu în mișcarea sa pe bază sau pe rostogolitoare.

Rezolvare. Vom considera mișcarea centrului instantaneu față de un sistem fix $O_1 x_1 y_1$ (mișcarea absolută) și mișcarea lui relativă față de un sistem Oxy solidar cu placa. Mișcarea de transport va fi mișcarea punctului I al plăcii, deci conform (16.6) viteza lui de transport este nulă:

$$\overline{v}_t = \overline{v}_I = \dot{\overline{r}}_0 + \overline{\omega} \times \overline{\rho} = 0 \tag{1}$$

iar accelerația de transport va fi accelerația centrului instantaneu considerat ca invariabil legat de placă:

$$\overline{a}_t = \overline{a}_I. \tag{2}$$

S-au notat cu $\overline{\rho}_1$ și $\overline{\rho}$ vectorii de poziție ai centrului instantaneu față de O_1 și O, iar $\overline{r}_0 = \overline{O_1 O}$ (fig. 17.20).

Ținînd seama de (17.3) viteza relativă $\overline{v}_r = \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t}$ și viteza absolută $\overline{v}_a = \frac{d\overline{\rho}_1}{dt}$ sînt egale:

$$\overline{v}_a = \overline{v}_r = \overline{V} \qquad \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} = \frac{d\overline{\rho}_1}{dt}. \tag{3}$$

Vitezele $\overline{v}_a$ și $\overline{v}_r$ fiind tangente în I la bază respectiv la rostogolitoare, baza și rostogolitoarea sînt tangente.

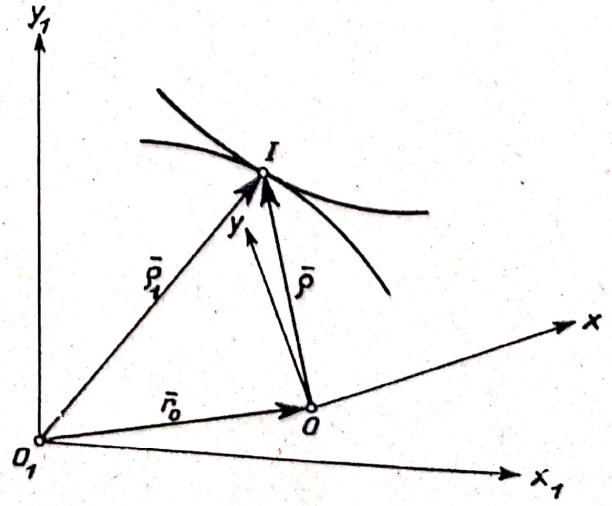


Fig. 17.20

Accelerația relativă este:

$$a_r = \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial t} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \tag{4}$$

iar accelerația absolută este:

$$a_a = \frac{d\bar{v}_a}{dt} = \frac{d\bar{V}}{dt}. \tag{5}$$

Însă conform (17.14):

$$\bar{a}_a = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{V}. \tag{6}$$

Accelerația Coriolis (17.12) este:

$$\bar{a}_c = 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 2\,\bar{\omega} \times \bar{V}. \tag{7}$$

Din relația (17.9) avem:

$$\bar{a}_t = \bar{a}_a - \bar{a}_r - \bar{a}_c \tag{8}$$

deci:

$$\bar{a}_I = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{V} - \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} - 2\,\bar{\omega} \times \bar{V} = \bar{V} \times \bar{\omega} \tag{16.16}$$

ceea ce trebuie demonstrat.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

17.21. Sub ce unghi α de înclinare față de verticală trebuie să țină umbrela un pieton care merge cu viteza v_1 dacă picăturile cad pe verticală cu viteza v_2 și lovesc normal umbrela. Care este viteza relativă a picăturilor față de umbrelă?

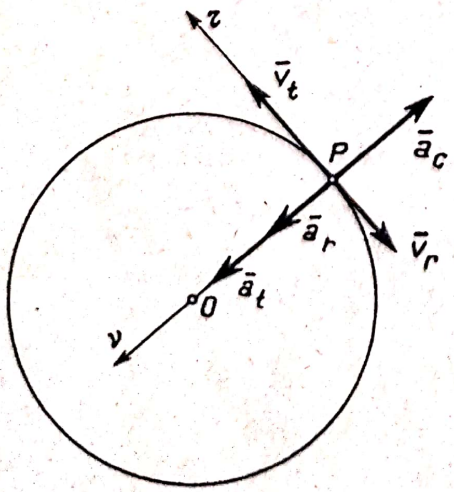


Fig. 17.22

Răspuns. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_1}{v_2}$ $\quad v_r = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

17.22. Un punct se mișcă uniform pe un cerc de rază r în sensul acelor de ceasornic cu viteza unghiulară ω_1, cercul se rotește în același timp în jurul centrului său în sens trigonometric cu viteza unghiulară ω_2. Să se determine vitezele relativă, de transport și absolută și accelerațiile relativă, de transport, Coriolis și absolută ale punctului.

Scanned with OKEN Scanner

Răspuns. $v_r = -\omega_1 r\bar{\tau}$, $\bar{v}_t = \omega_2 r\bar{\tau}$, $\bar{v}_a = (\omega_2 - \omega_1) r\bar{\tau}$, $\bar{a}_r = \omega_1^2 r\bar{\nu}$, $a_t = \omega_2^2 r\nu$, $\bar{a}_c = -2\omega_1\omega_2 r\nu$, $\bar{a}_a = (\omega_2 - \omega_1)^2 r\nu$ (v. orientarea axelor $P\tau$, $P\nu$ în figura 17.22).

17.23. Dreapta AB are o mișcare de translație rectilinie și uniformă cu viteza $\bar{v}_1$ normală pe AB în planul unui cerc de rază r. Să se determine vitezele și accelerațiile absolută și relativă (față de bară) ale punctului P de intersecție al cercului cu dreapta AB.

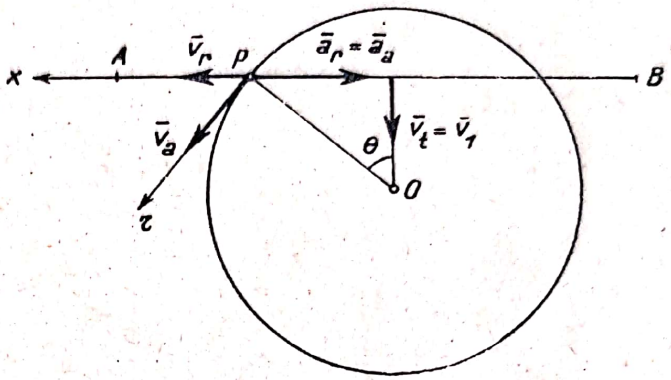


Fig. 17.23

Răspuns. $\bar{v}_a = \dfrac{v_1}{\sin\theta}\bar{\tau}$, $\bar{v}_r = v_1 \operatorname{ctg}\theta\,\bar{i}$, $\bar{a}_a = \bar{a}_r = -\dfrac{v_1^2}{r\sin^3\theta}\bar{i}$ (v. orientarea axelor Px și $P\tau$ în figura 17.23).

17.24. Un tub rectiliniu se rotește într-un plan în jurul capătului său O cu viteza unghiulară constantă ω. O sferă P care se află în tub se mișcă după legea $OP = r = r_0 \operatorname{ch}\omega t$. Să se determine viteza și accelerația absolută a punctului.

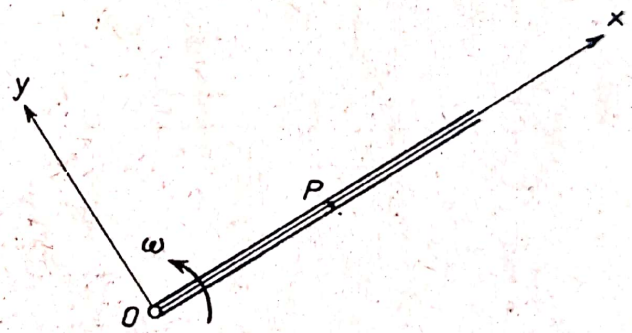


Fig. 17.24

Răspuns. $\bar{v}_a = r_0\omega \operatorname{sh}\omega t\,\bar{i} + r_0\omega \operatorname{ch}\omega t\,\bar{j}$, $\bar{a}_a = 2r_0\omega^2 \operatorname{sh}\omega t\,\bar{j}$ (axele Ox și Oy sînt orientate ca în figura 17.24).

17.25. O placă circulară care se rotește cu viteza unghiulară ω_1 este șlefuită cu ajutorul unui polizor a cărui piatră are raza r și care se rotește cu viteza unghiulară ω_2 și avansează cu viteza v_2 către centrul plăcii. Să se determine viteza cu care este șlefuită placa (viteza relativă a punctului P de contact dintre piatra de polizor și placă față de placă) și accelerația relativă a punctului P.

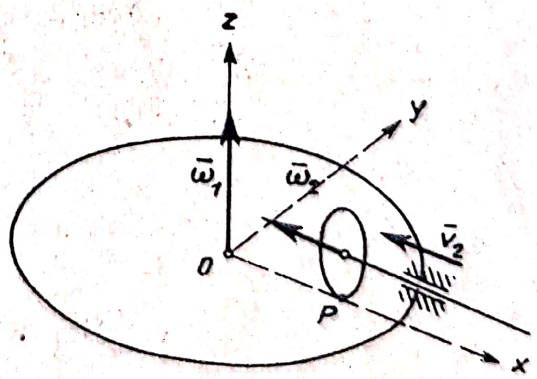


Fig. 17.25

Răspuns. $\bar{v}_r = -v_2\bar{i} - (\omega_1 x + \omega_2 r)\bar{j}$ $\bar{a}_r = (-\omega_1^2 x - 2\omega_1\omega_2 r)\bar{i} + 2\omega_1 v_2\bar{j} + \omega_2^2 r\bar{k}$ unde $x = OP$ iar axele sînt alese ca în figura 17.25.

Scanned with OKEN Scanner

17.26. În mecanismul din figura 17.26 culisa B se deplasează în locașul său cu viteza v_1. Să se determine viteza unghiulară ω de rotație a barei AB față de articulația A.

Răspuns. $\omega = \dfrac{v_1 \cos^2 \alpha}{l}$.

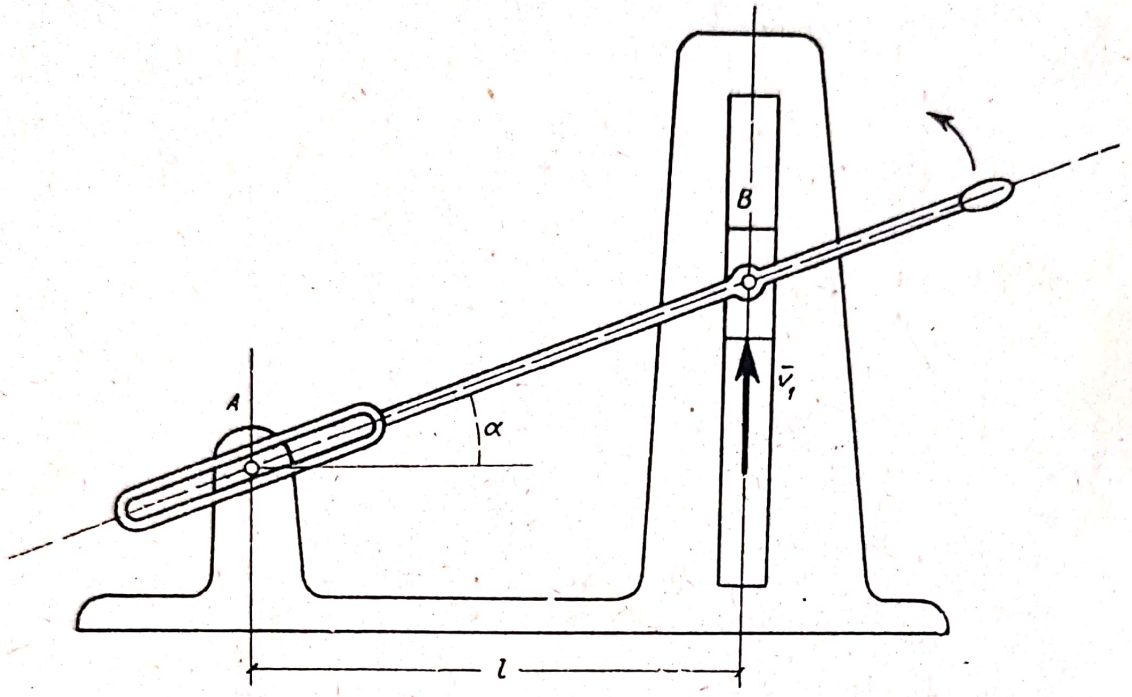


Fig. 17.26

Capitolul XVIII

MIȘCAREA RELATIVĂ A SOLIDULUI

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Fie T_0 $(Ox_0y_0z_0)$ un triedru fix și T_i $(O_ix_iy_iz_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ n triedre mobile, triedrul T_n fiind solidar legat de corpul a cărui mișcare o studiem. Dacă $\bar{v}_i$ și $\bar{\omega}_i$ sînt viteza punctului O_i și viteza unghiulară a triedrului T_i în mișcarea relativă față de triedrul T_{i-1} și dacă $\bar{r}_i$ este vectorul de poziție al punctului P al solidului față de triedrul T_i (fig. 18. *a*), atunci viteza punctului P față de triedrul fix T_0 este:

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{\omega}_i \times \bar{r}_i . \tag{18.1}$$

Cazuri particulare

1° *Compuneri de translații.* Dacă toate mișcările relative ale triedrelor au la un moment dat distribuții de viteze caracteristice translațiilor, atunci $\bar{\omega}_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ iar:

$$\bar{v} = \Sigma \bar{v}_i \tag{18.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

deci mișcarea rezultantă are o distribuție de viteze caracteristică translației.

2° *Compuneri de rotații concurente.* Dacă toate mișcările relative ale triedrelor au distribuții de viteze caracteristice rotațiilor, iar originile triedrelor se găsesc pe axele de rotație și coincid în O, atunci $\bar{v}_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ și $\bar{r}_1 = \bar{r}_2 = \ldots = \bar{r}_n = \bar{r}$ iar:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \qquad (18.3)$$

unde s-a notat cu:

$$\bar{\omega} = \Sigma\, \bar{\omega}_i . \qquad (18.4)$$

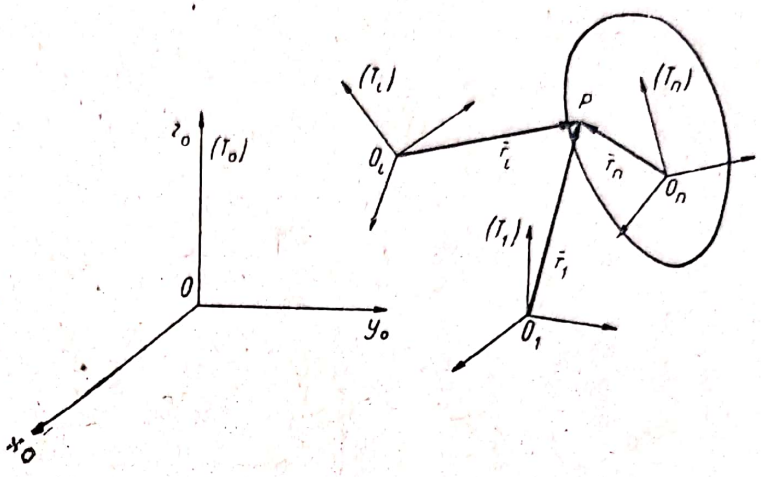


Fig. 18.a

Mișcarea rezultantă este o rotație instantanee a cărei axă trece prin O și a cărei viteză unghiulară instantanee este egală cu suma vectorială a vitezelor unghiulare instantanee ale mișcărilor componente.

3° *Compuneri de rotații paralele.* Dacă toate mișcările relative ale triedrelor au distribuții de viteze caracteristice mișcărilor de rotație iar originile triedrelor se găsesc pe axele instantanee de rotație, paralele între ele, versorul direcției lor fiind $\bar{u}$ atunci $\bar{v}_i = 0$, $\bar{\omega}_i = \omega_i \bar{u}$, $(i = 1, \ldots, n)$ iar:

$$\bar{\omega} = (\Sigma \omega_i)\, \bar{u} \qquad (18.5)$$

Dacă $\Sigma\, \omega_i \neq 0$:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{\rho} \qquad (18.6)$$

unde:

$$\bar{\rho} = \frac{\Sigma\, \omega_i \bar{r}_i}{\Sigma\, \omega_i} . \qquad (18.7)$$

Mișcarea rezultantă are o distribuție de viteze caracteristică rotației, axa instantanee trecînd prin centrul vectorilor paraleli $\bar{\omega}_i$ (18.7), iar viteza unghiulară instantanee $\bar{\omega}$ fiind egală cu suma vitezelor unghiulare $\bar{\omega}_i$ (18.5).

Dacă $\Sigma \omega_i = 0$ mișcarea rezultantă are o distribuție de viteze caracteristică translației, viteza fiecărui punct fiind:

$$\bar{v} = \Sigma\, \omega_i \bar{u} \times \bar{r}_i = \bar{u} \times \Sigma\, \omega_i \bar{r}_i . \qquad (18.8)$$

4° În *cazul general de compunere*, vitezele $\bar{v}$ și $\bar{v}_0$ ale punctelor P și O ale solidului sînt legate de relația:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} \qquad (18.9)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde :

$$\bar{\omega} = \Sigma\, \bar{\omega}_i \tag{18.4}$$

iar $\bar{r} = \overline{OP}$. Se pot ivi următoarele cazuri:

a) $\bar{\omega} = 0,\ \bar{v}_0 = 0$ — rigidul este în repaus;

b) $\bar{\omega} = 0,\ \bar{v}_0 \neq 0$ — translație instantanee de viteză $\bar{v}_0$

c) $\bar{\omega} \neq 0,\ \bar{\omega} \cdot \bar{v}_0 = 0$ — rotație instantanee de viteză unghiulară $\bar{\omega}$ trecînd prin punctul C de vector de poziție:

$$\overline{OC} = \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_0}{\omega^2} \tag{18.10}$$

d) $\bar{\omega} \neq 0,\ \bar{v}_0 \neq 0,\ \bar{\omega} \cdot \bar{v}_0 \neq 0$ mișcarea elicoidală instantanee cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ și viteza în lungul axei elicoidale instantanee:

$$v_\omega = \frac{\bar{v}_0 \cdot \bar{\omega}}{|\omega|} \qquad \bar{v}_\omega = \frac{(\bar{v}_0 \cdot \bar{\omega})\,\bar{\omega}}{\omega^2} \tag{18.11}$$

axa trecînd prin punctul C avînd vectorul de poziție dat de (18.10).

Accelerația punctului P este:

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \tag{18.12}$$

unde $\bar{a}_0$, accelerația unui punct O al solidului, se determină folosind metodele de la mișcarea relativă a punctului (cap. XVII). Viteza unghiulară $\bar{\omega} = \Sigma\, \bar{\omega}_i$ (18.4) iar accelerația unghiulară :

$$\dot{\bar{\omega}} = \Sigma\, \dot{\bar{\omega}}_i + \dot{\bar{\omega}}_c = \Sigma\, \dot{\bar{\omega}}_i + \sum_{j<i} \Sigma\, \bar{\omega}_j \times \bar{\omega}_i \tag{18.13}$$

$\dot{\bar{\omega}}_i$ fiind accelerația unghiulară relativă a triedrului T_i iar în expresia accelerației unghiulare complementare:

$$\dot{\bar{\omega}}_c = \sum_{j<i} \Sigma\, \bar{\omega}_j \times \bar{\omega}_i \tag{18.14}$$

se însumează toate produsele vectoriale între vitezele unghiulare astfel încît primul factor să aibă indicele inferior celui de-al doilea.

Cazuri particulare

1° Distribuții de accelerații caracteristice *translației* $\bar{\omega}_i = 0,\ \dot{\bar{\omega}}_i = 0$. Rezultă $\bar{\omega} = 0,\ \dot{\bar{\omega}} = 0$ deci:

$$\bar{a} = \bar{a}_0 = \Sigma\, \bar{a}_i \tag{18.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\bar{a}_i$ este accelerația originii triedrului T_i față de triedrul T_{i-1}.

2° Compuneri de *rotații concurente* în O atunci $\bar{a}_i = 0$.

$$\bar{a}_0 = 0. \tag{18.16}$$

3° Dacă mișcările componente sînt *mișcări plan-paralele* (axa Oz normală pe planul fix) $\bar{\omega}_i = \omega_i \bar{k}$, $\dot{\bar{\omega}}_i = \dot{\omega}_i \bar{k}$, $\dot{\bar{\omega}}_c = 0$ deci:

$$\bar{\omega} = (\Sigma \omega_i)\, \bar{k} \qquad \dot{\bar{\omega}} = \Sigma \dot{\bar{\omega}}_i = (\Sigma \dot{\omega}_i)\, \bar{k}. \tag{18.17}$$

B. PROBLEME REZOLVATE

18.1. Un pod rulant se deplasează pe șine cu viteza $\bar{v}_1$. Căruciorul macaralei se deplasează pe pod cu viteza $\bar{v}_2$ și ridică sarcina în sus cu viteza $\bar{v}_3$ (fig. 18.1). Să se determine viteza $\bar{v}$ a sarcinii. Aplicație numerică: $v_1 = 2$ m/s, $v_2 = 0{,}5$ m/s, $v_3 = 0{,}4$ m/s.

Rezolvare. Podul rulant *1* are o mișcare de translație cu viteza $\bar{v}_1$, mișcarea relativă a căruciorului *2* față de podul rulant este o translație cu viteza $\bar{v}_2$, iar mișcarea relativă a sarcinii *3* față de cărucior este o translație cu viteza $\bar{v}_3$. Deci și mișcarea absolută a sarcinii este o mișcare de translație. Viteza absolută a sarcinii va fi conform (18.2):

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 \tag{1}$$

adică:

$$\bar{v} = v_1 \bar{i} + v_2 \bar{j} + v_3 \bar{k},$$

triedrul $Oxyz$ fiind ales ca în figură.

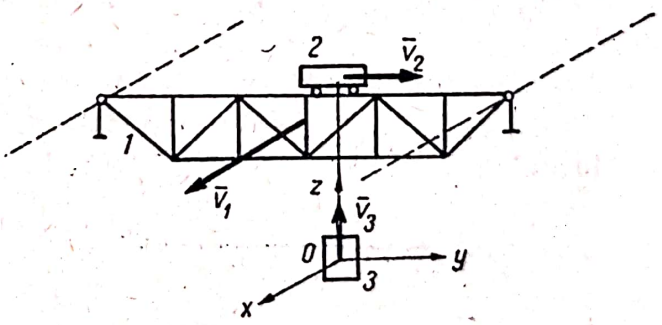


Fig. 18.1

Modulul vitezei este:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{2^2 + 0{,}5^2 + 0{,}4^2} = 2{,}1 \text{ m/s}$$

iar cosinusurile directoare ale direcției ei sînt:

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{v} = \frac{20}{21} \qquad \cos\beta = \frac{v_2}{v} = \frac{5}{21} \qquad \cos\gamma = \frac{v_3}{v} = \frac{4}{21}.$$

18.2. O bară *2* care se poate deplasa într-un ghidaj vertical se reazemă pe o pană *1* care are o mișcare de translație pe un plan orizontal cu viteza $\bar{v}_1$ și accelerația $\bar{a}_1$ (fig. 18.2 *a*). Cunoscînd unghiul de înclinare α al penei să se determine viteza $\bar{v}$ și accelerația absolută $\bar{a}$ a barei și vitezei $\bar{v}_2$ și accelerația relativă $\bar{a}_2$ a barei față de pană.

Rezolvare. Mişcarea relativă a barei faţă de pană este o translaţie rectilinie avînd direcţia liniei de cea mai mare pantă a planului înclinat (al penei), iar mişcarea absolută a barei este o translaţie rectilinie pe verticală. Conform (18.2) şi (18.15) :

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \qquad \bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 \qquad (1)$$

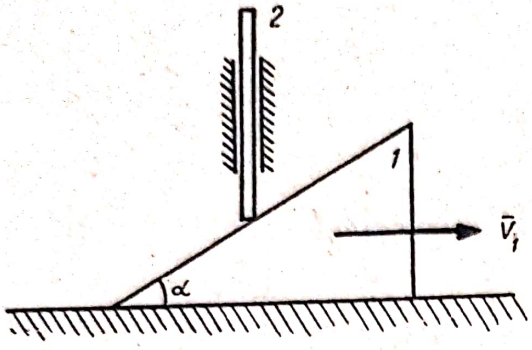


Fig. 18.2 *a*

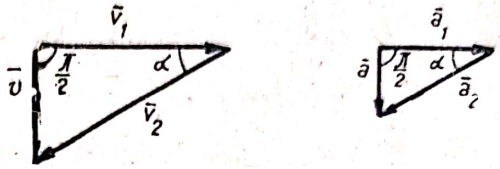


Fig. 18.2 *b*

şi din triunghiul vectorilor viteză şi acceleraţie (fig. 18.2 *b*) rezultă:

$$v = v_1 \operatorname{tg} \alpha \qquad a = a_1 \operatorname{tg} \alpha \qquad v_2 = \frac{v_1}{\cos \alpha} \qquad a_2 = \frac{a_1}{\cos \alpha}. \qquad (2)$$

18.3. O pană triunghiulară cu unghiurile la bază egale cu α este aşezată între corpurile A şi A' care au mişcări de translaţie pe un plan orizontal cu vitezele $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}'_1$ (fig. 18.3 *a*). Să se determine mişcarea penei.

Rezolvare. Mişcările relative ale penei faţă de corpurile A şi A' sînt mişcări de translaţie rectilinie avînd direcţiile feţelor BC şi BC' ale penei. Deci şi mişcarea absolută a penei este o mişcare de translaţie.

Notînd cu $\bar{v}_2$ şi $\bar{v}'_2$ vitezele relative ale penei faţă de corpurile A şi A' conform (18.2) viteza absolută a penei este :

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{v}'_1 + \bar{v}'_2.$$

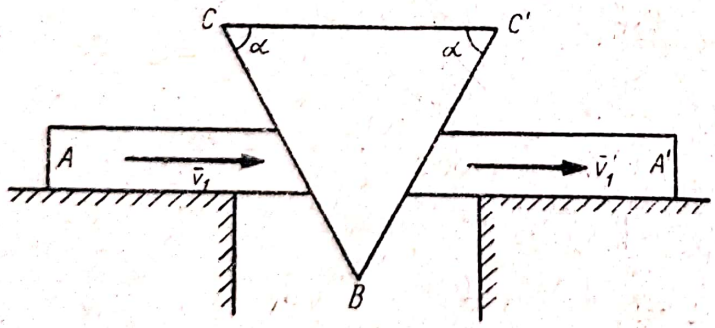


Fig. 18.3 *a*

În poligonul vectorilor viteză (fig. 18.3 *b*) s-au reprezentat vitezele $\bar{v}_1 = \overline{Oa}$, $\bar{v}'_1 = \overline{Oa'}$, $\bar{v}_2 = \overline{ab}$, $\bar{v}'_2 = \overline{a'b}$, $\bar{v} = \overline{Ob}$. Obţinem :

$$v_2 = v'_2 = \frac{a'a}{2 \cos \alpha} = \frac{v_1 - v'_1}{2 \cos \alpha} \qquad (1)$$

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2 \cos \alpha} = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_1'^2 + 2 v_1 v'_1 \cos 2\alpha}}{2 \cos \alpha} \qquad (2)$$

unghiul β dintre $\bar{v}$ şi orizontală fiind dat de:

$$\sin \beta = \frac{v_2 \sin \alpha}{v} = \frac{(v_1 - v'_1) \sin \alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_1'^2 + 2 v_1 v'_1 \cos 2\alpha}}. \qquad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă corpurile A și A' au aceeași viteză $\bar{v}_1 = \bar{v}_1'$, $\bar{v}_2 = \bar{v}_2' = 0$ iar $\bar{v} = \bar{v}_1$ pana nu are mișcare relativă față de corpurile A și A' și se deplasează cu viteza comună a celor două corpuri.

Dacă $\bar{v}_1' = -\bar{v}_1$ atunci $v_2 = v_2' = \frac{v_1}{\cos\alpha}$,

$v = v_1 \operatorname{tg}\alpha$ iar $\beta = \frac{\pi}{2}$ pana avînd o mișcare pe verticală.

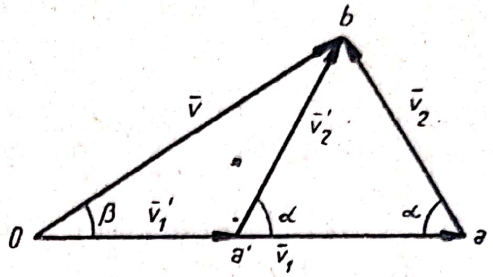


Fig. 18.3 *b*

18.4. Un con avînd unghiul la vîrf 2α și înălțimea h se rostogolește pe un plan orizontal. Știind că axa conului are o mișcare de rotație uniformă cu viteza unghiulară ω_1 în jurul verticalei Oz ce trece prin vîrful O al conului, să se determine viteza unghiulară instantanee a conului $\bar{\omega}$ și vitezele și accelerațiile punctelor A, B și C (fig. 18.4 *a*).

Rezolvare. Mișcarea relativă a conului față de axa lui OC este o rotație de viteză unghiulară $\bar{\omega}_2$, axa OC se rotește cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ în jurul

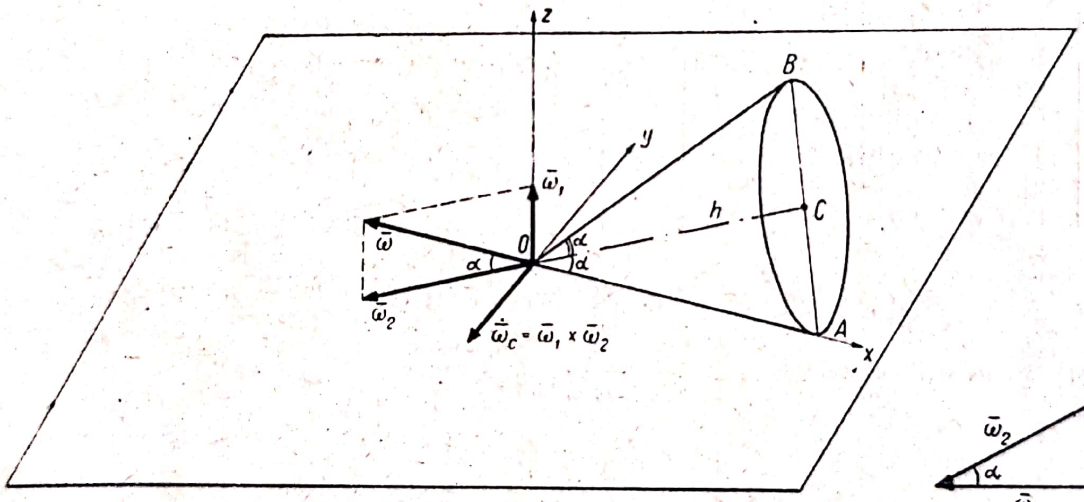


Fig. 18.4 *a*

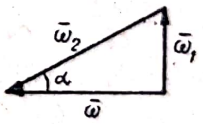


Fig. 18.4 *b*

axei Oz, mișcarea absolută a conului este o rotație instantanee în jurul generatoarei de contact OA (axa instantanee de rotație). Sîntem în cazul compunerii a două rotații concurente conform (18.4), viteza unghiulară a conului este:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 . \tag{1}$$

Din triunghiul vitezelor unghiulare (fig. 18.4 *b*) rezultă:

$$\omega = \omega_1 \operatorname{ctg}\alpha \qquad \omega_2 = \frac{\omega_1}{\sin\alpha} \tag{2}$$

sau :

$$\bar{\omega} = -\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha\, \bar{i} \qquad \bar{\omega}_1 = \omega_1 \bar{k} \qquad \bar{\omega}_2 = -\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha\, \bar{i} - \omega_1 \bar{k} \tag{3}$$

unde axele $Oxyz$ au fost alese ca în figura 18.4 *a* (axa Ox pe direcția OA, Oy normala pe OA în planul orizontal și Oz verticala).

Accelerația unghiulară (18.13) a conului este:

$$\dot{\bar{\omega}} = \dot{\bar{\omega}}_1 + \dot{\bar{\omega}}_2 + \dot{\bar{\omega}}_c .$$

Dar $\dot{\bar{\omega}}_1 = \dot{\bar{\omega}}_2 = 0$ (mișcările de rotație relative sînt uniforme) iar accelerația unghiulară complementară (18.14) este :

$$\dot{\bar{\omega}} = \dot{\bar{\omega}}_c = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 = -\omega_1^2 \operatorname{ctg}\alpha \bar{j}. \tag{4}$$

Viteza (18.3) și accelerația (18.12) a unui punct al conului sînt:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \qquad \bar{a} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \tag{5}$$

căci accelerația (18.16) a vîrfului conului este $\bar{a}_0 = 0$. Rezultă:

$$\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \omega_1 z \operatorname{ctg}\alpha \bar{j} - \omega_1 y \operatorname{ctg}\alpha \bar{k} \tag{6}$$

$$\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -\omega_1^2 \operatorname{ctg}\alpha & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 z \operatorname{ctg}\alpha & -\omega_1 y \operatorname{ctg}\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= -\omega_1^2 z \operatorname{ctg}\alpha \bar{i} - \omega_1^2 y \operatorname{ctg}^2\alpha \bar{j} + \omega_1^2 \operatorname{ctg}\alpha (x - z \operatorname{ctg}\alpha) \bar{k}. \tag{7}$$

Pentru punctul A avem, $x = \frac{h}{\cos\alpha}$, $y = 0$, $z = 0$, deci :

$$\bar{v}_A = 0 \qquad \bar{a}_A = \frac{\omega_1^2 h}{\sin\alpha} \bar{k}$$

(punctul A se găsește pe axa instantanee de rotație).

Pentru punctul B avem $x = \frac{h \cos 2\alpha}{\cos\alpha}$, $y = 0$, $z = 2h \sin\alpha$, deci :

$$\bar{v}_B = 2\omega_1 h \cos\alpha \bar{j} \qquad \bar{a}_B = -2\omega_1^2 h \cos\alpha \bar{i} - \frac{\omega_1^2 h}{\sin\alpha} \bar{k}.$$

Pentru punctul C, avem $x = h \cos\alpha$, $y = 0$, $z = h \sin\alpha$ deci,

$$\bar{v}_C = \omega_1 h \cos\alpha \bar{j} \qquad \bar{a}_C = -\omega_1^2 h \cos\alpha \bar{i}.$$

18.5. Pe discul vertical *2* care se rostogolește pe un plan orizontal se găsește discul orizontal *3* care se poate roti în jurul axei verticale OA. Știind că discul *3* nu lunecă în raport cu discul *2*, se cer vitezele unghiulare absolute $\bar{\omega}_2$ și $\bar{\omega}_3$ ale discurilor *2* și *3*. Se dă r raza discului *2*, $R = OC$

Scanned with OKEN Scanner

raza cercului descris de discul 2 pe planul orizontal și $\bar{\omega}_1$ viteza unghiulară a axei *1* a discului *2* în jurul axei verticale *OA*.

Rezolvare. Bara *1* are o mișcare de rotație cu viteză unghiulară $\bar{\omega}_1$, iar mișcarea relativă a discului *2* față de bara *1* este o rotație de viteză

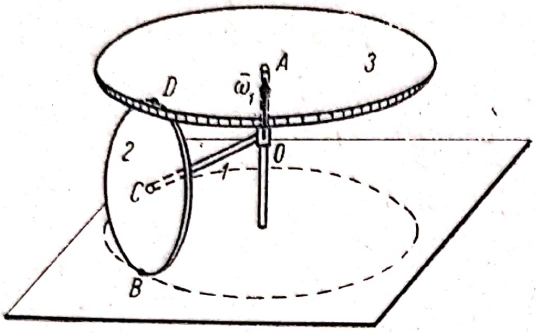


Fig. 18.5 *a*

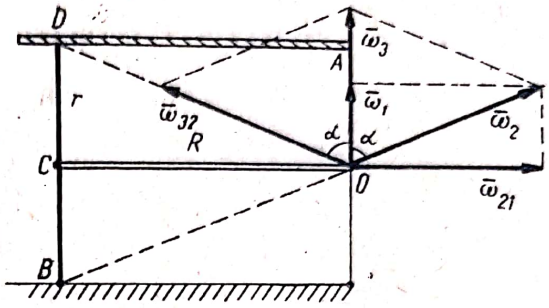


Fig. 18.5 *b*

unghiulară $\bar{\omega}_{21}$ direcția acesteia fiind *OC*. Mișcarea absolută a discului *2* este o rotație, axa instantanee de rotație trecînd prin punctul *O* (punctul de intersecție al suporturilor vectorilor $\bar{\omega}_1$ și $\bar{\omega}_{21}$) și prin punctul de contact *B* dintre discul *2* și planul (punct de viteză nulă).

Conform (18.4) viteza absolută $\bar{\omega}_2$ a discului *2* este:

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{21} \tag{1}$$

iar din figura 18.5 *b* rezultă:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{r}\,\omega_1 \qquad \omega_{21} = \omega_1 \operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{r}\,\omega_1. \tag{2}$$

Mișcarea absolută a discului *3* este o rotație în jurul axei *OA*, iar mișcarea lui relativă față de discul *2* este o rotație de viteză unghiulară $\bar{\omega}_{32}$, axa instantanee de rotație trecînd prin punctul *O* (punctul de intersecție al suporturilor vitezelor unghiulare $\bar{\omega}_2$ și $\bar{\omega}_3$) și prin punctul de contact *D* dintre discuri (viteza relativă este nulă în *D*). Conform (18.4) viteza absolută $\bar{\omega}_3$ a discului *3* este:

$$\bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_{32} \tag{3}$$

iar din figura 18.5 *b* rezultă:

$$\omega_{32} = \omega_2 = \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{r}\,\omega_1 \qquad \omega_3 = 2\,\omega_2 \cos\alpha = 2\,\omega_1 \tag{4}$$

și cum $\bar{\omega}_3$ și $\bar{\omega}_1$ sînt coliniari:

$$\bar{\omega}_3 = 2\,\bar{\omega}_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

18.6. Arborele *1* al crucii cardanice din figura 18.6 *a* este orizontal iar arborele *3* înclinat sub unghiul α față de orizontală. Cunoscînd viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ a arborelui *1*, să se determine viteza unghiulară $\bar{\omega}$ a arborelui *3* în funcție de unghiul de înclinare θ al barei AB față de verticală ($AB \perp CD$).

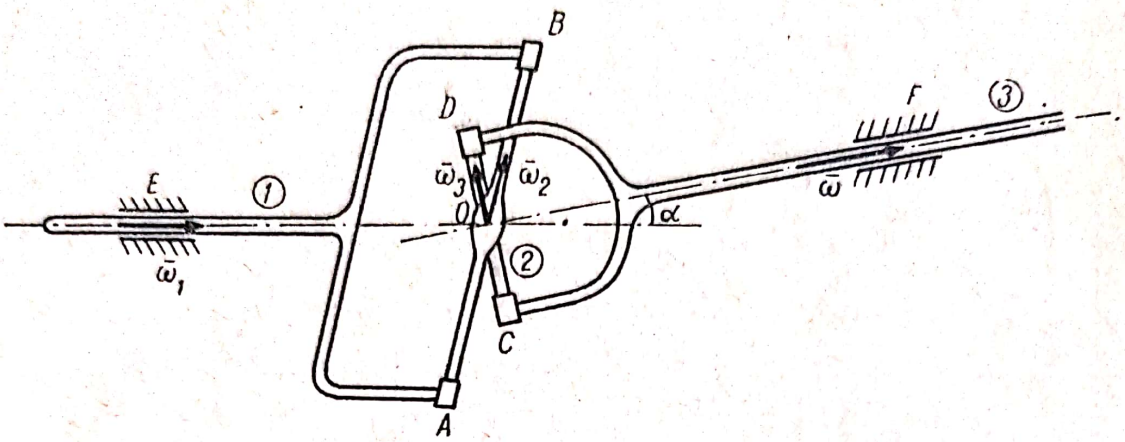


Fig. 18.6 *a*

Rezolvare. Sîntem în cazul compunerii unor rotații concurente căci arborele *1* se rotește în jurul axei OE cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$, axa CD (*2*) se rotește față de AB (față de arborele *1*) în jurul axei AB cu viteza unghiulară relativă $\bar{\omega}_2$ căci $CD \perp AB$, iar arborele *3* are o mișcare de rotație relativă în jurul axei *2* cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_3$. Mișcarea absolută a arborelui *3* este o rotație în jurul axei OF cu viteza unghiulară (18.4):

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3. \tag{1}$$

Alegînd un sistem de referință $Oxyz$, cu axa Ox orizontală (pe direcția EO), planul xOy, planul EOF și Oz orizontala, versorii direcțiilor OF, EO, OB și OD sînt:

$$\bar{u} = \text{vers}\, OF = \cos\alpha\,\bar{i} + \sin\alpha\,\bar{j} \qquad \bar{u}_1 = \text{vers}\, OE = \bar{i}$$

$$\bar{u}_2 = \text{vers}\, OB = \cos\theta\,\bar{j} - \sin\theta\,\bar{k} \quad \bar{u}_3 = \text{vers}\, OD = -\frac{\sin\alpha\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\cos^2\theta}}\,\bar{i} + \tag{2}$$

$$+\frac{\cos\alpha\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\cos^2\theta}}\,\bar{j} + \frac{\cos\alpha\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\cos^2\theta}}\,\bar{k}$$

căci $\bar{u}\bar{u}_3 = 0$, $\bar{u}_2\bar{u}_3 = 0$, $|\bar{u}_3| = 1$. Cum:

$$\bar{\omega} = \omega\,\bar{u} \qquad \bar{\omega}_1 = \omega_1\,\bar{u}_1 \qquad \bar{\omega}_2 = \omega_2\,\bar{u}_2 \qquad \bar{\omega}_3 = \omega_3\,\bar{u}_3 \tag{3}$$

proiectînd ecuația (1) pe axele triedrului $Oxyz$ obținem:

$$\omega\cos\alpha = \omega_1 - \omega_3\frac{\sin\alpha\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\cos^2\theta}}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\omega \sin \alpha = \omega_2 \cos \theta + \omega_3 \frac{\cos \alpha \sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \theta}}$$

$$0 = -\omega_2 \sin \theta + \omega_3 \frac{\cos \alpha \cos \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \theta}}$$

de unde:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 \sin \alpha \cos \alpha \cos \theta}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \theta} \qquad \omega_3 = \frac{\omega_1 \sin \alpha \sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \theta}} \qquad \omega = \frac{\omega_1 \cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \theta}.$$

Valorile extreme ale vitezei unghiulare sînt date de ecuația $\frac{d\omega}{d(\cos^2 \theta)} = 0$ din care rezultă $\theta = k\frac{\pi}{2}$.

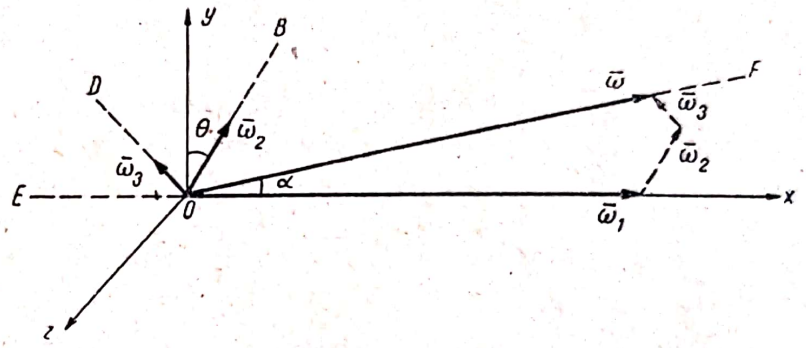


Fig. 18.6 *b*

Pentru $\theta = k\pi$ (bara AB este verticală, bara CD orizontală) viteza unghiulară este maximă $\omega = \frac{\omega_1}{\cos \alpha}$. Pentru $\theta = k\pi + \frac{\pi}{2}$ (bara AB este orizontală) viteza unghiulară este minimă $\omega = \omega_1 \cos \alpha$.

18.7. În figura 18.7 *a* este reprezentat diferențialul unui automobil. Cunoscînd unghiul α și vitezele unghiulare $\bar{\omega}_1$ a roții *1* și $\bar{\omega}_4$ a cutiei diferențialului în jurul axei planetare AB, să se determine vitezele unghiu-

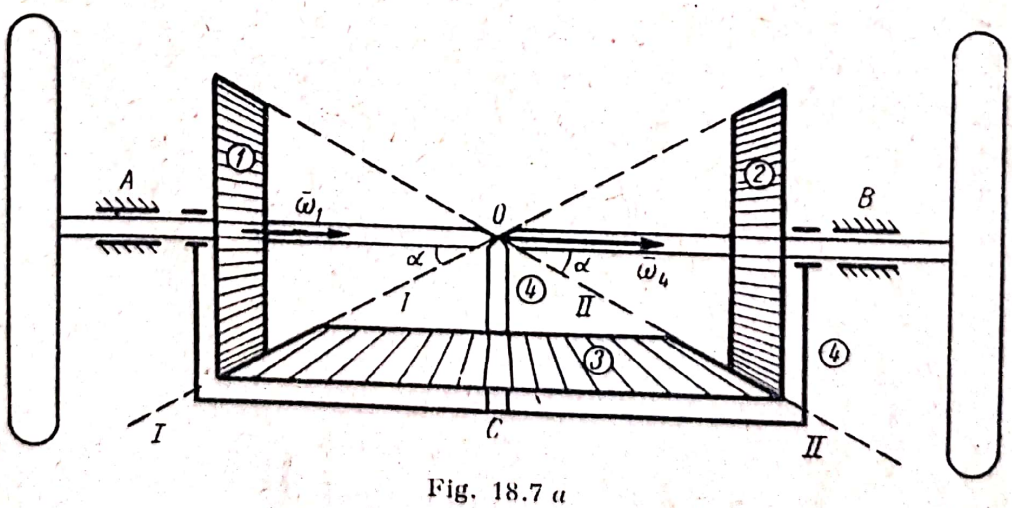


Fig. 18.7 *a*

lare $\bar{\omega}_2$ a roții *2* și $\bar{\omega}_3$ a pinionului satelit în jurul axei planetare precum și vitezele unghiulare relative $\bar{\omega}_{31}$, $\bar{\omega}_{32}$, $\bar{\omega}_{34}$ ale pinionului satelit în raport cu pinioanele planetare *1* și *2* și cu cutia diferențialului *4*.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Roțile *1* și *2* și cutia diferențialului rotindu-se în jurul axei planetare AB, vitezele lor unghiulare absolute $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ și $\bar{\omega}_4$ au direcția AB. Din cauza angrenajelor prin dinți pinioanele nu lunecă una în raport cu

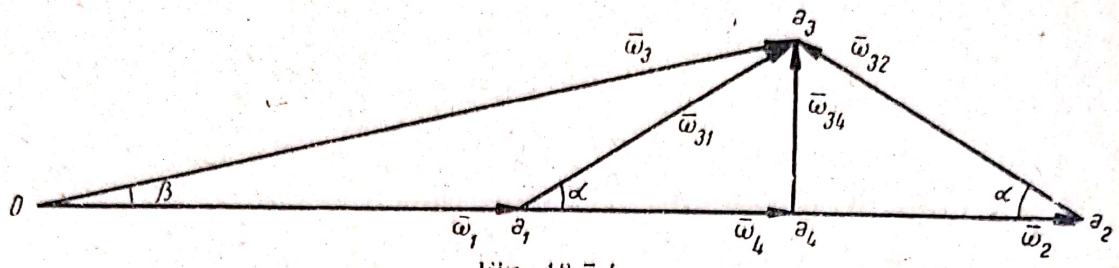


Fig. 18.7 *b*

cealaltă, mișcările relative ale pinionului satelit *3* față de pinioanele planetare *1* și *2* fiind rotații în jurul generatoarelor de contact *I-I* și *II-II* (axe instantanee de rotație), vitezele unghiulare relative $\bar{\omega}_{31}$ și $\bar{\omega}_{32}$ având direcțiile acestor generatoare. În sfîrșit mișcarea relativă a pinionului *3* față de cutia diferențialului este o rotație în jurul axei proprii *OC* de viteză unghiulară $\bar{\omega}_{34}$.

Toate aceste viteze unghiulare fiind concurente în punctul *O* putem exprima cu ajutorul relației (18.4) viteza unghiulară absolută $\bar{\omega}_3$ a pinionului satelit *3* considerînd mișcarea lui în raport cu pinioanele *1* și *2* sau în raport cu cutia diferențialului *4*. Vom avea:

$$\bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{31}; \qquad \bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_{32}; \qquad \bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_4 + \bar{\omega}_{34}. \tag{1}$$

În figura 18.7 *b* sînt compuși vectorii $\bar{\omega}_1 = \overline{Oa_1}$, $\bar{\omega}_{31} = \overline{a_1 a_3}$; $\bar{\omega}_2 = \overline{Oa_2}$, $\bar{\omega}_{32} = \overline{a_2 a_3}$; $\bar{\omega}_4 = \overline{Oa_4}$, $\bar{\omega}_{34} = \overline{a_4 a_3}$ cu ajutorul cărora determinăm viteza unghiulară $\bar{\omega}_3 = \overline{Oa_3}$. Obținem:

$$\omega_{31} = \omega_{32} = \frac{\omega_4 - \omega_1}{\cos \alpha} \qquad \omega_{34} = (\omega_4 - \omega_1) \operatorname{tg} \alpha. \tag{2}$$

$$\omega_2 = 2\omega_4 - \omega_1. \tag{3}$$

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_4^2 + (\omega_4 - \omega_1)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \tag{4}$$

unghiul β format de $\bar{\omega}_3$ cu direcția AB fiind dat de:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\omega_{34}}{\omega_4} = \frac{\omega_4 - \omega_1}{\omega_4} \operatorname{tg} \alpha. \tag{5}$$

Dacă $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2$ (roțile au aceeași viteză unghiulară), $\bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_4 = \bar{\omega}_1$ iar vitezele unghiulare relative sînt nule $\bar{\omega}_{31} = \bar{\omega}_{32} = \bar{\omega}_{34} = 0$, pinionul satelit nu se învîrtește în jurul axei proprii.

18.8. Bara O_1O_2 se rotește cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ în jurul unei axe fixe Δ_1 trecînd prin punctul O_1, bara O_2O_3, se rotește față de bara *1*

Scanned with OKEN Scanner

în jurul axei $\Delta_2 \parallel \Delta_1$ trecînd prin punctul O_2 cu viteza unghiulară relativă $\bar{\omega}_2 = -\bar{\omega}_1$ iar corpul *3* se rotește față de bara *2* în jurul axei $\Delta_3 \parallel \Delta_1$ trecînd prin punctul O_3 cu viteza unghiulară relativă $\bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_1$. Să se determine mișcarea absolută a corpului *3*.

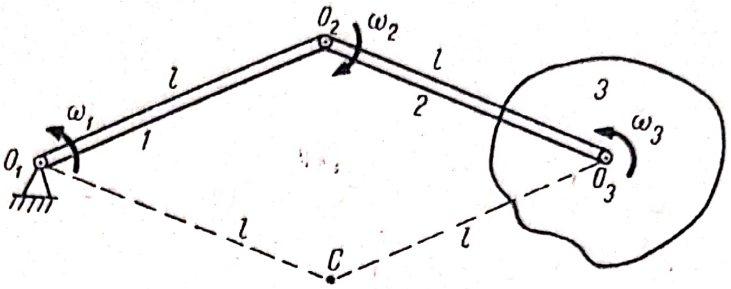


Fig. 18.8

Rezolvare. Toate mișcările relative sînt rotații cu axele de rotație paralele. Mișcarea rezultantă va fi o mișcare de rotație cu viteza unghiulară absolută (18.5):

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_1 \qquad (1)$$

axa instantanee de rotație trecînd prin centrul vectorilor paraleli C $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$ al cărui vector de poziție (18.7) în raport cu O_3 este:

$$\bar{\rho} = \overline{O_3C} = \frac{\omega_1 \overline{O_3O_1} + \omega_2 \overline{O_3O_2} + \omega_3 \overline{O_3O_3}}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} = \overline{O_3O_1} - \overline{O_3O_2} = \overline{O_2O_1} \qquad (2)$$

căci $\omega_3 = \omega_1$, $\omega_2 = -\omega_1$. Punctul C se găsește la distanța l de O_3, figura $O_1O_2O_3C$ fiind un paralelogram $O_3C \parallel O_2O_1$.

18.9. De capătul O_2 al barei O_1O_2 care se rotește în jurul punctului fix O_1 cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ este articulat un disc de rază r. Acest disc se rostogolește fără să lunece în interiorul unui cilindru de rază R (fig. 18.9). Să se determine viteza unghiulară relativă $\bar{\omega}_2$ a discului față de bară și viteza unghiulară absolută $\bar{\omega}$ a discului.

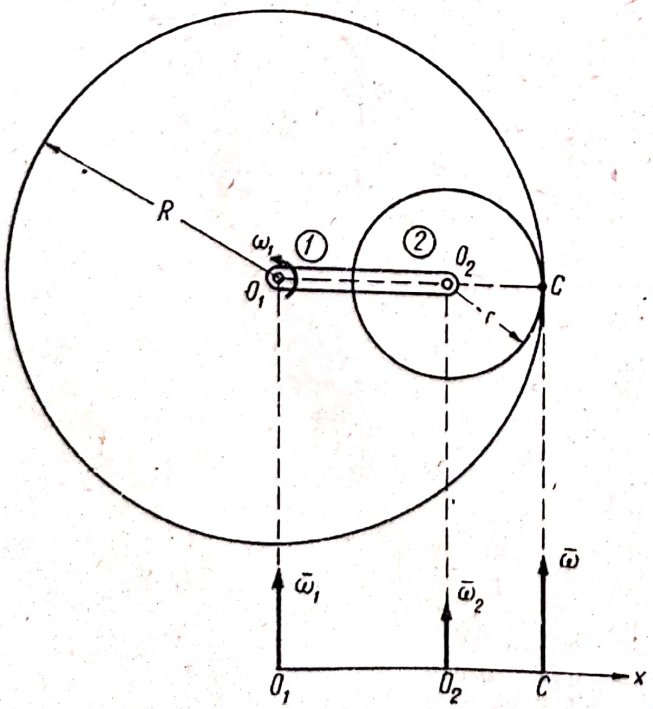


Fig. 18.9

Rezolvare. Mișcarea relativă a discului față de bară este o rotație de viteză unghiulară $\bar{\omega}_2$ în jurul unei axe Δ_2 trecînd prin O_2 și paralelă cu axa Δ_1 în jurul căruia se rotește bara. Deci sîntem în cazul compunerii a două rotații paralele, mișcarea absolută va fi o rotație instantanee în jurul unei axe Δ paralelă cu Δ_1 și Δ_2. Cum discul se rostogolește fără să

lunece pe cilindru, axa Δ este generatoarea de contact dintre disc și cilindru, centrul vectorilor paraleli $\overline{\omega}_1$ și $\overline{\omega}_2$ fiind punctul C (fig. 18.9). Din relațiile (18.5) și (18.7) avem:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \tag{1}$$

$$R = \frac{\omega_1 \cdot 0 + \omega_2 (R - r)}{\omega_1 + \omega_2} \tag{2}$$

[s-a proiectat relația (18.7) pe axa $O_1 x$, originea vectorilor de poziție fiind punctul O_1]. Rezolvînd ecuațiile de mai sus rezultă:

$$\omega = -\frac{R - r}{r}\omega_1 \qquad \omega_2 = -\frac{R}{r}\omega_1 \tag{3}$$

deci sensul de rotație al discului este invers sensului de rotație al barei.

18.10. Roata *1* se rotește cu viteza unghiulară $\overline{\omega}_1$ în jurul axei Δ. Pe bara *0* care se rotește în jurul axei Δ cu viteza unghiulară $\overline{\omega}_0$ sînt fixate roțile *2*, *3*,..., *n*,... angrenate între ele și cu roata *1*. Cunoscînd razele r_n ale roților, să se determine viteza unghiulară absolută $\overline{\omega}_n$ și vitezele unghiulare relative $\overline{\omega}_{no}$, $\overline{\omega}_{n,n-1}$ ale roții *n* în raport cu bara *O* și cu roata $n-1$.

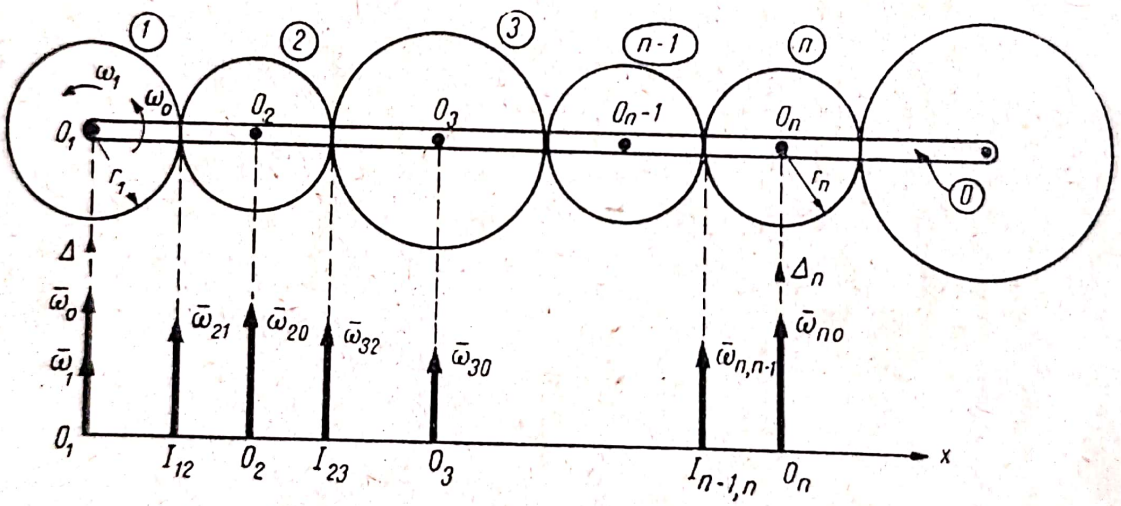


Fig. 18.10

Rezolvare. Bara *0* execută o mișcare de rotație cu viteza unghiulară $\overline{\omega}_0$ în jurul axei Δ, iar mișcarea relativă a roții *n* față de bară este o rotație în jurul axei Δ_n cu viteza unghiulară $\overline{\omega}_{n0} \parallel \overline{\omega}_0$. Sîntem deci în cazul compunerii a două rotații paralele, mișcarea absolută a roții *n* este deci o rotație instantanee de viteză unghiulară (18.5):

$$\omega_n = \omega_0 + \omega_{n0} \tag{1}$$

axa instantanee de rotație, paralelă cu Δ trecînd prin centrul vectorilor paraleli $\overline{\omega}_0$ și $\overline{\omega}_{n0}$ a cărui abscisă (18.7) este:

$$x_n = \frac{\omega_0 \cdot 0 + \omega_{n0}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + \ldots + 2r_{n-1} + r_n)}{\omega_0 + \omega_{n0}}. \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Mișcarea roții n poate fi considerată ca rezultînd din compunerea mișcării de rotație absolute a roții $n-1$ cu mișcarea relativă a roții n față de $n-1$, o rotație de viteză unghiulară $\bar{\omega}_{n,n-1} \parallel \bar{\omega}_{n-1}$ în jurul punctului de contact $I_{n-1,n}$ dintre cele două roți, deci conform (18.5) și (18.7):

$$\omega_n = \omega_{n-1} + \omega_{n,n-1} \tag{3}$$

$$x_n = \frac{\omega_{n-1} \cdot x_{n-1} + \omega_{n,n-1}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + \ldots + 2r_{n-1})}{\omega_{n-1} + \omega_{n,n-1}} . \tag{4}$$

Sistemul de patru ecuații (1) ... (4) are patru necunoscute: ω_n, ω_{n0}, $\omega_{n,n-1}$, x_n. Pentru $n = 2x_{n-1} = 0$ căci viteza unghiulară $\bar{\omega}_{n-1} = \bar{\omega}_1$ se aplică în punctul O_1. Rezolvînd sistemul obținem:

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{r_1 + r_2}{r_2}(\omega_0 - \omega_1) \qquad \omega_{20} = \frac{r_1}{r_2}(\omega_0 - \omega_1)$$

$$\omega_{21} = r_1\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)(\omega_0 - \omega_1) = \frac{r_1 + r_2}{r_2}(\omega_0 - \omega_1) \tag{5}$$

$$x_2 = \frac{r_1(r_1 + r_2)(\omega_0 - \omega_1)}{(r_1 + r_2)(\omega_0 - \omega_1) + r_2\omega_1} .$$

Pentru $n = 3$ obținem:

$$\omega_3 = \omega_1 + \frac{(-r_1 + r_3)}{r_3}(\omega_0 - \omega_1) \qquad \omega_{30} = -\frac{r_1}{r_3}(\omega_0 - \omega_1)$$

$$\omega_{32} = -r_1\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)(\omega_0 - \omega_1) \qquad x_3 = -\frac{r_1(r_1 + 2r_2 + r_3)(\omega_0 - \omega_1)}{(-r_1 + r_3)(\omega_0 - \omega_1) + r_3\omega_1} \tag{6}$$

iar în cazul general:

$$\omega_n = \omega_1 + \frac{(-1)^n r_1 + r_n}{r_n}(\omega_0 - \omega_1) \qquad \omega_{n0} = (-1)^n \frac{r_1}{r_n}(\omega_0 - \omega_1)$$

$$\omega_{n,n-1} = (-1)nr_1\left(\frac{1}{r_{n-1}} + \frac{1}{r_n}\right)(\omega_0 - \omega_1) \tag{7}$$

$$x_n = (-1)^n \frac{r_1(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + \ldots + 2r_{n-1} + r_n)(\omega_0 - \omega_1)}{[(-1)^n r_1 + r_n](\omega_0 - \omega_1) + r_n\omega_1} .$$

Dacă roțile sînt identice $r_n = r$:

$$\omega_n = \begin{cases} \omega_1 & (n \text{ impar}) \\ 2\omega_0 - \omega_1 & (n \text{ par}) \end{cases} \qquad \begin{aligned} \omega_{n0} &= (-1)^n(\omega_0 - \omega_1) \\ \omega_{n,n-1} &= (-1)^n 2(\omega_0 - \omega_1) \end{aligned}$$

iar dacă în acest caz roata *1* este fixă $\omega_1 = 0$

$$\omega_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ impar}) \\ 2\omega_0 & (n \text{ par}) \end{cases} \qquad \omega_{n0} = (-1)^n \omega_0 \qquad \omega_{n,n-1} = (-1)^n \cdot 2\omega_0$$

adică roțile avînd indice impar au o mișcare de translație.

Scanned with OKEN Scanner

18.11. Roţile *1* şi *2* se rotesc cu vitezele unghiulare $\bar{\omega}_1$ şi $\bar{\omega}_2$ în jurul axei Δ. Pe roata *2* sînt fixate roţile *3* care se află în angrenare interioară cu roata *4* care se roteşte şi ea în jurul axei Δ. Cunoscînd razele r_1 şi r_4 ale roţilor *1* şi *4*, să se determine viteza unghiulară absolută $\bar{\omega}_4$ a roţii *4*.

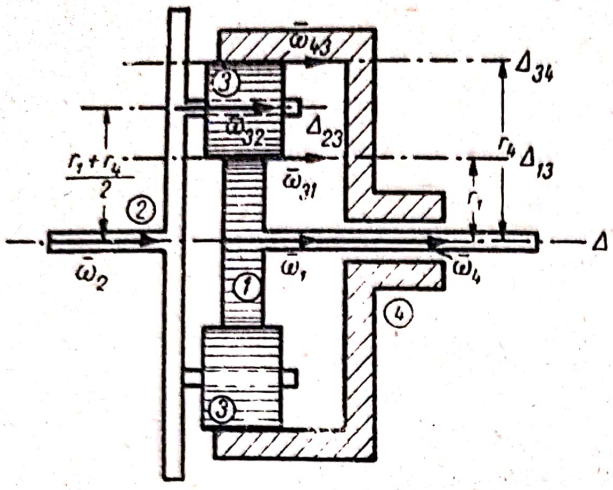


Fig. 18.11

Rezolvare. Roţile *1* şi *2* au mişcări de rotaţie în jurul axei Δ cu vitezele unghiulare $\bar{\omega}_1$ şi $\bar{\omega}_2$, mişcările relative ale roţii *3* faţă de roţile *1* şi *2* sînt rotaţii cu vitezele unghiulare $\bar{\omega}_{31}$ şi $\bar{\omega}_{32}$ în jurul axelor Δ_{13} şi Δ_{23} (Δ_{13} este generatoarea de contact dintre roţile *1* şi *3* după cum se vede în fig. 18.11). Sîntem în cazul compunerii a două rotaţii paralele, deci conform (18.5) viteza unghiulară absolută a roţii *3* este:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_{31} \qquad \omega_3 = \omega_2 + \omega_{32} \qquad (1)$$

axa instantanee de rotaţie fiind la distanţa (18.7):

$$d_3 = \frac{\omega_1 \cdot 0 + \omega_{31} r_1}{\omega_3} \qquad d_3 = \frac{\omega_2 \cdot 0 + \omega_{32} \dfrac{r_1 + r_4}{2}}{\omega_3} \qquad (2)$$

de axa Δ (axa Δ_{13} se găseşte la distanţa r iar Δ_{23} la distanţa $\frac{r_1 + r_4}{2}$ de axa Δ). Mişcarea relativă a roţii *4* faţă de roata *3* este o rotaţie în jurul axei Δ_{34}, generatoarea de contact dintre roţile *3* şi *4*, deci conform (18.5) şi (18.7):

$$\omega_4 = \omega_3 + \omega_{43} \qquad (3)$$

$$0 = \frac{\omega_3 d_3 + \omega_{43} r_4}{\omega_4} \qquad (4)$$

unde viteza unghiulară relativă ω_{43} se găseşte la distanţa r_4 de axa Δ suportul vitezei unghiulare absolute ω_4 a roţii *4*. Rezolvînd sistemul de ecuaţii (1) ... (4) obţinem:

$$\omega_4 = \omega_2 + \frac{r_1}{r_4}(\omega_2 - \omega_1), \qquad (5)$$

18.12. Pe axa Δ se găsesc roţile *1* şi *4* şi cadrul *0* pe care se găsesc roţile *2* şi *3* solidar legate. Aceste roţi sînt angrenate între ele ca în figura 18.12. Cunoscînd razele roţilor r_1, r_2, r_3, r_4 şi vitezele unghiulare ω_0 şi ω_1 ale cadrului şi roţii *1*, să se afle viteza unghiulară a roţii *4*.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Mișcarea roților *1*, *2* și a cadrului *0* precum și mișcarea roților *4*, *3* și a cadrului *0* a fost studiată în problema (18.10). Vitezele unghiulare absolute ale roților *2* și *3* au fost determinate [formula (5)] și anume:

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{r_1 + r_2}{r_2}(\omega_0 - \omega_1) \qquad (1)$$

$$\omega_3 = \omega_4 + \frac{r_4 + r_3}{r_3}(\omega_0 - \omega_4) \qquad (2)$$

[relația (2) se obține din formula (5) problema (18.10) în care înlocuim indicii *1* prin *4* și *2* prin *3*]. Însă roțile *2* și *3* fiind solidarizate:

$$\omega_2 = \omega_3 \qquad (3)$$

de unde rezultă:

$$\omega_4 = \frac{(r_2 r_4 - r_1 r_3)\,\omega_0 + r_1 r_3 \omega_1}{r_2 r_4}. \qquad (4)$$

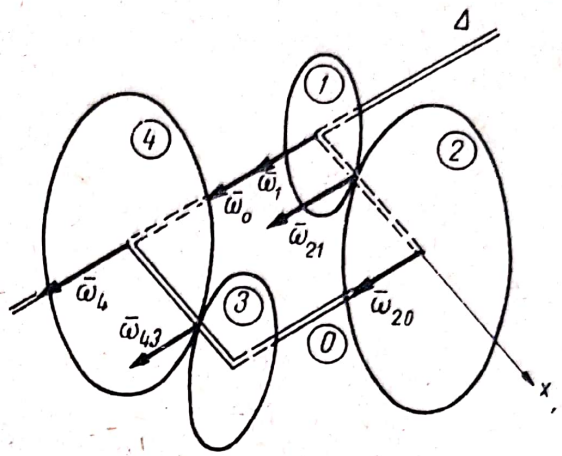


Fig. 18.12

18.13. O bară *1*, O_1O_2 de lungime l se rotește într-un plan fix în jurul capătului său O_1 cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ (= const). În capătul O_2 al barei este articulat un disc *2* de rază r care se rotește în același plan cu viteza unghiulară relativă $\bar{\omega}_2$ (= const) față de bară. Să se determine ω_2 astfel ca accelerația punctului *A* al roții care se află într-un moment dat deasupra barei să fie nulă. Să se determine apoi ω_2 astfel ca $\bar{a}_A = \bar{a}_{O_2}$. Care este distribuția de viteze și de accelerații ale punctelor discului *2* în cele două cazuri examinate?

Rezolvare. Bara se rotește în jurul axei Δ_1 cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$, discul față de bară se rotește în jurul axei Δ_2 cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_2$. Cum Δ_1 și Δ_2 sînt paralele, sîntem în cazul compunerii a două rotații paralele, deci mișcarea absolută a discului este o rotație cu viteza unghiulară (18.5):

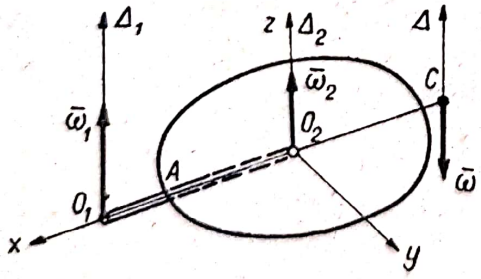


Fig. 18.13 *a*

$$\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)\,\bar{k} \qquad (\bar{\omega}_1 \neq -\bar{\omega}_2) \qquad (1)$$

axa instantanee de rotație trecînd prin centrul vectorilor paraleli $\bar{\omega}_1$ și $\bar{\omega}_2$ al cărui vector de poziție (18.7) față de sistemul O_2xyz (fig. 18.13 *a*) este:

$$\bar{\rho} = \frac{\omega_1 \overline{O_2O_1} + \omega_2 \cdot 0}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{\omega_1 l}{\omega_1 + \omega_2}\,\bar{i}. \qquad (2)$$

Accelerația (18.12) a unui punct *P* al discului este:

$$\bar{a} = \bar{a}_{O_2} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \qquad (3)$$

unde accelerația punctului O_2 este:

$$\bar{a}_{O_2} = \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \overline{O_1O_2}) = \omega_1^2 l\,\bar{i} \qquad (4)$$

Scanned with OKEN Scanner

(punctul O_2 aparține barei *1* care are o mișcare de rotație uniformă) iar accelerația unghiulară (18.17):

$$\dot{\bar{\omega}} = (\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2)\,\bar{k} = 0 \tag{5}$$

mișcările componente fiind uniforme. Cum $r = x\bar{i} + y\bar{j}$ înlocuind în (3) obținem:

$$\bar{a} = \omega_1^2 l\,\bar{i} - (\omega_1 + \omega_2)^2\,(x\,\bar{i} + y\,\bar{j}). \tag{6}$$

Accelerația punctului A de coordonate $x = r$, $y = 0$ este:

$$\bar{a}_A = [\omega_1^2 l - (\omega_1 + \omega_2)^2 r]\,\bar{i}. \tag{7}$$

Dacă $\bar{a}_A = 0$ rezultă:

$$\omega_2 = -\omega_1\left(1 \pm \sqrt{\frac{l}{r}}\right). \tag{8}$$

Cînd $\omega_2 = -\omega_1\left(1 + \sqrt{\frac{l}{r}}\right)$ discul se rotește în sens contrar barei ($\omega_2 < 0$, $\omega = -\sqrt{\frac{l}{r}}\,\omega_1 < 0$) iar $\bar{\rho} = -\sqrt{lr}\,\bar{i}$, centrul C al vectorilor paraleli ($\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$) și axa instantanee de rotație Δ fiind situate ca în figura 18.13 *a*. Cînd $\omega_2 = -\omega_1\left(1 - \sqrt{\frac{l}{r}}\right)$ viteza unghiulară absolută $\omega = \sqrt{\frac{l}{r}}\,\omega_1 > 0$ discul se rotește în același sens cu bara, iar $\bar{\rho} = \sqrt{lr}\,\bar{i}$ axa instantanee de rotație Δ găsindu-se între axele Δ_1 și Δ_2. În ambele cazuri accelerația unui punct al discului este $\bar{a} = \omega_1^2 l\left[\left(1 - \frac{x}{r}\right)\bar{i} - \frac{y}{r}\bar{j}\right]$.

Dacă $\bar{a}_A = \bar{a}_{0_2}$ rezultă:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = 0 \tag{9}$$

deci discul are o mișcare de translație. În acest caz $\omega_2 = -\omega_1$ iar viteza fiecărui punct este conform (18.8):

$$\bar{v} = \bar{k} \times (\omega_1 \cdot \overline{O_2O_1} + \omega_2 \cdot 0) = \bar{k} \times \omega_1 l\,\bar{i} = -\omega_1 l\,\bar{j} = \bar{v}_{0_2}. \tag{10}$$

Punctul O_2 descriind un cerc, toate punctele P ale discului descriu cercuri de aceeași rază. Accelerația fiecărui punct al discului este $\bar{a} = \omega_1^2 l\,\bar{i} = \bar{a}_{0_2}$ (fig. 18.13 *b*).

18.14. Pe un plan înclinat sub unghiul α lunecă o pană *1* cu viteza $\bar{v}_1$. De pană este fixată o bară verticală O_1O_2 iar în O_2 se găsește un disc *2* care se rotește cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_2$ în jurul barei verticale. Să se studieze mișcarea discului.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Pana are o mişcare de translaţie cu viteza $\bar{v}_1$ iar mişcarea relativă a discului faţă de pană este o rotaţie cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_2$

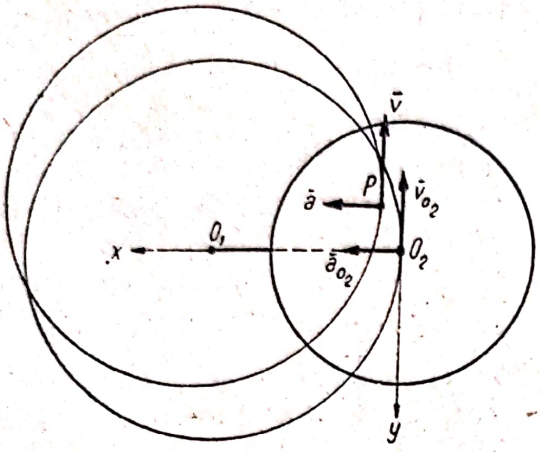


Fig. 18.13 *b*

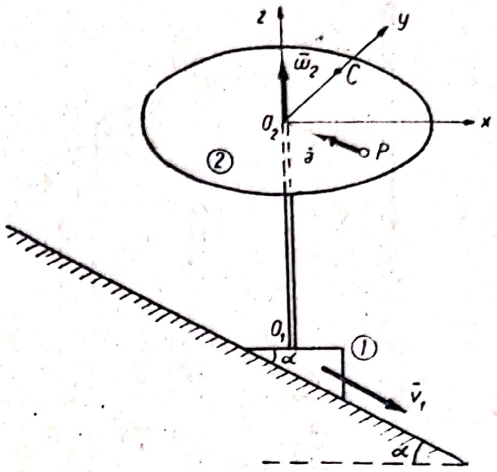


Fig. 18.14 *a*

în jurul axei O_1O_2. Sîntem deci în cazul general de compunere a mişcărilor. Viteza (18.9) a unui punct al discului este :

$$\bar{v} = \bar{v}_{O_2} + \bar{\omega} \times \bar{r} \tag{1}$$

unde viteza punctului O_2 este egală cu a corpului *1*:

$$\bar{v}_{O_2} = \bar{v}_1 \tag{2}$$

iar viteza unghiulară (18.4) este:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_2 \tag{3}$$

căci $\bar{\omega}_1 = 0$ pana avînd o mişcare de translaţie. Deci:

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}. \tag{4}$$

Cum $\bar{v}_1 \neq 0$, $\bar{\omega}_2 \neq 0$ şi $\bar{v}_1 \cdot \bar{\omega}_2 = -v_1\omega_2 \sin\alpha \neq 0$ discul are mişcare elicoidală instantanee cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_2$ iar viteza în lungul axei elicoidale instantanee (18.11) este:

$$v_\omega = \frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{\omega}_2}{|\bar{\omega}_2|} = -v_1 \sin\alpha. \tag{5}$$

Considerînd un sistem de referinţă O_2xyz cu axa O_2z verticală şi planul xO_2z planul determinat de $\bar{v}_1$ şi $\bar{\omega}_2$ (fig. 18.14 *a*), axa instantanee Δ a mişcării elicoidale trece prin punctul C de vector de poziţie (18.10):

$$\overline{O_2C} = \frac{\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_1}{\omega_2^2} = \frac{1}{\omega_2^2} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega_2 \\ v_1\cos\alpha & 0 & -v_1\sin\alpha \end{vmatrix} = \frac{v_1}{\omega_2}\cos\alpha\,\bar{j} \tag{6}$$

şi este paralelă cu $\bar{\omega}_2$.

Dacă v_1 și ω_2 sînt constanți, Δ este la distanță constantă de planul vertical fix xO_2z deci axoida fixă este un plan vertical la distanța $\frac{v_1}{\omega_2}\cos\alpha$ de planul determinat de $\bar{v}_1$ și $\bar{\omega}$. Față de disc, Δ va descrie un cilindru de rază $\frac{v_1}{\omega_2}\cos\alpha$ axa cilindrului fiind axa O_2z (axoida mobilă). În figura 18.14 *b* sînt reprezentate axoida fixă și cea mobilă pentru acest caz.

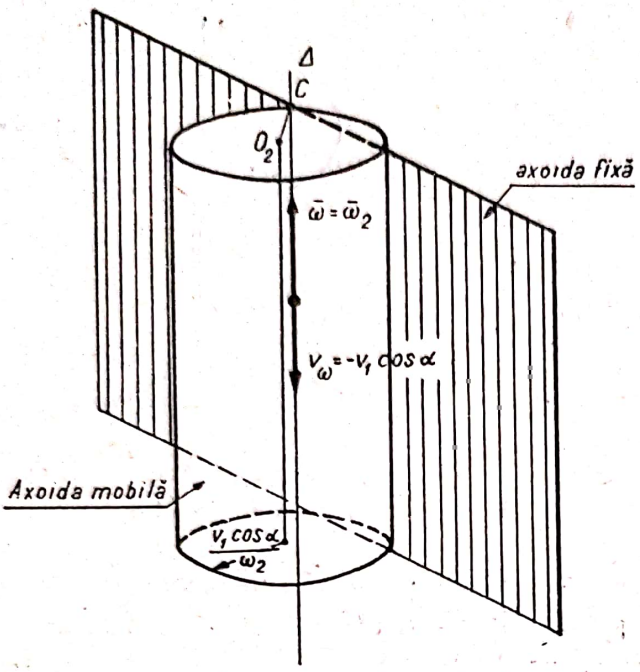


Fig. 18.14 *b*

Pentru v_1 și ω_2 constanți, accelerația punctului O_2 este nulă și $\dot{\bar{\omega}}=\dot{\bar{\omega}}_2=0$ deci accelerația (18.12) a unui punct al discului este:

$$\bar{a}=\bar{\omega}_2\times(\bar{\omega}_2\times\bar{r})=$$

$$=-\omega_2^2\bar{r} \qquad (7)$$

și este dirijată spre centrul discului (fig. 18.14 *a*).

18.15. Bara *1*, O_1A se rotește într-un plan fix în jurul capătului O_1 cu accelerația unghiulară constantă $\dot{\bar{\omega}}_1$. Discul *2* are o mișcare elicoidală în raport cu bara *1*, axa mișcării fiind axa barei iar accelerațiile $\bar{a}_2$ (a centrului O_2 al discului în raport cu bara) și $\dot{\bar{\omega}}_2$ (accelerația unghiulară relativă) sînt constante. Știind că în momentul inițial $t=0$ bara și discul erau în repaus iar punctele O_1 și O_2 coincideau, să se studieze mișcarea discului.

Rezolvare. Cu sistemul de axe ales în figura 18.15 viteza unghiulară a barei este:

$$\bar{\omega}_1=\dot{\omega}_1 t\,\bar{k}. \qquad (1)$$

Mișcarea relativă a discului față de bară este caracterizată de viteza relativă a punctului O_2 față de bară:

$$\bar{v}_2=a_2 t\,\bar{i} \qquad (2)$$

și de viteza unghiulară a discului față de bară:

$$\bar{\omega}_2=\dot{\omega}_2 t\,\bar{i}. \qquad (3)$$

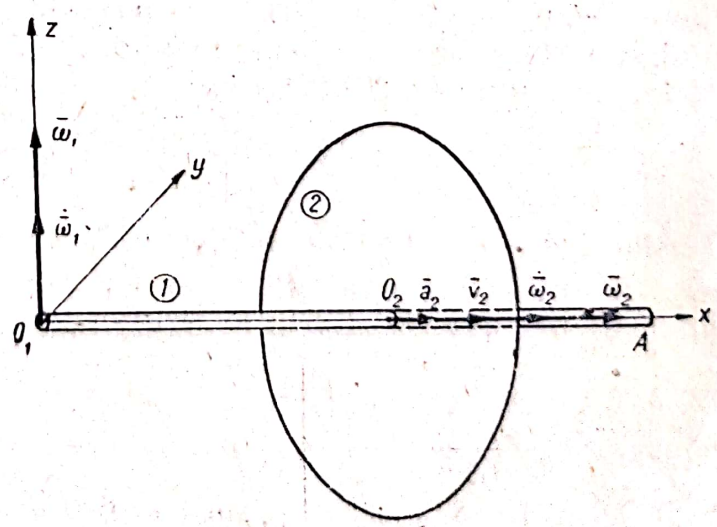


Fig. 18.15

(S-a ținut seamă că $\dot{\omega}_1$, $\dot{\omega}_2$ și a_2 sînt constante și că la $t = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $v_2 = 0$.)

Viteza (18.9) a unui punct P al discului va fi:

$$\bar{v} = \bar{v}_{0_2} + \bar{\omega} \times \bar{r} \tag{4}$$

unde conform (17.3) viteza absolută a punctului O_2 este:

$$\bar{v}_{0_2} = \bar{v}_r + \bar{v}_t = \bar{a}_2 t\,\bar{i} + \frac{\dot{\omega}_1 a_2 t^3}{2}\bar{j} \tag{5}$$

(viteza de transport este viteza punctului de pe bară care coincide cu O_2 datorită mișcării de rotație a barei $\bar{v}_t = \bar{\omega}_1 \times \overline{O_1O_2} = \dot{\omega}_1 t\ \bar{k} \times \frac{a_2 t^2}{2}\bar{i} = \frac{\dot{\omega}_1 a_2 t^3}{2}\bar{j}$; viteza relativă $\bar{v}_r = \bar{v}_2$), viteza unghiulară (18.4) a discului este:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = \dot{\omega}_2 t\,\bar{i} + \dot{\omega}_1 t\,\bar{k} \tag{6}$$

iar $\bar{r} = \overline{O_2P} = y\bar{j} + z\bar{k}$ și $\overline{O_1O_2} = \frac{a_2 t^2}{2}\bar{i}$. Înlocuind în (4) obținem:

$$\bar{v} = a_2 t\,\bar{i} + \frac{\dot{\omega}_1 a_2 t^3}{2}\bar{j} + (\dot{\omega}_2 t\,\bar{i} + \dot{\omega}_1 t\bar{k}) \times (y\bar{j} + z\bar{k}) =$$

$$= (a_2 t - \dot{\omega}_1\ yt)\bar{i} + \left(\frac{\dot{\omega}_1 a_2 t^3}{2} - \dot{\omega}_2 z t\right)\bar{j} + \dot{\omega}_2 y t\bar{k}. \tag{7}$$

Cum $\bar{v}_{0_2} \neq 0$, $\bar{\omega} \neq 0$ și $\bar{v}_{0_2} \cdot \bar{\omega} = a_2 \dot{\omega}_2 t^2 \neq 0$ discul are o mișcare elicoidală instantanee cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$, iar viteza în lungul axei elicoidale instantanee (18.11) este:

$$v_\omega = \frac{\bar{v}_{0_2} \cdot \bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} = \frac{a_2 \dot{\omega}_2 t}{\sqrt{\dot{\omega}_1^2 + \dot{\omega}_2^2}}. \tag{8}$$

Axa instantanee a mișcării elicoidale este coliniară cu $\bar{\omega}$ și trece prin punctul C de vector de poziție (18.10):

$$\overline{O_2C} = \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_{0_2}}{\omega^2} = \frac{1}{(\dot{\omega}_1^2 + \dot{\omega}_2^2)t^2}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dot{\omega}_2 t & 0 & \dot{\omega}_1 t \\ a_2 t & \frac{\dot{\omega}_1 a_2 t^3}{2} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{a_2 \dot{\omega}_1}{\dot{\omega}_1^2 + \dot{\omega}_2^2}\left[-\frac{\dot{\omega}_1 t^2}{2}\bar{i} + \bar{j} + \frac{\dot{\omega}_2 t^2}{2}\bar{k}\right]. \tag{9}$$

Accelerația (18.12) a unui punct P al discului este:

$$\bar{a} = \bar{a}_{0_2} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \tag{10}$$

unde conform (17.9) accelerația absolută a punctului O_2 este:

$$\bar{a}_{0_2} = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c = \left(a_2 - \frac{\dot{\omega}_1^2 a_2 t^4}{2}\right)\bar{i} + \frac{5\dot{\omega}_1 a_2 t^2}{2}\bar{j} \qquad (11)$$

(accelerația relativă $\bar{a}_r = \bar{a}_2$; accelerația de transport (17.11) este accelerația punctului de pe bară care coincide cu O_2: $\bar{a}_t = \dot{\bar{\omega}}_1 \times \overline{O_1O_2} + \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \overline{O_1O_2}) = -\frac{\dot{\omega}_1^2 a_2 t^4}{2}\bar{i} + \frac{\dot{\omega}_1 a_2 t^2}{2}\bar{j}$; accelerația Coriolis (17.12) este $\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_1 \times \bar{v}_r = 2\dot{\omega}_1 t\bar{k} \times a_2 t\bar{i} = 2\dot{\omega}_1 a_2 t^2 \bar{j}$), iar accelerația unghiulară (18.13) a discului este:

$$\dot{\bar{\omega}} = \dot{\bar{\omega}}_1 + \dot{\bar{\omega}}_2 + \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 = \dot{\omega}_2\bar{i} + \dot{\omega}_1\dot{\omega}_2 t^2\bar{j} + \dot{\omega}_1\bar{k}. \qquad (12)$$

Înlocuind în (10) obținem componentele accelerației pe axele din figura 18.15:

$$a_x = a_2 - \frac{\dot{\omega}_1^2 a_2 t^4}{2} + 2\dot{\omega}_1\dot{\omega}_2 z t^2 - \dot{\omega}_1 y$$

$$a_y = \frac{5}{2}\dot{\omega}_1 a_2 t^2 - \dot{\omega}_2 z - \dot{\omega}_2^2 y t^2 - \dot{\omega}_1^2 y t^2 \qquad (13)$$

$$a_z = \dot{\omega}_2 y - \dot{\omega}_2^2 z t^2.$$

18.16. Pe o masă care se rotește în jurul axei verticale Δ cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ și coboară cu viteza $\bar{v}_1$ se găsește o sfîrlează. În raport cu masa, vîrful O al sfîrlezei descrie un cerc de rază r cu centrul pe axa Δ cu viteza $\bar{v}_2$ și se rotește în jurul axei sale verticale cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_2 = -\bar{\omega}_1$. Presupunînd $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ constanți în modul, să se determine viteza și accelerația unui punct P al sfîrlezei.

Rezolvare. Mișcarea mesei este caracterizată de vectorii:

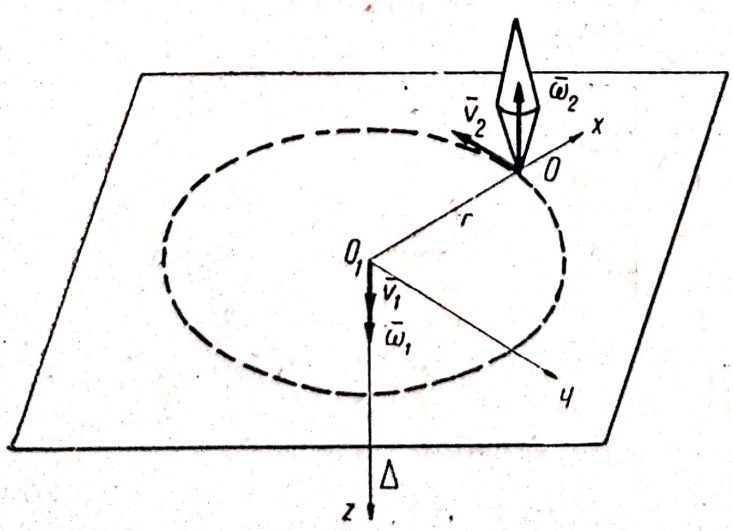


Fig. 18.16

$$\bar{v}_1 = v_1\bar{k} \qquad \bar{\omega}_1 = \omega_1\bar{k} \quad (1)$$

iar mișcarea relativă a sfîrlezei față de masă, de vectorii:

$$\bar{v}_2 = -v_2\bar{j} \qquad \bar{\omega}_2 = -\omega_1\bar{k} \quad (2)$$

(v. sistemul de referință din fig. 18.16). Viteza (18.9) a punctului P este:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 \qquad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

căci viteza unghiulară (18.4) este nulă, mișcarea sfîrlezei fiind o translație:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = 0. \tag{4}$$

Conform (18.1) viteza punctului O este:

$$\bar{v}_0 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{\omega}_1 \times \overline{O_1O} + \bar{\omega}_2 \times \overline{OO} = (\omega_1 r - v_2)\,\bar{j} + v_1\,\bar{k} = \bar{v} \tag{5}$$

căci $\overline{O_1O} = r\,\bar{i}$, $\overline{OO} = 0$. Punctul O descrie o elice înfășurată pe un cilindru de rază r avînd axa Δ, panta elicei fiind dată de $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_1}{\omega_1 r - v_2}$, mișcarea fiind uniformă cu viteza $|\bar{v}_0| = \sqrt{(\omega_1 r - v_2)^2 + v_1^2}$.

Viteza unghiulară $\bar{\omega}$ și accelerația unghiulară $\dot{\bar{\omega}}$ (18.13) sînt nule:

$$\dot{\bar{\omega}} = \dot{\bar{\omega}}_1 + \dot{\bar{\omega}}_2 + \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 = 0 \tag{6}$$

($\dot{\bar{\omega}}_1 = \dot{\bar{\omega}}_2 = 0$, $\bar{\omega}_1 \parallel \bar{\omega}_2$) deci accelerația (18.12) a punctului P este:

$$\bar{a} = \bar{a}_0. \tag{7}$$

Cum accelerația absolută (17.9) a punctului O este:

$$\bar{a}_0 = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c \tag{8}$$

unde accelerația relativă (13.18) este datorită mișcării circulare uniforme cu viteza relativă $\bar{v}_r = \bar{v}_2$ în jurul punctului O_1:

$$\bar{a}_r = -\frac{v_2^2}{r}\,\bar{i} \tag{9}$$

accelerația de transport (17.11) este:

$$\bar{a}_t = \bar{a}_{0_1} + \dot{\bar{\omega}}_1 \times \overline{O_1O} + \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \overline{O_1O}) = -\omega_1^2 r\,\bar{i} \tag{10}$$

($\bar{a}_{0_1} = \dot{\bar{v}}_1 = 0$, $\dot{\bar{\omega}}_1 = 0$) și accelerația Coriolis (17.12) este:

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_1 \times \bar{v}_r = 2\omega_1 \bar{k} \times (-v_2 \bar{j}) = 2\omega_1 v_2\,\bar{i}. \tag{11}$$

Deci:

$$a_0 = -\frac{(\omega_1 r - v_2)^2}{r}\,\bar{i} = \bar{a}. \tag{12}$$

18.17. Un corp *1* are o mișcare elicoidală caracterizată de vectorii $\bar{v}_1$, $\bar{\omega}_1$ iar mișcarea relativă a corpului *2* față de corpul *1* este o mișcare elicoidală caracterizată de vectorii $\bar{v}_2 = -\bar{v}_1$, $\bar{\omega}_2 = -\bar{\omega}_1$ distanța între suporturile Δ_1 și Δ_2 ale vectorilor $\bar{\omega}_1$ și $\bar{\omega}_2$ fiind r. Să se studieze mișcarea absolută a corpului *2*.

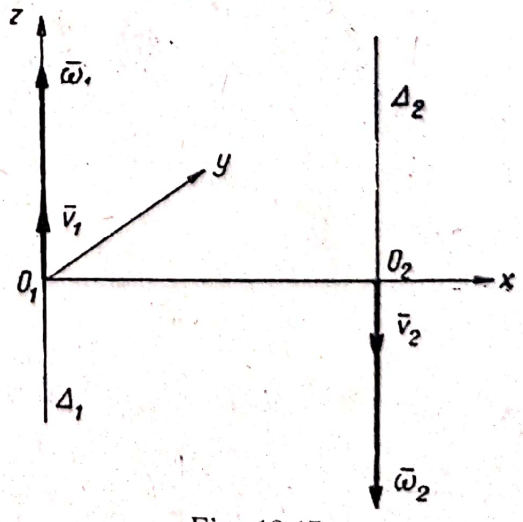


Fig. 18.17

Rezolvare. Viteza unghiulară absolută (18.4) a corpului *2* este:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = 0 \tag{1}$$

deci corpul *2* are o mișcare de translație cu viteza (18.9):

$$\bar{v} = \bar{v}_{0_2}. \tag{2}$$

Viteza punctului O_2 este conform (18.1):

$$\bar{v}_{0_2} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{\omega}_1 \times \overline{O_1O_2} + \bar{\omega}_2 \times \overline{O_2O_2} = \omega_1 r \bar{j} = \bar{v} \tag{3}$$

căci $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_1 \bar{k}$, $\overline{O_1O_2} = r\bar{i}$, $\overline{O_2O_2} = 0$.

Mișcarea corpului *2* este o translație circulară, punctul O_2 descriind un cerc de rază r cu centrul pe axa Δ_1, cu viteza $\omega_1 r$.

Lăsăm pe seama cititorului determinarea distribuției de accelerații a corpului *2*.

18.18. Corpul *1* are o mișcare de rotație uniformă cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ mișcarea corpului (i) față de corpul $(i-1)$ este caracterizată la un moment dat de vectorii $\bar{\omega}_i$ și $\bar{v}_i$ $(i = 2, \ldots, 6)$ avînd drept suporturi muchiile (de lungime a) ale cubului din figura 18.18. Știind că $|\bar{\omega}_i| = \omega_1 = \text{const}$, $v_2 = v_3 = v_4 = 0$, $v_5 = v_6 = \text{const}$, să se determine distribuția de viteze și de accelerații a corpului *6*.

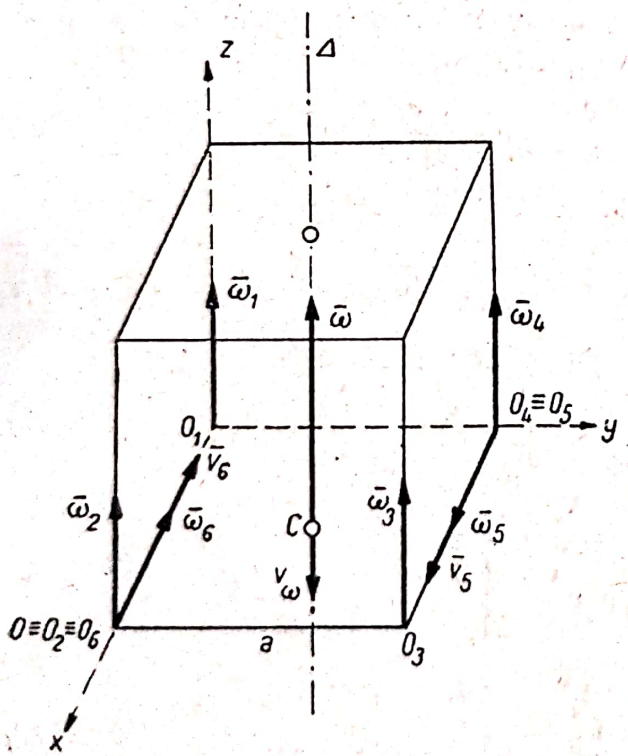


Fig. 18.18

Rezolvare. Viteza (18.9) a unui punct P al corpului *6*, de vector de poziție $\overline{O_6P} = \bar{r}$ este:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} \tag{1}$$

unde viteza unghiulară (18.4) este:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_4 + \bar{\omega}_5 + \bar{\omega}_6 = 4\omega_1 \bar{k} \tag{2}$$

iar viteza (18.1) a punctului O_6 este:

$$\bar{v}_0 = \bar{v}_5 + \bar{v}_6 + \sum_{i=1}^{6} \bar{\omega}_i \times \overline{O_iO_6} =$$

$$= \sum_{i=1}^{6} \overline{O_6O_i} \times \bar{\omega}_i = \sum_{i=1}^{6} \bar{M}_{0_6}(\bar{\omega}_i) \tag{3}$$

căci $\bar{v}_6 = -\bar{v}_5$. Momentele vitezelor unghiulare $\bar{\omega}_i$ în raport cu punctul O_6 sînt:

i	1	2	3	4	5	6
$\bar{M}_{0_6}(\bar{\omega}_i)$	$a\omega_1 \bar{j}$	0	$a\omega_1 \bar{i}$	$a\omega_1 \bar{i} + a\omega_1 \bar{j}$	$-a\omega_1 \bar{k}$	0

Scanned with OKEN Scanner

deci:

$$\bar{v}_0 = 2a\omega_1 \bar{i} + 2a\omega_1 \bar{j} - a\omega_1 \bar{k} \tag{4}$$

$$\bar{v} = 2a\omega_1 \bar{i} + 2a\omega_1 \bar{j} - a\omega_1 \bar{k} + 4\omega_1 \bar{k} \times \bar{r}. \tag{5}$$

Cum $\bar{\omega} \neq 0$, $\bar{v}_0 \neq 0$, $\bar{\omega}\,\bar{v}_0 = -4a\omega_1^2 \neq 0$, corpul 6 are o mișcare elicoidală instantanee cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ și cu viteza (18.11) în lungul axei elicoidale instantanee Δ:

$$\bar{v}_\omega = \frac{(\bar{v}_0\,\bar{\omega})\,\bar{\omega}}{\omega^2} = -a\omega_1 \bar{k} \tag{6}$$

axa Δ trecînd prin punctul C de vector de poziție (18.10):

$$\overline{O_6C} = \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_0}{\omega^2} = \frac{1}{16\,\omega_1^2} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 4\omega_1 \\ 2a\omega_1 & 2a\omega_1 & -a\omega_1 \end{vmatrix} = -\frac{a}{2}\bar{i} + \frac{a}{2}\bar{j}. \tag{7}$$

Deci axa instantanee Δ este axa de simetrie a cubului paralelă cu axa O_1z (v. fig. 18.18).

Accelerația punctului P (18.12) este:

$$\bar{a} = \bar{a}_{0_6} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \tag{8}$$

unde accelerația unghiulară (18.13) se reduce la cea complementară căci $\dot{\bar{\omega}}_i = 0$, vitezele unghiulare fiind constante:

$$\dot{\bar{\omega}} = \dot{\bar{\omega}}_c = \sum_{j<i}\sum \bar{\omega}_j \times \bar{\omega}_i = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_3 + \ldots + \bar{\omega}_5 \times \bar{\omega}_6 =$$
$$= (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_4) \times (\bar{\omega}_5 + \bar{\omega}_6) = 0 \tag{9}$$

deoarece vectorii $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$, $\bar{\omega}_4$ și vectorii $\bar{\omega}_5$, $\bar{\omega}_6$ sînt coliniari, iar $\bar{\omega}_6 = -\bar{\omega}_5$.

Pentru a determina accelerația absolută $\bar{a}_{0_6}$ a punctului O_6, vom avea nevoie de vitezele unghiulare absolute $\bar{\omega}_i'$ și de accelerațiile unghiulare absolute $\dot{\bar{\omega}}_i$ ale corpurilor ($i = 1, \ldots, 5$) care conform (18.4) și (18.13) sînt:

$$\bar{\omega}_1' = \bar{\omega}_1 = \omega_1 \bar{k} \quad \bar{\omega}_2' = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = 2\omega_1 \bar{k} \quad \bar{\omega}_3' = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 = 3\omega_1 \bar{k}$$
$$\bar{\omega}_4' = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_4 = 4\omega_1 \bar{k} \quad \bar{\omega}_5' = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \ldots + \bar{\omega}_5 = \omega_1 \bar{i} + 4\omega_1 \bar{k} \tag{10}$$
$$\dot{\bar{\omega}}_1' = \dot{\bar{\omega}}_2' = \dot{\bar{\omega}}_3' = \dot{\bar{\omega}}_4' = 0 \quad \dot{\bar{\omega}}_5' = (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_4) \times \bar{\omega}_5 = 4\omega_1^2 \bar{j}$$

căci $\dot{\bar{\omega}}_i = 0$, iar $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$, $\bar{\omega}_4$ sînt coliniari. Vom folosi relația (17.13:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r \tag{11}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care accelerația relativă a punctului O_6 față de un sistem solidar cu corpul 5 este nulă $\bar{a}_r = \bar{a}_6 = 0$, viteza relativă $\bar{v}_r = \bar{v}_6 = -\bar{v}_5$ iar viteza și accelerația unghiulară de transport sînt viteza și accelerația unghiulară a corpului 5. Deci:

$$\begin{aligned}\bar{a}_{0_6} &= \bar{a}_{0_5} + \dot{\bar{\omega}}'_5 \times \overline{O_5O_6} + \bar{\omega}'_5 \times (\bar{\omega}'_5 \times \overline{O_5O_6}) + 2\bar{\omega}'_5 \times \bar{v}_6 = \\ &= \bar{a}_{0_5} + 4\omega_1^2 \bar{j} \times (a\bar{i} - a\bar{j}) + (\omega_1 \bar{i} + 4\omega_1 \bar{k}) \times [(\omega_1 \bar{i} + 4\omega_1 \bar{k}) \times \\ &\quad \times (a\bar{i} - a\bar{j})] + 2(\omega_1 \bar{i} + 4\omega_1 \bar{k}) \times (-v_5 \bar{i}) = \\ &= \bar{a}_{05} - 16a\omega_1^2 \bar{i} + 17a\omega_1^2 \bar{j} - 8\omega_1 v_5 \bar{j}.\end{aligned} \tag{11}$$

Analog:

$$\begin{aligned}\bar{a}_{0_5} &= \bar{a}_{0_4} + \dot{\bar{\omega}}'_4 \times \overline{O_4O_5} + \bar{\omega}'_4 \times (\bar{\omega}'_4 \times \overline{O_4O_5}) + 2\bar{\omega}'_4 \times \bar{v}_5 = \bar{a}_{0_4} + 8\omega_1 v_5 \bar{j} \\ \bar{a}_{0_4} &= \bar{a}_{0_3} + \dot{\bar{\omega}}'_3 \times \overline{O_3O_4} + \bar{\omega}'_3 \times (\bar{\omega}'_3 \times \overline{O_3O_4}) = \bar{a}_{0_3} + 9a\omega_1^2 \bar{i} \\ \bar{a}_{0_3} &= \bar{a}_{0_2} + \dot{\bar{\omega}}'_2 \times \overline{O_2O_3} + \bar{\omega}'_2 \times (\bar{\omega}'_2 \times \overline{O_2O_3}) = \bar{a}_{0_2} - 4a\omega_1^2 \bar{j} \\ \bar{a}_{0_2} &= \bar{a}_{0_1} + \dot{\bar{\omega}}'_1 \times \overline{O_1O_2} + \bar{\omega}'_1 \times (\bar{\omega}'_1 \times \overline{O_1O_2}) = \bar{a}_{0_1} - a\omega_1^2 \bar{i} \\ \bar{a}_{0_1} &= 0,\end{aligned} \tag{12}$$

căci accelerațiile relative ale punctelor O_i în raport cu corpurile $(i-1)$ sînt nule, vitezele relative $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \bar{v}_3 = \bar{v}_4 = 0$ iar punctul O_1 este fix. Din relațiile (11) și (12) obținem:

$$\bar{a}_{0_6} = -8a\omega_1^2 \bar{i} + 13a\omega_1^2 \bar{j}$$

deci distribuția de accelerații a corpului (6) este:

$$\bar{a} = -8a\omega_1^2 \bar{i} + 13a\omega_1^2 \bar{j} + 4\omega_1 \bar{k} \times (4\omega_1 \bar{k} \times \bar{r}).$$

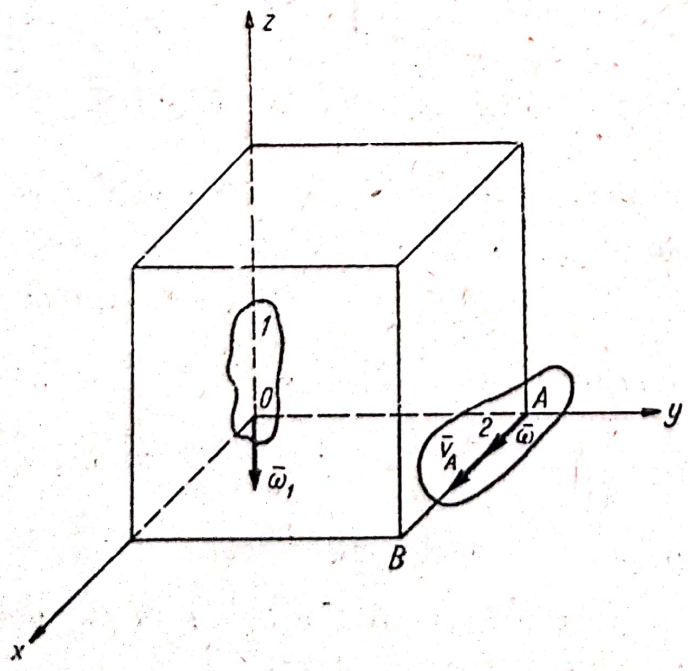


Fig. 18.19

18.19. Corpul *1* se rotește cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ în jurul axei Oz care coincide cu muchia egală cu a a unui cub (fig.18.19). Corpul *2* are o mișcare elicoidală $(\bar{v}_A, \bar{\omega})$ a cărei axă coincide cu muchia AB a cubului. Știind că $\omega_1 = \omega$, $v_A = 2a\omega$, să se afle mișcarea relativă a corpului *2* în raport cu corpul *1*.

Rezolvare. Mișcarea relativă a corpului *2* față de corpul *1* va fi caracterizată de vectorii $\bar{v}_2$

(viteza relativă a punctului A față de corpul *1*) și $\bar{\omega}_2$ (viteza unghiulară relativă a corpului *2* față de corpul *1*).

Conform (18.4):

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$$

deci:

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega} - \bar{\omega}_1 = \omega\,\bar{i} + \omega\,\bar{k} \qquad |\bar{\omega}_2| = \omega\sqrt{2} \tag{1}$$

iar conform (17.3) viteza absolută a punctului A este:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_r + \bar{v}_t = \bar{v}_2 + \bar{\omega}_1 \times \overline{OA}$$

de unde:

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_A - \bar{\omega}_1 \times \overline{OA} = 2a\omega\,\bar{i} - \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} = a\omega\,\bar{i} \tag{2}$$

Cum $\bar{\omega}_2 \neq 0$, $\bar{v}_2 \neq 0$ iar $\bar{\omega}_2 \cdot \bar{v}_2 = a\omega^2 \neq 0$ mișcarea relativă este o mișcare elicoidală instantanee cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_2$ viteza în lungul axei elicoidale instantanee Δ fiind:

$$\bar{v}_{2\omega} = \frac{(\bar{\omega}_2 \cdot \bar{v}_2)\,\bar{\omega}_2}{\omega_2^2} = \frac{a\omega}{2}\,\bar{i} + \frac{a\omega}{2}\,\bar{k} \tag{3}$$

axa trecînd prin punctul C avînd vectorul de poziție dat de:

$$\overline{AC} = \frac{\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_2}{\omega_2^2} = \frac{1}{2\omega^2} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega & 0 & \omega \\ a\omega & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{a}{2}\,\bar{j}$$

deci:

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \frac{3a}{2}\,\bar{j}. \tag{3}$$

Ecuația vectorială a axei Δ este:

$$\bar{r} = \overline{OC} + \mu\bar{\omega}_2 = \frac{3a}{2}\,\bar{j} + \lambda\,(i + \bar{k})$$

unde $\lambda = \mu\omega$, iar ecuațiile carteziene ale axei Δ sînt:

$$y = \frac{3a}{2} \qquad x = z.$$

18.20. Cunoscînd viteza $\bar{v}_1$ a barei *1* și unghiurile α și β să se determine vitezele absolute $\bar{v}_2$ și $\bar{v}_3$ ale corpurilor *2* și *3* din figura 18.20.

Răspuns. $v_2 = v_1 \operatorname{ctg} \alpha$, $v_3 = \dfrac{v_1 \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$.

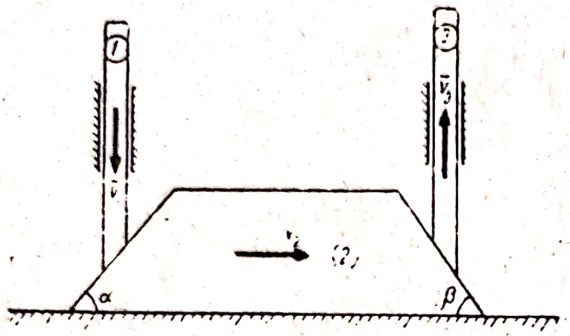


Fig. 18.20

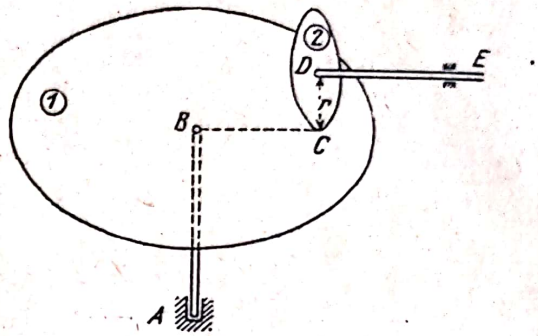


Fig. 18.21

18.21. Pe discul *1* care se rotește în jurul axei verticale AB cu viteza unghiulară constantă $\bar{\omega}_1$ se găsește discul *2* de rază r care se poate roti în jurul axei orizontale fixe DE. Știind că în timpul mișcării discurile nu lunecă unul față de celălalt și că $BC = R$, să se determine viteza unghiulară $\bar{\omega}$ a discului *2* și viteza unghiulară relativă $\bar{\omega}_2$ a discului *2* față de discul *1*.

Răspuns. $\omega = \dfrac{R}{r}\omega_1$, $\omega_2 = \dfrac{\sqrt{R^2 + r^2}}{r}\omega_1$, $\bar{\omega}_2$ formînd unghiul α cu orizontala, unde $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{r}{R}$.

18.22. Bara O_1O_2 și discul *1* de rază r_1 se rotesc în jurul punctului O_1, iscul *2* de rază r_2 articulat în O_2 cu bara, este angrenat cu discul *1*. Cunoscînd viteza unghiulară constantă ω_0 a barei și știind că discul *2* se rostogolește în interiorul cilindrului fix *3* de rază $r_1 + 2r_2$ (fig. 18.22), să se determine vitezele unghiulare absolute ω_1 și ω_2 ale discurilor *1* și *2* și viteza $\bar{v}$ și accelerația $\bar{a}$ a unui punct P de pe periferia discului *2*.

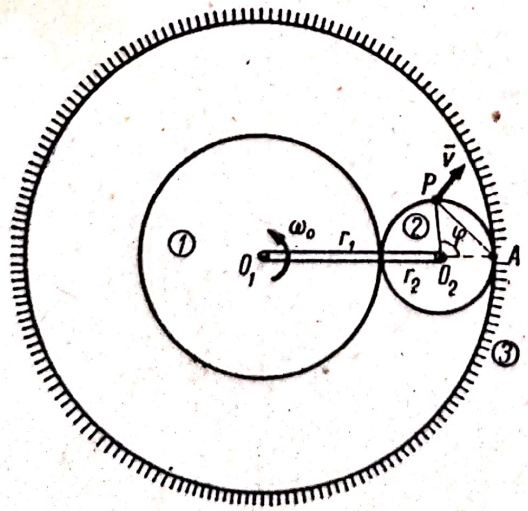


Fig. 18.22

Răspuns. $\omega_1 = 2\dfrac{r_1 + r_2}{r_1}\omega_0$,

$\omega_2 = -\dfrac{r_1 + r_2}{r_2}\omega_0$, $v = 2\omega_0(r_1 + r_2)\sin\dfrac{\varphi}{2}$

și este normală pe AP (A punctul de

18.20. Cunoscînd viteza $\bar{v}_1$ a barei *1* și unghiurile α și β să se determine vitezele absolute $\bar{v}_2$ și $\bar{v}_3$ ale corpurilor *2* și *3* din figura 18.20.

Răspuns. $v_2 = v_1 \operatorname{ctg} \alpha$, $v_3 = \dfrac{v_1 \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$.

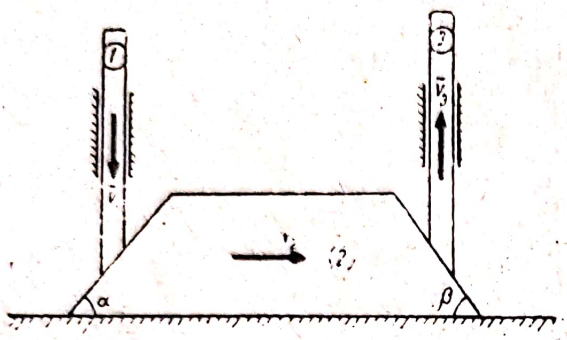


Fig. 18.20

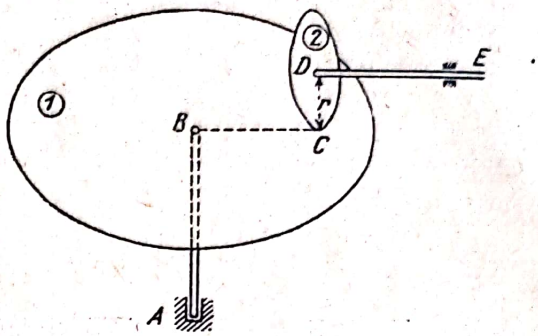


Fig. 18.21

18.21. Pe discul *1* care se rotește în jurul axei verticale AB cu viteza unghiulară constantă $\bar{\omega}_1$ se găsește discul *2* de rază r care se poate roti în jurul axei orizontale fixe DE. Știind că în timpul mișcării discurile nu lunecă unul față de celălalt și că $BC = R$, să se determine viteza unghiulară $\bar{\omega}$ a discului *2* și viteza unghiulară relativă $\bar{\omega}_2$ a discului *2* față de discul *1*.

Răspuns. $\omega = \dfrac{R}{r}\omega_1$, $\omega_2 = \dfrac{\sqrt{R^2 + r^2}}{r}\omega_1$, $\bar{\omega}_2$ formînd unghiul α cu orizontala, unde $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{r}{R}$.

18.22. Bara O_1O_2 și discul *1* de rază r_1 se rotesc în jurul punctului O_1, discul *2* de rază r_2 articulat în O_2 cu bara, este angrenat cu discul *1*. Cunoscînd viteza unghiulară constantă ω_0 a barei și știind că discul *2* se rostogolește în interiorul cilindrului fix *3* de rază $r_1 + 2r_2$ (fig. 18.22), să se determine vitezele unghiulare absolute ω_1 și ω_2 ale discurilor *1* și *2* și viteza $\bar{v}$ și accelerația $\bar{a}$ a unui punct P de pe periferia discului *2*.

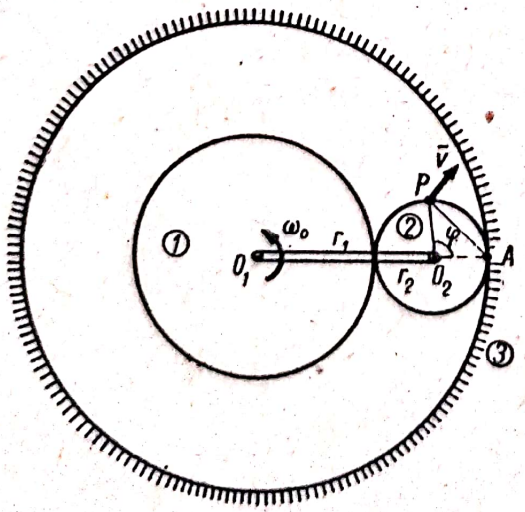


Fig. 18.22

Răspuns. $\omega_1 = 2\dfrac{r_1 + r_2}{r_1}\omega_0$,

$\omega_2 = -\dfrac{r_1 + r_2}{r_2}\omega_0$, $v = 2\omega_0(r_1 + r_2)\sin\dfrac{\varphi}{2}$

și este normală pe AP (A punctul de

contact dintre discul *2* și cilindru) iar $\varphi = \widehat{AO_2P}$, $\bar{a} = -\omega_0^2 \overline{O_1O_2} - \left(\frac{r_1 + r_2}{r_2}\right)^2 \omega_0^2 \overline{O_2P}$.

18.23. Un avion descrie în raport cu aerul un cerc orizontal de rază r cu viteza unghiulară ω_2, elicea se rotește cu viteza unghiulară ω_3, iar viteza vîntului este v_1. Să se determine viteza unghiulară absolută $\bar{\omega}$ a elicei, viteza în lungul axei elicoidale instantanee v_ω și poziția acestei axe Δ cînd direcția axei elicei coincide cu direcția vitezei $\bar{v}_1$.

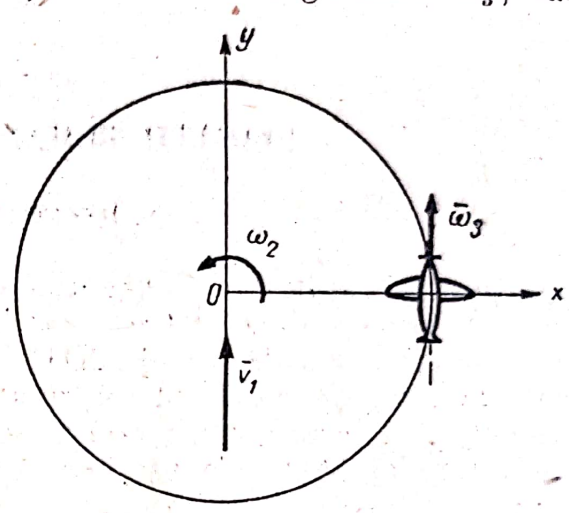


Fig. 18.23

Răspuns. Considerînd un sistem mobil de referință cu originea O în centrul cercului, planul xOy orizontal și Oy paralelă cu axa elicei (fig. 18.23), avem $\bar{\omega} = \omega_3 \bar{j} + \omega_2 \bar{k}$, $v_\omega = \frac{\omega_3 (v_1 + \omega_2 r)}{\sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}}$, axa Δ trece prin punctul C unde $\overline{OC} = \frac{\omega_3^2 r - \omega_2 v_1}{\omega_2^2 + \omega_3^2} \bar{i}$ și are direcția vectorului $\bar{\omega}$, ecuațiile carteziene ale ei fiind $x = \frac{\omega_3^2 r - \omega_2 v_1}{\omega_2^2 + \omega_3^2}$, $y = \frac{\omega_3}{\omega_2} z$.

18.24. Corpul *1* are o mișcare de rotație uniformă cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ în jurul axei BC iar mișcarea relativă a corpului *2* față de *1* este o rotație de viteză unghiulară $\bar{\omega}_2$ ($\omega_2 = \omega_1$) avînd drept suport muchia OA (de lungime l) a cubului din figura 18.24. Să se determine distribuția de viteze și de accelerații a corpului *2*.

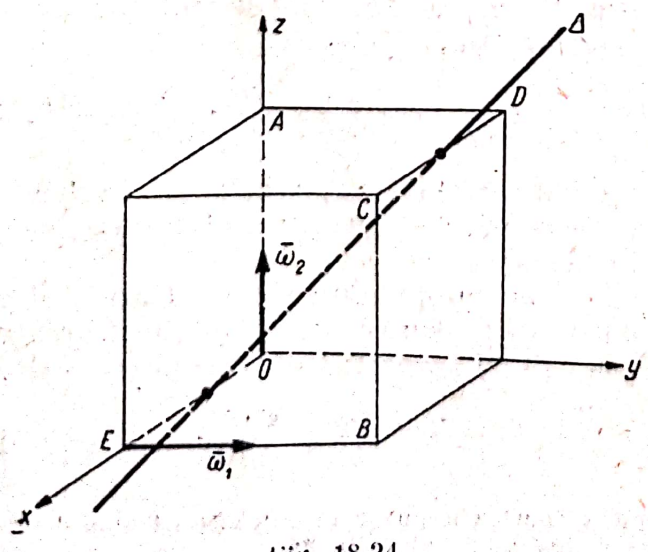


Fig. 18.24

Răspuns. Corpul *2* are o mișcare elicoidală, viteza punctului O fiind $\bar{v}_0 = \omega_1 l \bar{k}$, viteza unghiulară absolută $\bar{\omega} = \omega_1 \bar{j} + \omega_1 \bar{k}$, viteza în lungul axei elicoidale instantanee Δ, $\bar{v}_\omega = \frac{\omega_1 l}{2} \bar{j} + \frac{\omega_1 l}{2} \bar{k}$, ecuațiile axei Δ fiind $x = \frac{l}{2}$, $z = y$ (axa Δ trece prin mijloacele muchiilor OE și CD ale cubului).

Scanned with OKEN Scanner

Acceleraţia punctului O este $\bar{a}_0 = \omega_1^2 \, l\bar{i}$, acceleraţia unghiulară $\bar{\dot{\omega}} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 = \omega_1^2 \, \bar{i}$. Viteza şi acceleraţia unui punct al corpului 2 avînd vectorul de poziţie $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ sînt $\bar{v} = \omega_1 (z - y) \, \bar{i} + \omega_1 x\bar{j} + \omega_1 (l - x) \, \bar{k}$, $\bar{a} = \omega_1^2 (l - 2x) \, \bar{i} - \omega_1^2 y \, \bar{j} + \omega_1^2 (2y - z) \, \bar{k}$.

Capitolul XIX

APLICAŢII TEHNICE ALE CINEMATICII

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

În acest capitol vor fi examinate unele mecanisme[1] folosite în tehnică. În rezolvarea aplicaţiilor se vor folosi rezultatele stabilite în celelalte capitole ale cinematicii (cap. XIII—XVIII) în care de altfel s-au examinat asemenea mecanisme ca mecanismul bielă-manivelă, patrulaterul articulat, diferenţialul de automobil, crucea cardanică etc. O atenţie deosebită se va da mecanismelor pentru transmiterea mişcărilor de rotaţie (roţi cu fricţiune, roţi dinţate, transmisii prin curele) şi celorlalte angrenaje cu roţi dinţate.

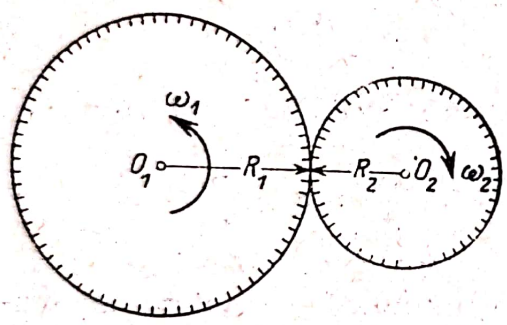


Fig. 19. *a*

Transmisia prin roţi cu fricţiune. Dacă axele celor două roţi sînt paralele şi roata O_1 de rază R_1 este conducătoare şi roata O_2 de rază R_2 este condusă, raportul de transmisie i dintre vitezele unghiulare ale roţii conducătoare ω_1 şi ale roţii conduse ω_2 este:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{R_2}{R_1} \qquad (19.1)$$

dacă roţile sînt angrenate exterior (fig. 19. *a*), iar dacă roţile sînt angrenate interior (fig. 19. *b*):

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}. \qquad (19.2)$$

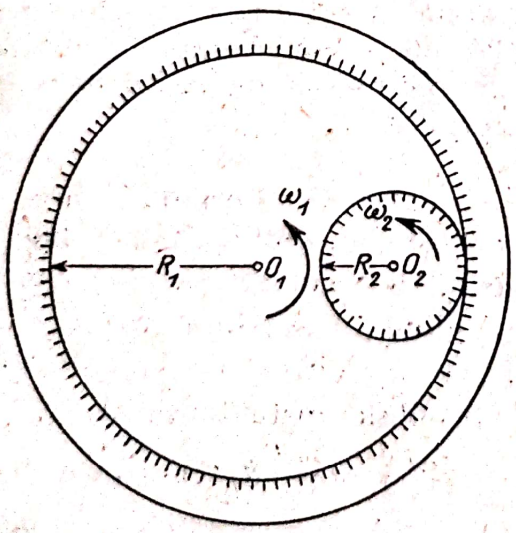


Fig. 19. *b*

În primul caz, roţile se învîrtesc în sensuri contrare; în al doilea caz, în acelaşi sens.

Cînd angrenajul este alcătuit din două roţi conice cu axele concurente (fig. 19. *c*), raportul de transmisie este:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}. \qquad (19.3)$$

[1] Prin mecanism se înţelege un sistem de corpuri conceput de om, cu mişcări bine determinate, al cărui scop este de a transforma o mişcare în altă mişcare.

Scanned with OKEN Scanner

Transmisia prin curele. Dacă roţile se învîrtesc în acelaşi sens (fig. 19. *d*), raportul de transmisie este:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} \tag{19.4}$$

iar în cazul cînd curelele sînt încrucişate (fig. 19. *e*), roţile se învîrtesc în sensuri contrare şi:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{R_2}{R_1}. \tag{19.5}$$

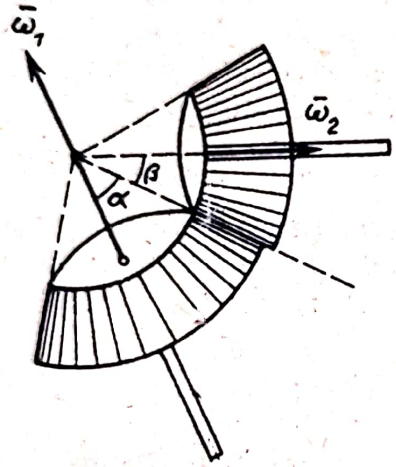


Fig. 19. *c*

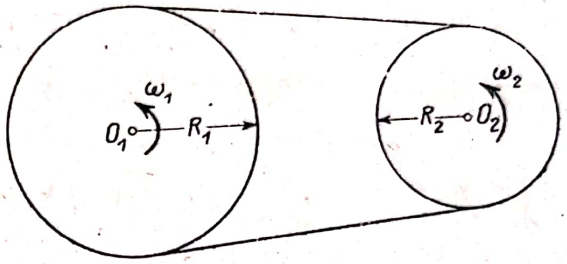


Fig. 19. *d*

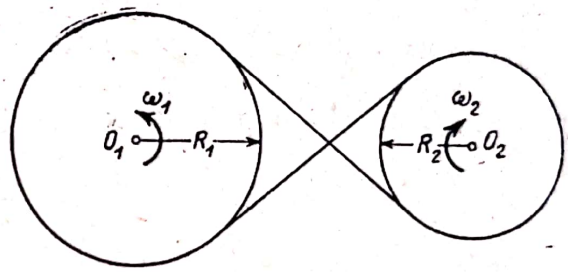


Fig. 19. *e*

Transmisia prin roţi dinţate. Dacă R_1 şi R_2 sînt razele cercurilor primitive şi z_1 şi z_2 numărul dinţilor celor două roţi cu axe paralele, raportul de transmisie este:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{z_2}{z_1} \tag{19.6}$$

pentru roţi angrenate exterior (fig. 19. *a*) şi:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1} \tag{19.7}$$

pentru roţi angrenate interior (fig. 19. *b*). În cazul roţilor conice (fig. 19. *c*):

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{z_2}{z_1} \tag{19.8}$$

unde α şi β sînt unghiurile formate de axele roţilor dinţate cu generatoarea comună a conurilor primitive, iar z_1 şi z_2 numărul dinţilor celor două roţi.

Cu ajutorul roţilor dinţate elicoidale se poate transmite mişcarea de rotaţie a doi arbori cînd axele acestora sînt oarecare în spaţiu. Dacă z_1 este

numărul dinților roții conducătoare și z_2 numărul dinților roții conduse, raportul de transmisie este:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}. \tag{19.9}$$

În cazul unui sistem de roți angrenate sau legate prin curele două cîte două, raportul de transmisie între roata O_1 și roata O_n este:

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \ldots \cdot \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot \ldots \cdot i_{n-1,\,n}. \tag{19.10}$$

Angrenajele cu roată dințată și cremalieră (fig. 19. *f*) transformă mișcarea de rotație a roții dințate în mișcarea de translație a cremalierei. Dacă R este raza cercului primitiv al roții dințate și ω viteza ei unghiulară, viteza cremalierei este:

$$v = R\omega \tag{19.11}$$

Transmisia șurub fără sfîrșit – roată elicoidală (melc – roată melcată) transmite mișcări de rotație în cazul cînd arborii sînt perpendiculari (fig. 19. *g*). Expresia raportului de transmisie este:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z}{n} \tag{19.12}$$

unde z este numărul dinților roții elicoidale, iar n numărul filetelor șurubului fără sfîrșit.

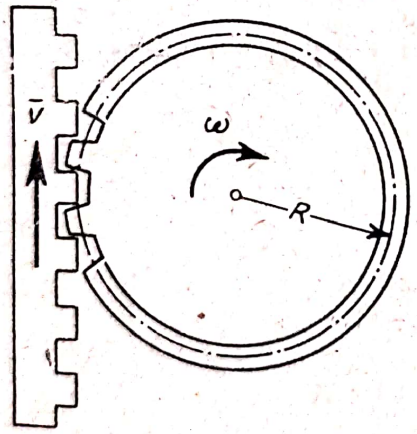


Fig. 19. *f*

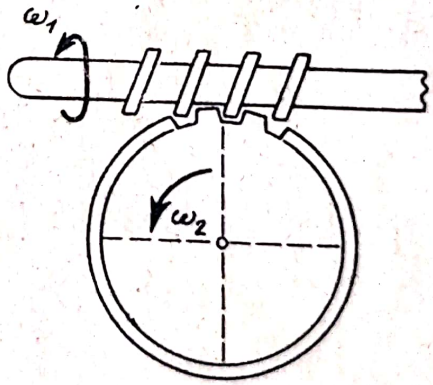


Fig. 19. *g*

B. PROBLEME REZOLVATE

19.1. Se consideră sistemul de roți cu fricțiune din figura 19.1. Cunoscînd razele $R_1 = 15$ cm, $R_2 = 20$ cm, $R_2' = 18$ cm, $R_3 = 15$ cm, $R_3' = 12$ cm, $R_3'' = 8$ cm, $R_4 = 9$ cm, $R_4' = 5$ cm, $R_5 = 24$ cm, $R_6 = 30$ cm, $R_6' = 10$ cm, $R_7 = 36$ cm și viteza unghiulară $\omega_1 = 60\ s^{-1}$, să se determine rapoartele de transmisie i_{1-5} și i_{1-7} și vitezele unghiulare ω_5 și ω_7.

Rezolvare. Conform (19.10) rapoartele de transmisie sînt:

$$i_{1-5} = i_{1-2} \cdot i_{2-3} \cdot i_{3-4} \cdot i_{4-5} = \frac{\omega_1}{\omega_5}$$

$$i_{1-7} = i_{1-2} \cdot i_{2-3} \cdot i_{3-6} \cdot i_{6-7} = \frac{\omega_1}{\omega_7}$$

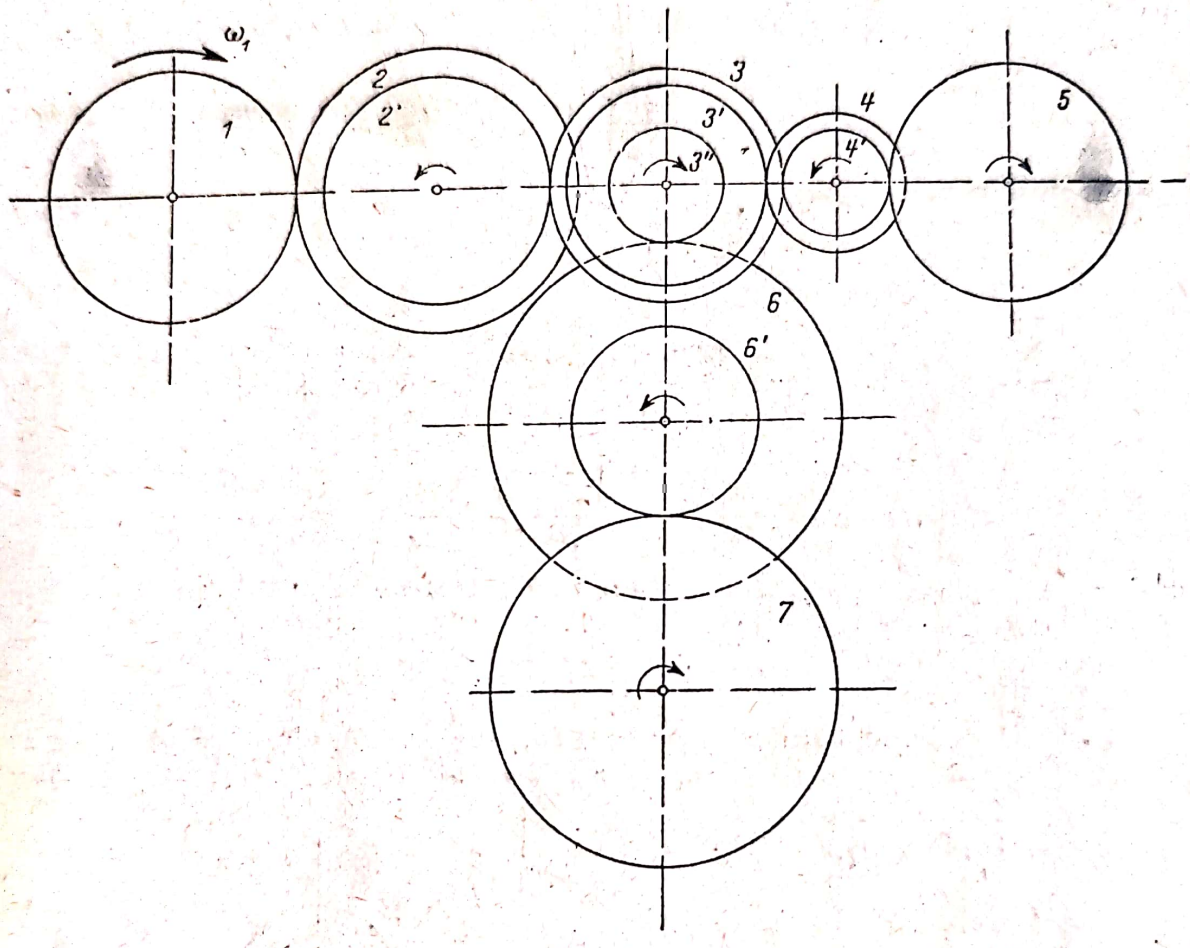


Fig. 19.1

și ținînd seama de (19.1):

$$i_{1-5} = (-1)^4 \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_3}{R_2'} \cdot \frac{R_4}{R_3'} \cdot \frac{R_5}{R_4'} = 4$$

$$i_{1-7} = (-1)^4 \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_3}{R_2'} \cdot \frac{R_6}{R_3''} \cdot \frac{R_7}{R_6'} = 15$$

deci vitezele unghiulare căutate sînt:

$$\omega_5 = \frac{\omega_1}{i_{1-5}} = \frac{60}{4} = 15 \text{ s}^{-1} \qquad \omega_7 = \frac{\omega_1}{i_{1-7}} = \frac{60}{15} = 4 \text{ s}^{-1}$$

roțile *5* și *7* rotindu-se în același sens cu roata *1*.

19.2. Să se determine raportul de transmisie i_{1-6} al sistemului din figura 19.2 știind că $\alpha = 35°$, $R_1 = 22$ cm, $R_2 = 7$ cm, $R_5 = 20$ cm, $R_6 = 11$ cm.

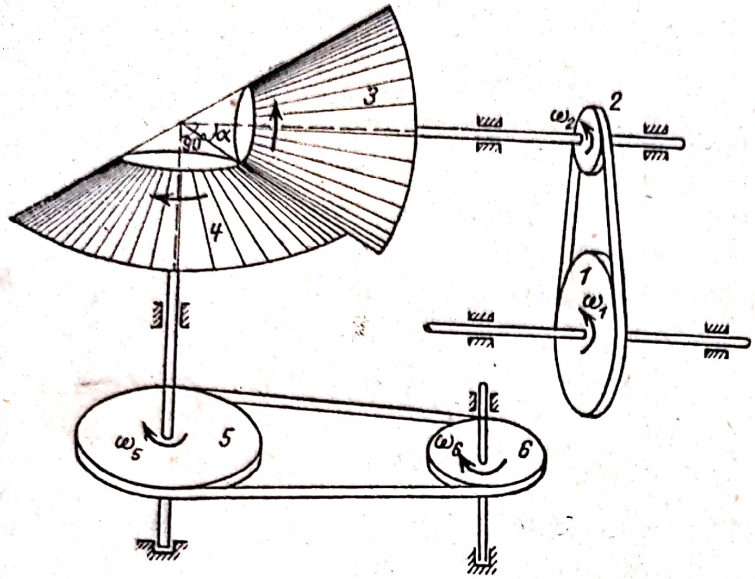


Fig. 19.2

Rezolvare. Conform (19.10):

$$i_{1-6} = i_{1-2} \cdot i_{3-4} \cdot i_{5-6} = \frac{\omega_1}{\omega_6}$$

unde ținînd seama de (19.4):

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{7}{22}$$

$$i_{5-6} = \frac{\omega_5}{\omega_6} = \frac{R_6}{R_5} = \frac{11}{20}$$

iar pentru roțile cu fricțiune conice (19.3):

$$i_{3-4} = \frac{\omega_2}{\omega_5} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{0{,}7}$$

căci $\omega_2 = \omega_3$, $\omega_4 = \omega_5$. Deci raportul de transmisie căutat este:

$$i_{1-6} = \frac{R_2 \cdot R_6}{R_1 \cdot R_5 \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{4}.$$

19.3. Cunoscînd turația $n_1 = 500$ rot/min, numerele de dinți $z_1 = 26$, $z_2 = 16$, $z_3 = 12$, $z_4 = 20$ și razele $R_2' = 7$ cm, $R_3' = 25$ cm, să se determine raportul de transmisie i_{1-4} și turația n_4.

Rezolvare.
Conform (19.10):

$$i_{1-4} = i_{1-2} \cdot i_{2-3} \cdot i_{3-4} = \frac{\omega_1}{\omega_4}$$

și ținînd seama de (19.6) și (19.5):

$$i_{1-4} =$$

$$= \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{R_3'}{R_2'}\right)\left(-\frac{z_4}{z_3}\right) =$$

$$= -\frac{1\,000}{273}$$

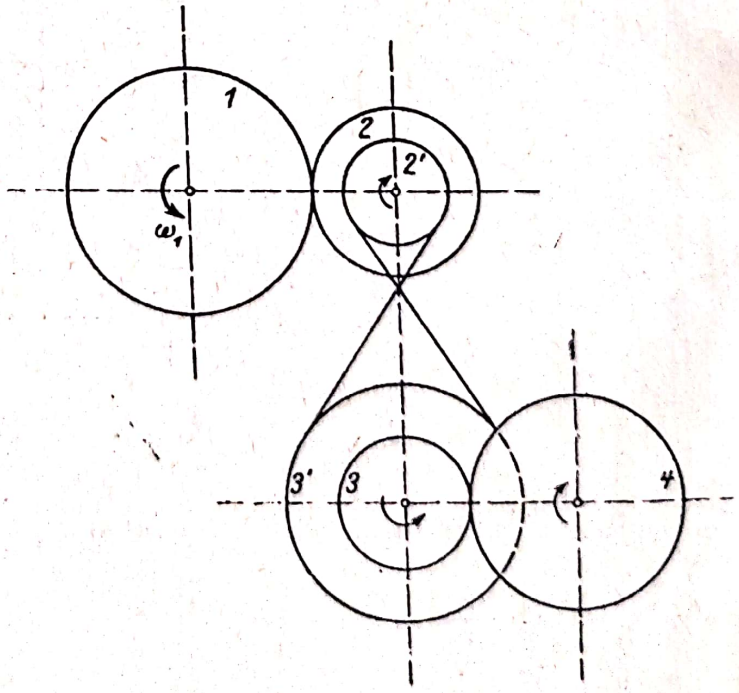


Fig. 19.3

Cum $\omega_1 = \frac{n_1\pi}{30}$, $\omega_4 = \frac{n_4\pi}{30}$,

$$\frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{n_1}{n_4} = i_{1-4},$$

deci:

$$n_4 = \frac{n_1}{i_{1-4}} = -136{,}5 \text{ rot/min}$$

roata *4* rotindu-se în sens contrar roții *1*.

19.4. La cutia de viteze din figura 19.4 se cunosc numerele de dinți ale roților $z_1 = 20$, $z_2 = 40$, $z_3 = 60$, $z_4 = 20$, $z_5 = 40$, $z_6 = 25$, $z_7 = 25$, $z_8 = 40$. Să se determine turațiile mașinii de lucru B dacă motorul A are turația $n_A = 1\,600$ rot/min.

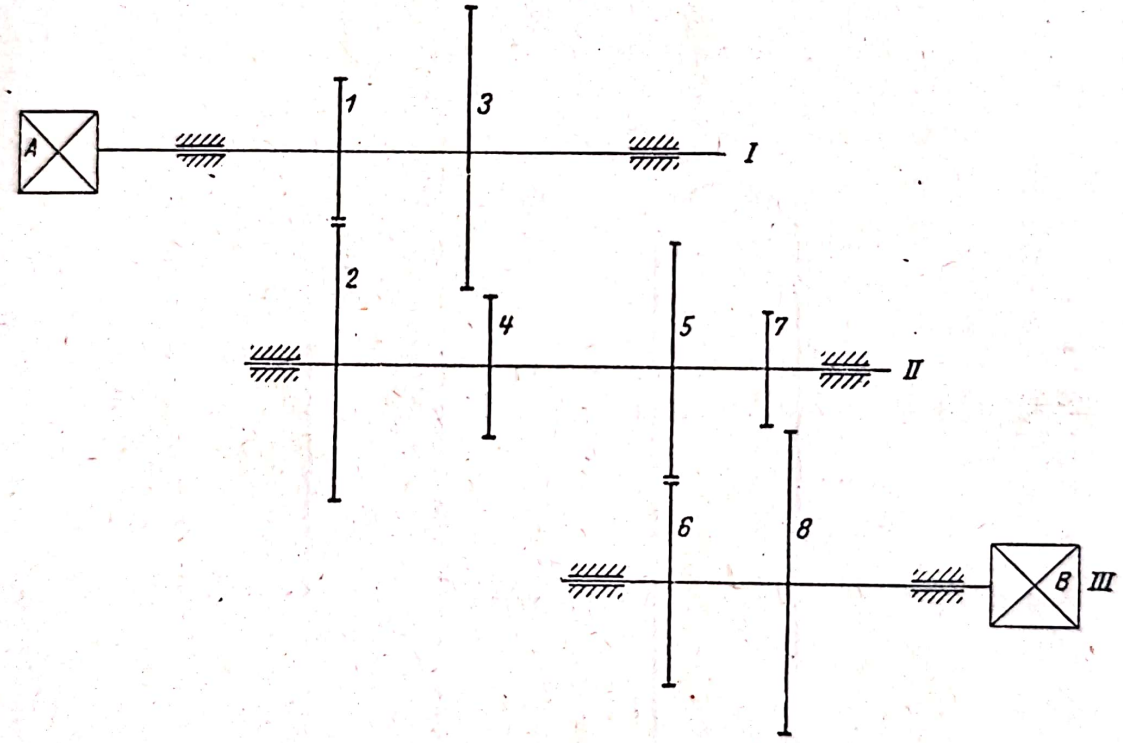


Fig. 19.4

Rezolvare. Între axul motor *I* și axul *II* sînt posibile următoarele rapoarte de transmisie (19.6):

$$i_{1-2} = -\frac{z_2}{z_1} \qquad i_{3-4} = -\frac{z_4}{z_3}$$

iar între axele *II* și *III* se pot realiza rapoartele de transmisie:

$$i_{5-6} = -\frac{z_6}{z_5} \qquad i_{7-8} = -\frac{z_8}{z_7}.$$

Deci raportul de transmisie dintre motorul A și mașina de lucru poate fi egal cu:

$$i_{A-B} = \frac{n_A}{n_B} = i_{1-2} \cdot i_{5-6} = \frac{z_2 \cdot z_6}{z_1 \cdot z_5} = \frac{5}{4} \qquad i_{A-B} = i_{3-4} \cdot i_{5-6} = \frac{z_4 \cdot z_6}{z_3 \cdot z_5} = \frac{5}{24}$$

$$i_{A-B} = i_{1-2} \cdot i_{7-8} = \frac{z_2 \cdot z_8}{z_1 \cdot z_7} = \frac{16}{5} \qquad i_{A-B} = i_{3-4} \cdot i_{7-8} = \frac{z_4 \cdot z_8}{z_3 \cdot z_5} = \frac{8}{15}$$

Rezultă următoarele turații:

$$n_B = \frac{n_A}{i_{A-B}} = 1\,600 \cdot \frac{4}{5} = 1\,280 \text{ rot/min} \qquad n_B = 1\,600 \cdot \frac{24}{5} = 7\,680 \text{ rot/min}$$

$$n_B = 1\,600 \cdot \frac{5}{16} = 500 \text{ rot/min} \qquad n_B = 1\,600 \cdot \frac{15}{8} = 3\,000 \text{ rot/min.}$$

19.5. La reductorul din figura 19.5 se cunosc numerele de dinți ale roților: $z_1 = 20$, $z_2 = 25$, $z_3 = 60$, $z_3' = 16$, $z_4 = 24$, $z_4' = 15$, $z_5 = 25$. Să se determine raportul total de transmitere i_{1-5} al reductorului.

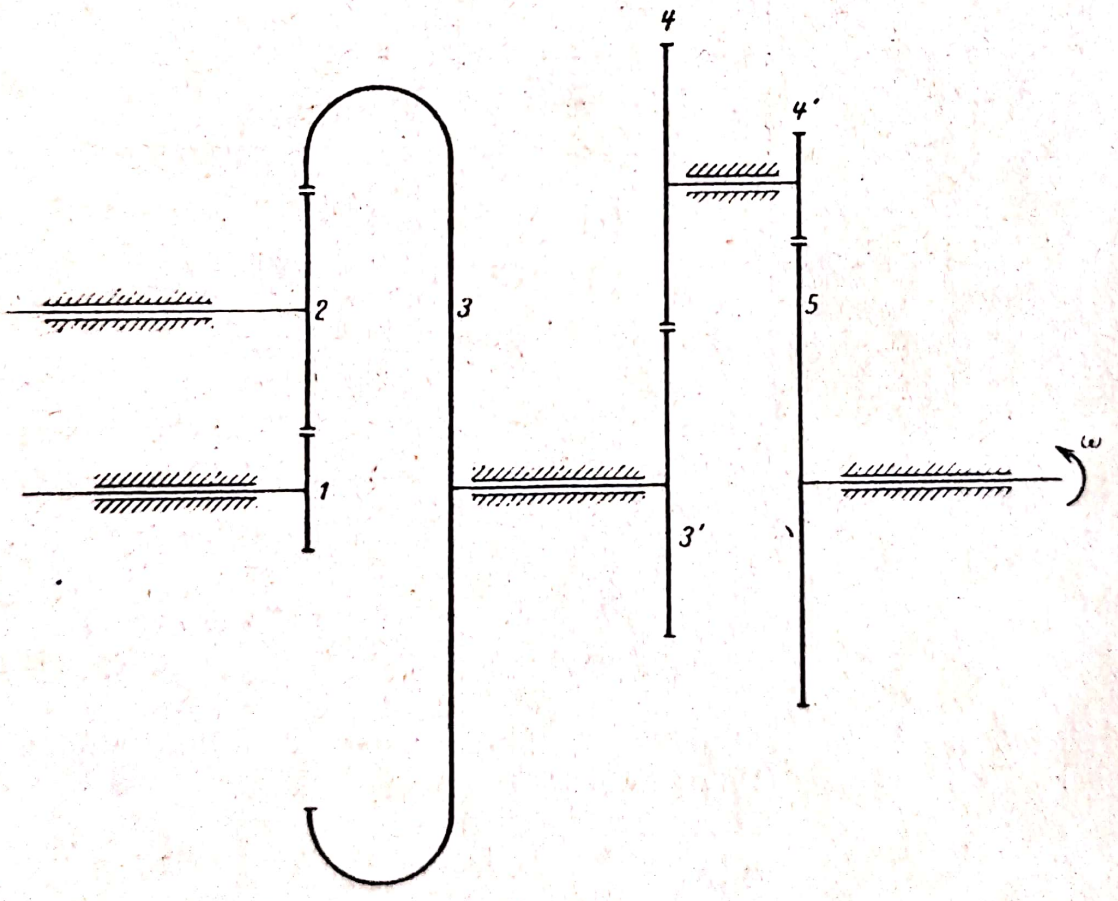


Fig. 19.5

Rezolvare. Conform (19.10), (19.6) și (19.7):

$$i_{1-5} = i_{1-2} \cdot i_{2-3} \cdot i_{3'-4} \cdot i_{4'-5} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_2}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3'}\right) \cdot \left(-\frac{z_5}{z_4'}\right) = -\frac{z_3 \cdot z_4 \cdot z_5}{z_1 \cdot z_3' \cdot z_4'} = -7{,}5.$$

Cum $i_{1-5} = \frac{\omega_1}{\omega_5}$ viteza unghiulară a roții *5* este:

$$\omega_5 = \frac{\omega_1}{i_{1-5}} = -\frac{1}{7{,}5}\omega_1$$

roata *5* rotindu-se în sens invers roții *1*.

19.6. Cunoscînd viteza cremalierei *1*, $v_1 = 20$ cm/s, razele $R_3 = 20$ cm, $R_4 = 12$ cm și numerele de dinți $z_3' = 20$, $z_4 = 24$, să se determine viteza v_2 a cremalierei *2*.

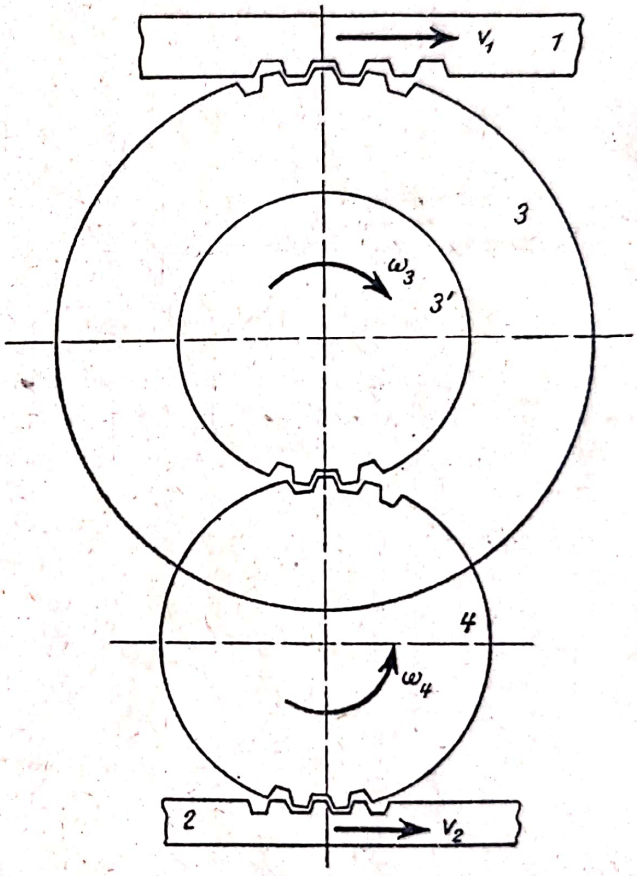


Fig. 19.6

Rezolvare. Conform (19.11):

$$v_1 = \omega_3 R_3 \qquad v_2 = \omega_4 R_4$$

iar conform (19.6):

$$\left|\frac{\omega_3}{\omega_4}\right| = \frac{z_4}{z_3'},$$

Deci:

$$v_2 = \frac{R_4 z_3'}{R_3 z_4} v_1 = 10 \text{ cm/s}.$$

Cele două cremaliere au vitezele orientate în același sens.

19.7. Cunoscînd numerele de dinți $z_1 = 30$, $z_2 = 12$, $z_3 = 20$, $z_4 = 25$, raza $R_5 = 15$ cm și turația roții *1*, $n_1 = 120$ rot/min, să se determine viteza v_6 a cremalierei *6* din figura 19.7.

Rezolvare. Pentru roțile dințate *1* și *2* conform (19.6):

$$\left|\frac{\omega_1}{\omega_2}\right| = \frac{z_2}{z_1}.$$

Pentru roțile dințate conice *3* și *4* conform (19.8):

$$\frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_4}{z_3},$$

Viteza unghiulară a roții *5* este:

$$\omega_5 = \omega_4 = \frac{z_3}{z_4}\omega_3 = \frac{z_3}{z_4}\frac{z_1}{z_2}\omega_1$$

Scanned with OKEN Scanner

căci $\omega_3 = \omega_2$ și deci viteza (19.11) a cremalierei este:

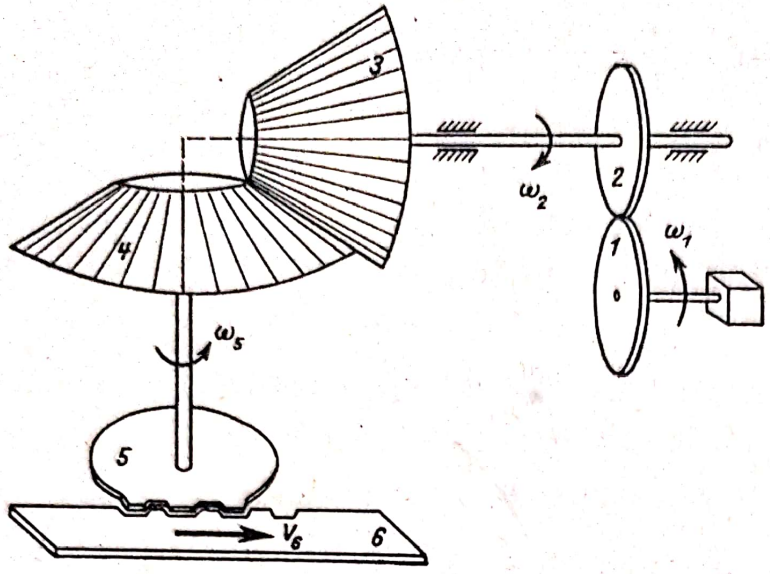


Fig. 19.7

$$v_6 = R_5\,\omega_5 = \frac{R_5 \cdot z_3 \cdot z_1}{z_2 \cdot z_4}\,\omega_1.$$

Cum

$$\omega_1 = \frac{n_1 \pi}{30} = 12{,}56\ \text{s}^{-1}$$

$$v_6 = \frac{15 \cdot 20 \cdot 30}{25 \cdot 12} \cdot 12{,}56 =$$

$$= 376{,}8\ \text{cm/s} = 3{,}768\ \text{m/s}.$$

19.8. Un automobil avînd viteza $v = 36$ km/h execută un viraj cu raza de curbură $\rho = 10$ m. Știind că raza roților este $R = 0{,}5$ m, distanța dintre roți este $d = 2$ m și cunoscînd numerele de dinți $z_1 = z_2 = 20$, $z_3 = 40$, $z_4 = 60$, $z_5 = 16$ ale pinioanelor planetare *1* și *2*, al pinionului satelit *3* și al roților *4* și *5* solidare cu cutia diferențialului și arborele motor, să se determine vitezele unghiulare ω_1, ω_2 (ale axelor planetare), ω_4 (a cutiei diferențialului, ω_{34} (a pinionului satelit în jurul axei sale) și turația n_5 a arborelui motor.

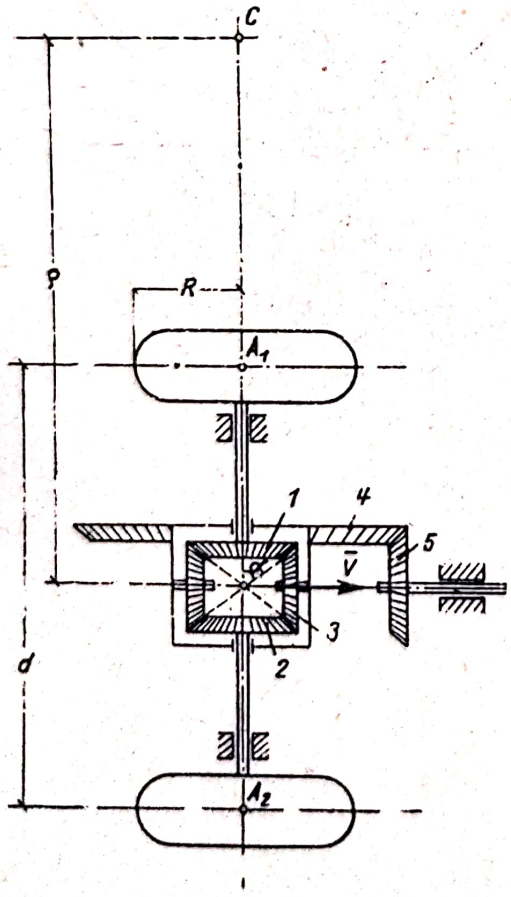


Fig. 19.8 *a*

Rezolvare. Viteza unghiulară instantanee a caroseriei este:

$$\omega_0 = \frac{v}{\rho} = \frac{10}{10} = 1\ \text{s}^{-1}. \qquad (1)$$

Mișcarea roții (1) rezultă din compunerea a două mișcări de rotație concurente, o mișcare relativă cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ față de caroserie și dintr-o mișcare de transport care este o rotație,

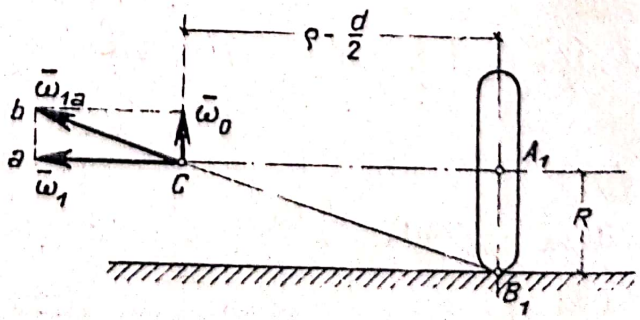


Fig. 19.8 *b*

Scanned with OKEN Scanner

de viteză unghiulară $\bar{\omega}_0$, în jurul axei verticale trecînd prin centrul C al arcului descris de centrul A_1 al roții (fig. 19.8 *b*). Cum roata se rostogolește fără să alunece, vectorul viteza unghiulară absolută $\bar{\omega}_{1a} = \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_1$ trece prin punctul de contact B_1 dintre roată și planul orizontal. Din asemănarea triunghiurilor A_1B_1C și abC obținem:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{\rho - \frac{d}{2}}{R}$$

de unde:

$$\omega_1 = \frac{\rho - \frac{d}{2}}{R}\,\omega_0 = 18\ \text{s}^{-1}. \tag{2}$$

Analog:

$$\omega_2 = \frac{\rho + \frac{d}{2}}{R}\,\omega_0 = 22\ \text{s}^{-1}. \tag{3}$$

După cum s-a arătat în problema 18.7 relația (3), $\omega_2 = 2\omega_4 - \omega_1$, deci viteza unghiulară a cutiei diferențialului în jurul axei planetare este:

$$\omega_4 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 20\ \text{s}^{-1}$$

iar viteza unghiulară a pinionului satelit față de cutia diferențialului [v. relația (2) probl. 18.7] este:

$$\omega_{34} = (\omega_4 - \omega_1)\,\text{tg}\,\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\,\text{tg}\,\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\,\frac{z_1}{z_3} = 1\ \text{s}^{-1} \tag{4}$$

căci $\text{tg}\,\alpha = \frac{r_1}{r_3} = \frac{z_1}{z_3}$. (S-a notat cu r_1 și r_3 razele pinioanelor *1* și *3* proporționale cu numerele de dinți ale acestor pinioane.)

Pentru roțile conice *4* și *5* conform (19.8):

$$\frac{\omega_4}{\omega_5} = \frac{z_5}{z_4} \qquad \omega_5 = \frac{z_4}{z_5}\,\omega_4 = 75\ \text{s}^{-1}$$

deci turația arborelui motor este:

$$n_5 = \frac{30\,\omega_5}{\pi} = 716{,}2\ \text{rot/min}.$$

19.9. Cunoscînd viteza $v_1 = 1$ m/s, razele $R_2 = 20$ cm și $R_4 = 8$ cm, numărul de dinți $z_4 = 20$ și numărul filetelor $n_3 = 2$ al șurubului fără sfîrșit din figura 19.9, să se determine viteza v_6.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Viteza unghiulară a roții *2* și a șurubului fără sfîrșit *3* este:

$$\omega_2 = \omega_3 = \frac{v_1}{R_2}. \qquad (1)$$

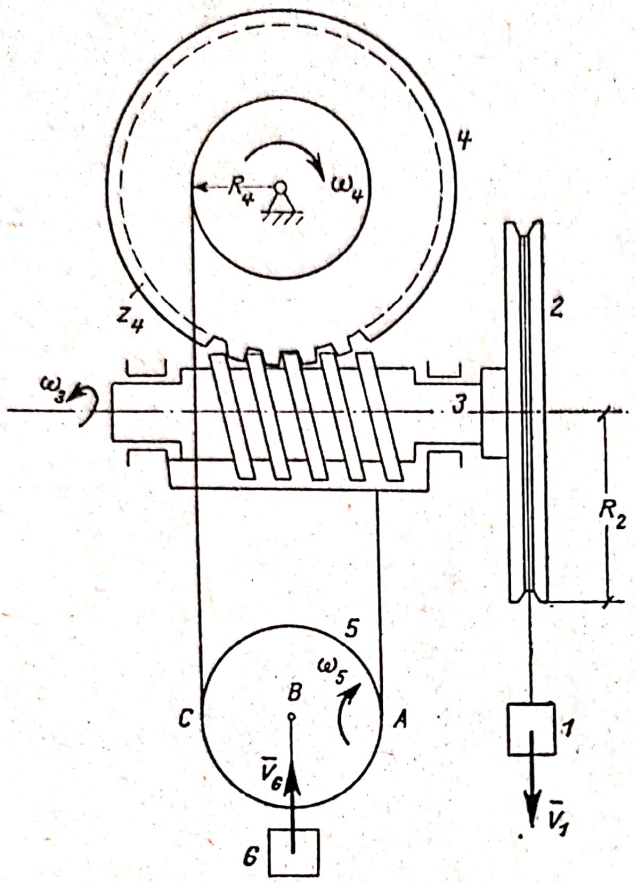


Fig. 19.9

Conform (19.12) viteza unghiulară a roții *4* este:

$$\omega_4 = \frac{n_3}{z_4} \qquad \omega_3 = \frac{n_3 v_1}{z_4 R_2}. \qquad (2)$$

Viteza punctului C al roții *5* este:

$$v_C = R_4\omega_4 = 2R_5\omega_5 \qquad (3)$$

căci centrul instantaneu de rotație al discului *5* este în punctul A.

Viteza corpului *6* este:

$$v_6 = v_B = R_5\omega_5 \qquad (4)$$

și ținînd seama de (2) și (3) obținem:

$$v_6 = \frac{n_3 R_4}{2z_4 R_2} v_1 = 0{,}02 \text{ m/s} = 2 \text{ cm/s}.$$

19.10. Să se determine expresia vitezei unghiulare ω și a accelerației unghiulare $\dot{\omega}$ pentru un mecanism cu cruce de Malta avînd o manivelă O_1A (fig. 19.10 *a*), cunoscînd viteza unghiulară ω_1 constantă a manivelei, razele R și $r = R \operatorname{tg}\frac{\pi}{z}$, numărul z de canale și distanța $OO_1 = \sqrt{R^2 + r^2} = \dfrac{R}{\cos\frac{\pi}{z}}$.

Rezolvare. Viteza absolută a capătului manivelei A este normală pe O_1A:

$$v_a = \omega_1 r \qquad (1)$$

viteza lui relativă față de crucea de Malta are direcția canalului și viteza de transport este normală pe OA:

$$v_t = \omega \cdot OA. \qquad (2)$$

Însă conform (17.3) $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$ iar din figura 19.10 *a*:

$$v_t = v_a \cos(\theta + \varphi), \qquad (3)$$

unde $\theta = \widehat{OO_1A}$ iar $\varphi = \widehat{O_1OA}$.

Scanned with OKEN Scanner

Din triunghiul OO_1A avem:

$$OO_1^2 = OA^2 + r^2 + 2 \cdot OA \cdot r \cos(\theta + \varphi) \tag{4}$$

$$OA^2 = OO_1^2 + r^2 - 2\,OO_1 r \cos\theta = \frac{R^2}{\cos^2 \frac{\pi}{z}} \left(1 + \sin^2 \frac{\pi}{z} - 2 \sin \frac{\pi}{z} \cos\theta\right)$$

și ținînd seama de relațiile (1) ... (4) rezultă:

$$\omega = \frac{OO_1^2 - OA^2 - r^2}{2\,OA^2}\,\omega_1 =$$

$$= \frac{\lambda(\cos\theta - \lambda)}{1 - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2}\,\omega_1 \tag{5}$$

unde s-a notat $\lambda = \sin \frac{\pi}{z}$.

Accelerația unghiulară este:

$$\dot{\omega} = -\frac{\lambda(1 - \lambda^2)\sin\theta}{(1 - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2)^2}\,\omega_1^2 \tag{6}$$

deoarece $\dot{\theta} = \omega_1$, $\dot{\omega}_1 = 0$.

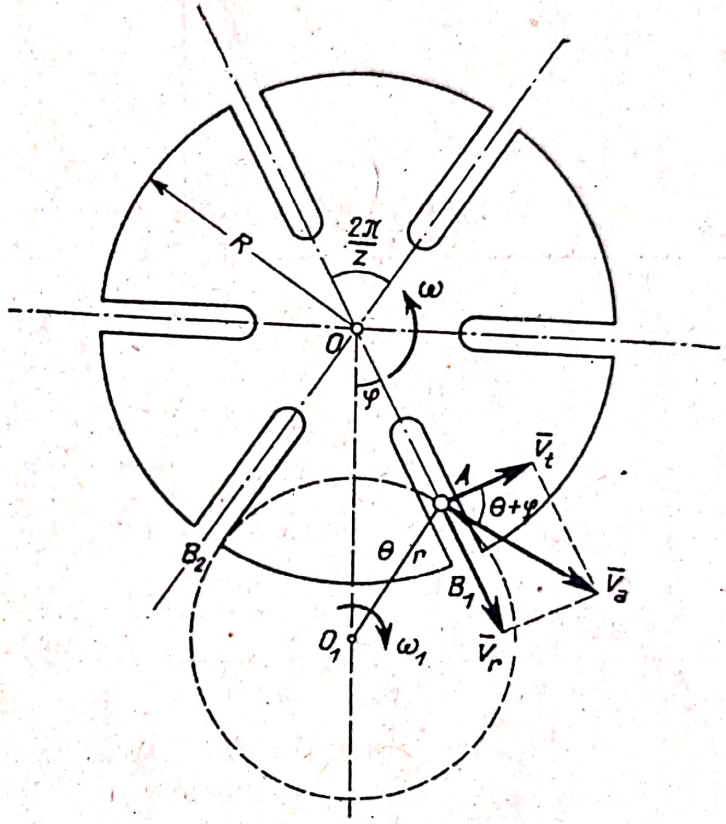


Fig. 19.10 *a*

Relațiile (5) și (6) sînt valabile atîta timp cît crucea de Malta este antrenată de manivela O_1A, adică pentru $OA \leqslant R$. Făcînd calculele, această condiție este îndeplinită pentru:

$$\cos\theta \geqslant \sin \frac{\pi}{z} \qquad -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{z}\right) \leqslant \theta \leqslant \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{z}\right). \tag{7}$$

Pentru $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{z}$, $\omega = 0$ adică în pozițiile în care bara O_1A părăsește discul, discul rămîne în repaus. În figura 19.10 *b* s-a reprezentat diagrama $\omega = \omega(\theta)$ pentru $-\pi \leqslant \theta < \pi$ căci $\omega(\theta + 2k\pi) = \omega(\theta)$.

Observații. Lungimea r a manivelei și distanța OO_1 trebuie astfel alese încît discul să rămînă în repaus cînd manivela părăsește canalul OB_1, adică $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ deci $OO_1^2 = R^2 + r^2$. În această poziție direcția canalului OB_1 este tangentă la cercul descris de punctul A, de asemenea și direc-

ția OB_2 trebuie să fie tangentă la cerc. Cum $\widehat{B_1OB_2} = \frac{2\pi}{z}$, în această poziție $\varphi = \frac{\pi}{z}$ deci $r = R \operatorname{tg} \frac{\pi}{z}$, $OO_1 = \frac{R}{\cos \frac{\pi}{z}}$ (fig. 19.10 *c*).

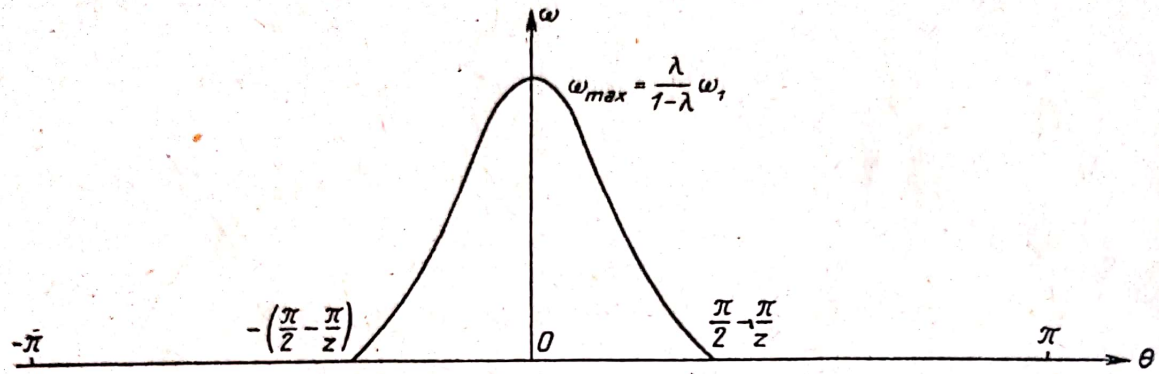


Fig. 19.10 *b*

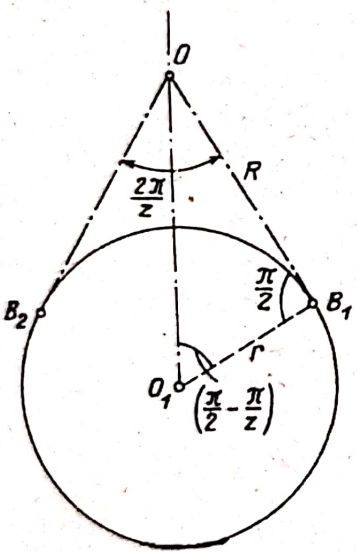


Fig. 19.10 *c*

Timpul de devitare (de rotație) al crucii de Malta este $t_d = \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{z}\right)}{\omega_1}$ iar timpul de repaus

$$t_r = \frac{2\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{z}\right)}{\omega_1}.$$

Raportul între timpul de devitare și cel de repaus se numește coeficientul de timp de lucru:

$$k = \frac{t_d}{t_r} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{z}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{z}} = \frac{z-2}{z+2}.$$

Dacă mecanismul este prevăzut cu m manivele, atunci timpul de repaus este

$$t_r = \frac{\frac{2\pi}{m} - 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{z}\right)}{\omega_1} \text{ iar:}$$

$$k = \frac{t_d}{t_r} = \frac{m(z-2)}{2(m+z) - mz}.$$

19.11. Pentru copiat prin frezare se folosesc dispozitive de copiat plane cu pantograf (fig. 19.11). Știind că $\frac{OC}{OD} = \frac{CA}{DB} = \lambda$ și că $CD = EF$,

$CE = DF$, să se arate că traiectoriile descrise de unealta plasată în punctul B și de palpatorul plasat în A sînt tot timpul paralele iar raportul dintre arcele descrise este constant (raportul de mărire).

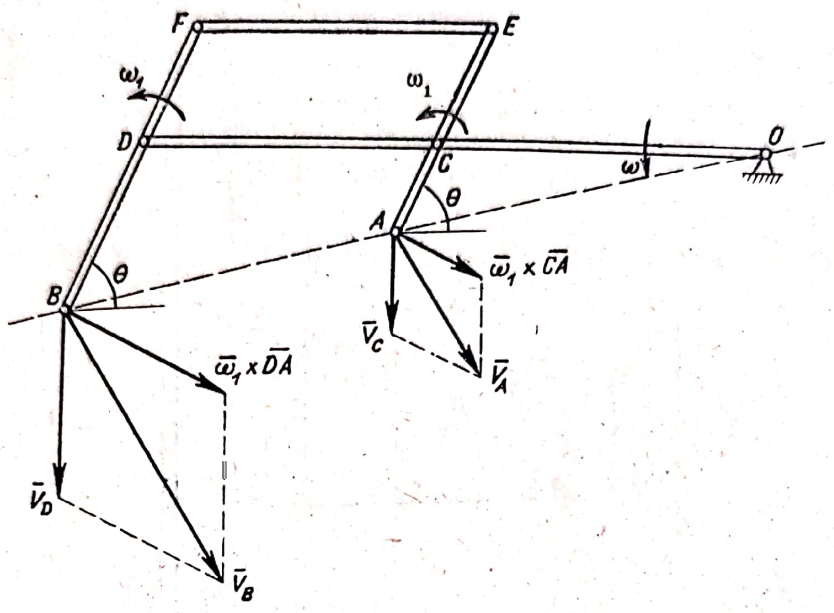


Fig. 19.11

Rezolvare. Notînd cu $\bar{\omega}$ viteza unghiulară a barei OD și cu $\bar{\omega}_1$ vitezele unghiulare egale ale barelor AE și BF (barele fiind tot timpul mișcării paralele, au aceeași viteză unghiulară $\omega_1 = \dot{\theta}$), avem:

$$\bar{v}_C = \bar{\omega} \times \overline{OC} \qquad \bar{v}_D = \bar{\omega} \times \overline{OD} \tag{1}$$

iar conform (14.2):

$$\bar{v}_A = \bar{v}_C + \bar{\omega}_1 \times \overline{CA} \qquad \bar{v}_B = \bar{v}_D + \bar{\omega}_1 \times \overline{DB}. \tag{2}$$

Dar prin construcție $\overline{OC} = \lambda\, \overline{OD}$, $\overline{CA} = \lambda\, \overline{DB}$ deci din (1) și (2):

$$\bar{v}_A = \lambda\bar{\omega} \times \overline{OD} + \lambda\bar{\omega}_1 \times \overline{DB} = \lambda\, \bar{v}_B \tag{3}$$

deci $\bar{v}_A$ și $\bar{v}_B$ sînt coliniare și traiectoriile descrise de punctele A și B sînt paralele, și cum raportul $\dfrac{|\bar{v}_A|}{|\bar{v}_B|} = \dfrac{|d\bar{r}_A|}{|d\bar{r}_B|} = \lambda$ este constant, raportul arcelor descrise este constant.

19.12. În mecanismul spațial din figura 19.12 *a* discul *I* antrenează discul *II* prin intermediul tijei cotite ACB. Cunoscînd viteza unghiulară ω_1 a discului *I* și distanțele $O_1A = r_1$, $O_2B = r_2$, să se determine viteza unghiulară ω_2 a discului *II*.

Rezolvare. Bara ACB este tot timpul paralelă cu planul yOz deci:

adică: $$x_{1A} = x_{2B}$$

$$r_1 \cos\alpha = r_2 \sin\beta \tag{1}$$

Scanned with OKEN Scanner

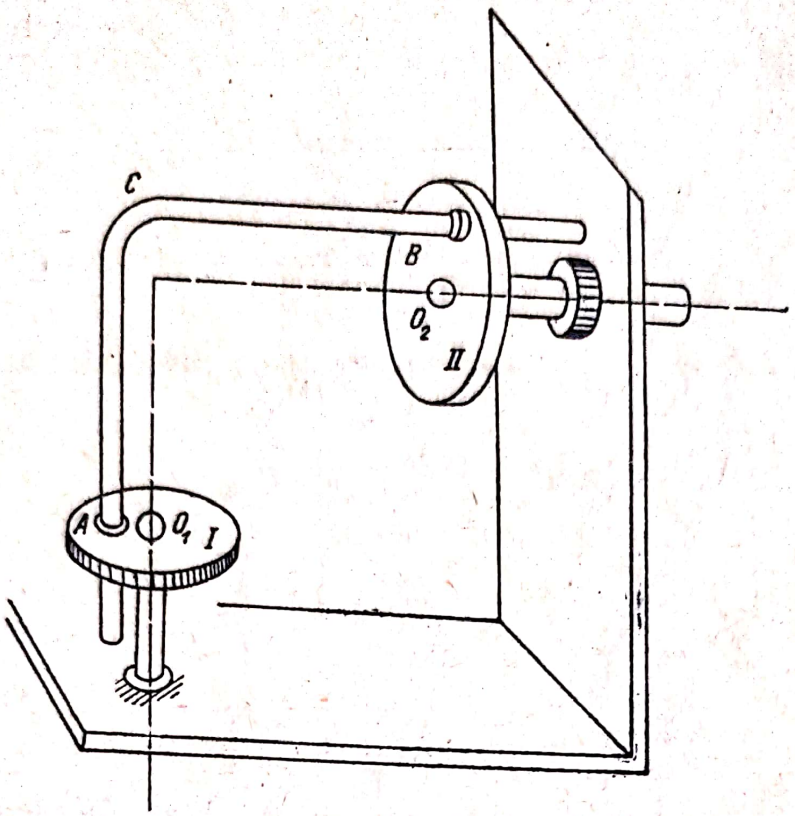


Fig. 19.12 *a*

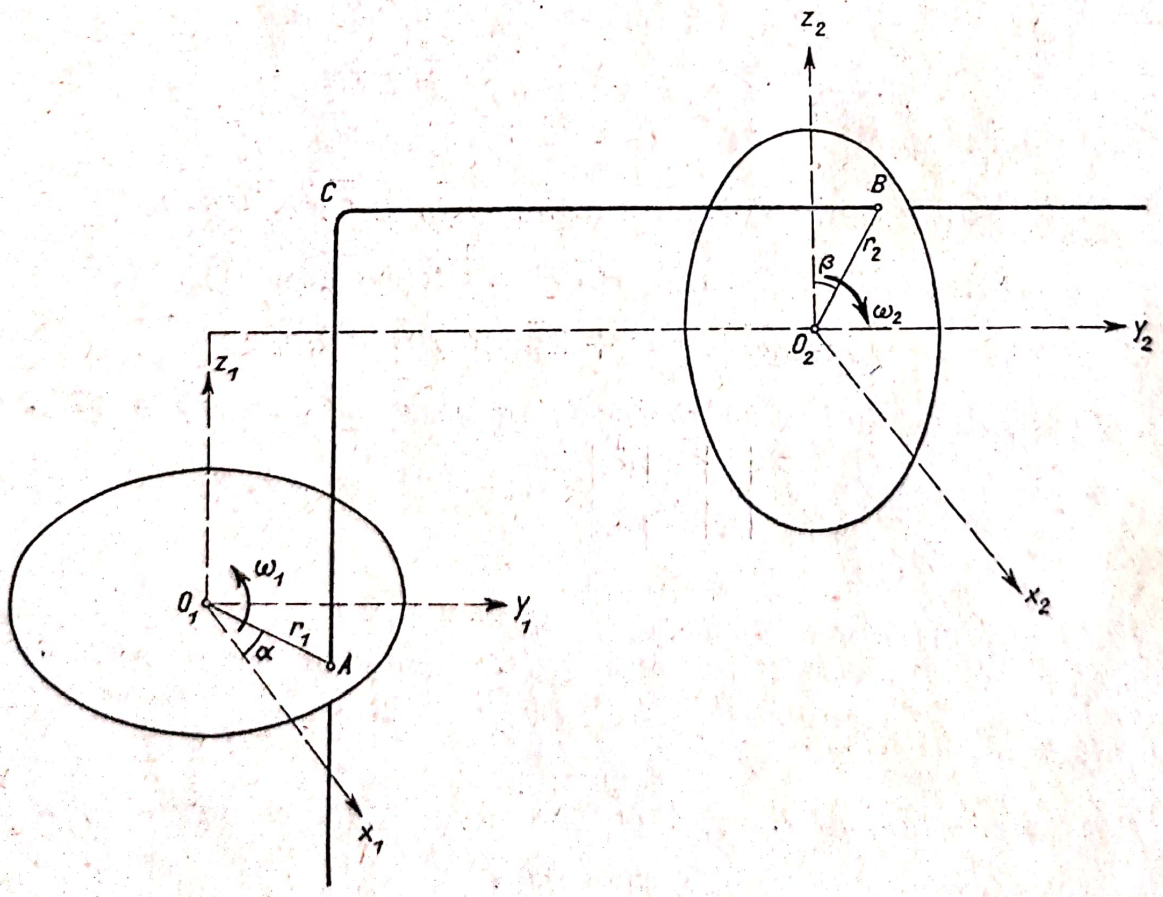


Fig. 19.12 *b*

Scanned with OKEN Scanner

Derivînd această relație obținem:

$$-r_1 \sin\alpha\ \omega_1 = r_2 \cos\beta\ \omega_2 \qquad (2)$$

căci:

$$\dot{\alpha} = \omega_1,\quad \dot{\beta} = \omega_2$$

deci:

$$\omega_2 = -\frac{r_1}{r_2}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\omega_1 . \qquad (3)$$

Însă din (1):

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{r_1^2\cos^2\alpha}{r_2^2}}$$

și înlocuind în (3):

$$\omega_2 = -\frac{r_1\omega_1\sin\alpha}{\sqrt{r_2^2 - r_1^2\cos^2\alpha}}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

19.13. Cu ce viteză se ridică platanul B al cricului din figura 19.13 dacă se cunosc numerele de dinți $z_1 = 6$, $z_2 = 18$, $z_2' = 8$, $z_3 = 32$, raza $r_3' = 5$ cm și dacă manivela execută $n_1 = 90$ rot/min.

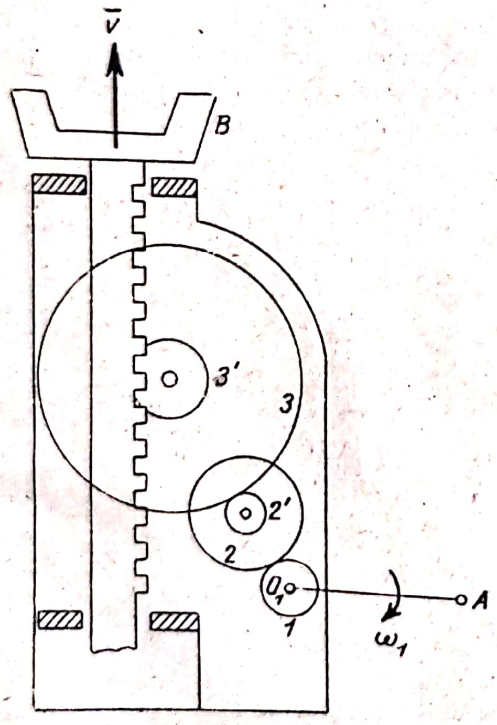


Fig. 19.13

Răspuns. $v = \frac{\pi}{30}\frac{z_2' z_1}{z_3 z_2} r_3' n_1 = 3{,}925$ cm/s.

19.14. Cunoscînd vitezele unghiulare $\omega_1 = 6\ s^{-1}$ și $\omega_2 = 20\ s^{-1}$ ale pinioanelor planetare *1* și *2* din figura 19.14 și numerele de dinți $z_1 = 50$, $z_2 = 30$, $z_4 = 30$, $z_5 = 10$, să se determine viteza unghiulară a axului *3* și viteza unghiulară ω_{43} a pinioanelor satelite *4* și *5* în jurul axei *3*.

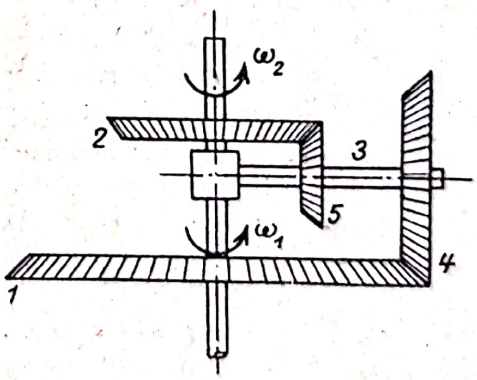


Fig. 19.14

Răspuns. $\omega_3 = \frac{z_1 z_5 \omega_1 + z_2 z_4 \omega_2}{z_1 z_5 + z_2 z_4} = 15\ s^{-1}$

$$\omega_{43} = \frac{z_1 z_2 (\omega_2 - \omega_1)}{z_1 z_5 + z_2 z_4} = 15\ s^{-1}.$$

CUPRINSUL

	Pag.
STATICA	3
Cap. I. Forțe concurente	3
Cap. II. Statica punctului material	13
Cap. III. Momentul unei forțe față de un punct și față de o axă	34
Cap. IV. Reducerea unui sistem de forțe oarecare	48
Cap. V. Forțe paralele. Centrul forțelor paralele. Centrul maselor	71
Cap. VI. Statica solidului rigid	97
Cap. VII. Echilibrul cu frecare	135
Cap. VIII. Statica sistemelor de corpuri	159
Cap. IX. Sisteme de bare articulate	187
Cap. X. Echilibrul firelor	202
Cap. XI. Aplicații tehnice ale staticii	231
Cap. XII. Elemente de statică grafică	260
CINEMATICA	291
Cap. XIII. Cinematica punctului	291
Cap. XIV. Cinematica solidului	356
Cap. XV. Cinematica solidului cu un punct fix	381
Cap. XVI. Mișcarea plan-paralelă	399
Cap. XVII. Cinematica mișcării relative a punctului	446
Cap. XVIII. Mișcarea relativă a solidului	480
Cap. XIX. Aplicații tehnice ale cinematicii	508

Tehnoredactor : VASILESCU MILIANA

Dat la cules 28.11.1960. Bun de tipar 26.04.1961. Apărut 1961. Tiraj 700+120 legate ½. Hîrtie semivelină de 65 g/m², 70×100/16. Coli editoriale 30,968. Coli de tipar 32,75. A 04811. C.Z. pentru bibliotecile mari 621.01 (075.8). C.Z. pentru bibliotecile mici 621.

Intreprinderea Poligrafică „13 Decembrie 1918", str. Grigore Alexandrescu nr. 93—95, București, R.P.R., Comanda nr. 3344.

1153-13

Scanned with OKEN Scanner

Preţul cărţii 13,80 lei
Preţul legătoriei 2.— lei
Total 15,80 lei

Scanned with OKEN Scanner